AERODYNAMIK DER LUFTSCHRAUBE

AERODYNAMIK DER LUFTSCHRAUBE

VON

DR.-ING. FRITZ WEINIG
N.B.A.O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN
ABTEILUNGSLEITER BEI DER DEUTSCHEN VERSUCHSANSTALT
FÜR LUFTFAHRT

MIT 374 TEXTABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1940

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit über „Aerodynamik der Luftschraube“ sollte nach ursprünglichem Plan von Herrn Dr.-Ing. F. SEEWALD verfaßt werden. Da jedoch seit der Planung dieses Buches Herr Dr.-Ing. SEEWALD infolge seiner Tätigkeit als Leiter der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof, durch die Entwicklung, welche die deutsche Luftfahrt in den letzten Jahren erlebte, dauernd an der Abfassung des geplanten Buches über Luftschrauben verhindert war, so vertraute er die Abfassung dieser Arbeit dem Unterzeichneten an.

In der Entwicklung, welche die Aerodynamik der Luftschraube in den letzten Jahren noch hatte, scheint nunmehr ein gewisser Abschluß erreicht zu sein, so daß die vorliegende Arbeit für längere Zeit den an sie zu stellenden Anforderungen genügen dürfte. Anders liegt dies offenbar bei der Konstruktion der Luftschrauben, deren Darstellung ursprünglich mit in den Rahmen dieses Buches einbezogen werden sollte. Da aber gerade die konstruktive Gestaltung der Luftschraube noch sehr in Fluß ist, wurde über sie zu berichten unterlassen. Einerseits wäre dadurch die Fertigstellung der vorliegenden Arbeit noch stark verzögert worden, andererseits hätte auch die Gefahr der allzu schnellen Veraltung des Dargestellten vorgelegen. Die Darstellung der Luftschraubenkonstruktion soll daher einer besonderen Arbeit überlassen bleiben, in der auch die Fragen der Festigkeit und Schwingungen am besten ihren Platz finden könnten.

An sich wäre es vielleicht zweckmäßig gewesen, in der vorliegenden „Aerodynamik der Luftschraube“ auch Kapitel über „Luftschraube und Flugmechanik“ und über „Die strömungstechnischen Grundlagen der Luftschraube“ einzufügen. Offenbar gehören diese Gegenstände aber besser in allgemeine Arbeiten über Fluglehre und Aerodynamik. Sie haben auch dort in Grundzügen ihren Platz gefunden. Es wäre aber erfreulich, wenn sie bei einer etwaigen Neubearbeitung dort eine noch ausführlichere Darstellung finden könnten, als dies bisher der Fall ist.

Die „Aerodynamik der Luftschraube“ wurde in vier Teile gegliedert.

Der erste Teil enthält „Allgemeines von der Luftschraube“ und gliedert sich in die Kapitel „Geometrie der Luftschraube“ und „Grundlagen für Schraubenversuche und deren Auswertung“. Ersteres enthält alles, was gestaltlich bei der Luftschraube durch die Strömungsverhältnisse bedingt ist und zum Verständnis der konstruktiven Belange durch

den Aerodynamiker beitragen kann. Letzteres enthält alles, was ohne Eingehen auf Einzelheiten des Strömungsmechanismus der Leistungsabgabe und der Schuberzeugung schon rein auf Grund der Ähnlichkeitsmechanik verstanden werden kann und letzten Endes auch schon ausreichende Unterlagen für Versuchsanordnung und Versuchsauswertung bietet.

Der zweite Teil bringt „Untersuchungen am Schraubenelement". Die Elementarschraube wurde hierin sehr ausführlich behandelt und zwar deshalb, weil einerseits an der Elementarschraube alles Wesentliche erkannt werden kann und weil andererseits die Elementarschraube auch für große Belastung exakt zu behandeln ist. Das Kapitel über „Zusammenhänge zwischen Wirkungsgrad und Leistung" bringt alles, was aus dem Impulssatz, dem Drallsatz und der Druckgleichung zu folgern ist, ohne daß man auf die Erzeugung der Strömung selbst näher einzugehen braucht. Es enthält also das, was auch unter dem Begriff „Strahltheorie" erfaßt wird. Zu bemerken ist, daß hierbei auch der Einfluß der Flügelblattreibung bis in die letzten Folgerungen ohne jegliche Vernachlässigung behandelt wurde.

Das folgende Kapitel behandelt die „Zusammenhänge zwischen Steigung, Blattbreitenverhältnis und Leistung". Hierbei ist es gelungen, die Verhältnisse bei der Elementarschraube ohne jegliche Vernachlässigung zu erfassen, und zwar so, daß die Ergebnisse unter gewissen praktisch erfüllten bzw. zulässigen Annahmen auf die Gesamtschraube übertragen werden können. Dies gilt besonders bezüglich des Verhaltens bei geänderten Betriebsbedingungen. Ein weiteres Kapitel über „Die Wirkung einer Leitvorrichtung" behandelt am Beispiel der Elementarschraube alles Wesentliche über das Zusammenarbeiten von Schraube und Leitvorrichtung oder eines gegenläufigen Schraubenpaares. Das Kapitel „Ungleichförmigkeitseinflüsse" behandelt die Wirkung des Verdrängungsmitstroms und des Reibungsmitstroms und die Wirkung der Schräganblasung und der Drehung des Flugzeugs. Durch Integration sind alle diese Ergebnisse auf die Gesamtschraube zu übertragen, besonders einfach im Falle der „schwachen" Belastung, welche Bedingung bei Luftschrauben im allgemeinen erfüllt ist.

Der dritte Teil bringt „Das Verhalten der Gesamtschraube" und behandelt in seinem ersten Kapitel „Die Theorie der schwachbelasteten Luftschraube sehr großer Flügelzahl" und daran anschließend in seinem zweiten Kapitel „Die Theorie der Luftschraube endlicher Flügelzahl". Die Durcharbeitung führt im dritten Kapitel zur „Berechnung von Luftschrauben" vorgeschriebener Leistungsaufnahme und ihres Verhaltens bei geändertem Betriebszustand und zwar nach zwei verschiedenen Verfahren. Das eine begründet sich direkt auf die Kenntnis der Eigenschaften der zu benutzenden Tragflügelprofile, das andere macht Gebrauch vom

Begriff der zur Luftschraube gleichwertigen Profilpolaren. Letzteres dürfte für praktische Bedürfnisse das zweckmäßigere sein. Ersteres genügt jedoch mehr den theoretischen Anforderungen.

Daran schließt sich dann an der vierte Teil, der das „Zusammenwirken von Luftschraube und Flugzeug“ behandelt, mit den Kapiteln „Die Luftschraube bei Anstellung und Drehung des Flugzeuges und der Einfluß von Flügel und Rumpf“ und „Der Einfluß des Luftschraubenstrahls auf Tragflügel, Rumpf und Leitwerk“. Hierin werden die Grundlagen zur Behandlung dieser etwas schwer verständlichen Zusammenhänge dargelegt und, soweit dies im Rahmen der Arbeit möglich war, auch Vergleiche mit Versuchsergebnissen durchgeführt.

Eine ausführliche Zusammenstellung von Luftschraubenversuchen und ein Schrifttumsverzeichnis ergänzen die Ausführungen des Buches.

Es wäre noch einiges über den Zweck zu sagen, den dieses Buch über Luftschrauben erfüllen soll.

Es kann nicht so sehr die Absicht sein, dem Luftschraubenkonstrukteur unmittelbar Berechnungsgrundlagen für einen Schraubenentwurf zu bringen, obwohl sie wohl nicht allzu schwer aus dem Buch zu erkennen sind. Darin wird ihm die in seinem Betriebe vorhandene Erfahrung vielmehr nützen können und diese kann ihm ein Buch niemals ersetzen. Aber darüber wird ihm das vorliegende Buch doch Aufschluß geben, nach welchen Gesichtspunkten die Hauptabmessungen zu wählen sind und durch welche Änderungen im einzelnen er einen gewünschten Erfolg erzielen kann. Als gleich wichtig, wenn nicht als noch wichtiger, kann aber ein Buch über Luftschrauben für den Flugzeugbauer selbst gelten. Kann ihm doch ein solches bei den immer größeren Leistungen des Motors zeigen, was er alles bei einem Flugzeugentwurf hinsichtlich der Luftschraube zu beachten hat, und daß sein Erfolg von unter Umständen scheinbar nur kleinen Änderungen der Anordnung wie Gestaltung abhängen kann.

Möge die Arbeit all denen, die sie aus solchen Gründen befragen, eine genügende Antwort erteilen; möge sie aber auch dem noch Lernenden ein Lehrbuch sein der Wirkungsweise der Luftschraube und ihm die vielfachen Beziehungen zwischen Flugzeug und Luftschraube klarwerden lassen.

Zu danken habe ich der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof, und ihrem Leiter, Herrn Dr.-Ing. F. Seewald, sowie den vorgesetzten Stellen für die großzügige Unterstützung, die sie mir bei der Abfassung der Arbeit zuteil werden ließen. Zu danken habe ich weiter meinen Arbeitskameraden, welche die Arbeit in vielfältiger Weise durch Anregung und Mithilfe förderten.

Berlin-Adlershof, den 1. März 1939.

Fritz Weinig.

Inhaltsverzeichnis.

I. Allgemeines von der Luftschraube.

A. Geometrie der Luftschraube.

Seite

E. Die Wirkung einer Leitvorrichtung.

J. Berechnung von Luftschrauben.

IV. Zusammenwirken von Luftschraube und Flugzeug.

K. Die Luftschraube bei Anstellung und Drehbewegung des Flugzeugs und unter Einfluß von Flügel und Rumpf.

Anhang.

I. Allgemeines von der Luftschraube.

A. Geometrie der Luftschraube.

1. Die Gestalt der Luftschraube.

a) Fortbewegung der Luftschraube und die Luftschraubenachse. Die Luftschraube trägt ihren Namen von der Art der Fortbewegung in der Luft. Diese Bewegung ist eine schraubende; d. h. sie setzt sich zusammen aus einer geradlinigen Bewegung und einer Drehung. Die Drehung erfolgt beim Geradeausflug um die Achse der Luftschraube. Die geradlinige Fortbewegung kann in Richtung der Schraubenachse erfolgen oder schräg dazu geneigt. Eine solche Neigung heißt dann der Anstellwinkel der Luftschraube. Im folgenden wird in der Hauptsache die geradlinige Fortbewegung in Richtung der Schraubenachse behandelt. Doch soll auch, soweit dies möglich und notwendig ist, die Wirkung einer Anstellung behandelt werden. Es wird aber auch noch eine allgemeinere Bewegung zu untersuchen sein, nämlich eine solche, wo die Drehung der Schraube nicht um ihre Achse allein erfolgt, sondern außer der Drehungskomponente um die Luftschraubenachse auch noch eine Drehungskomponente um eine dazu senkrechte Achse vorhanden ist. Man hat es dann also mit einer allgemeinen Kreiselbewegung zu tun. Betrachtet man statt der Bewegung des Flugzeugs gegen die ruhende Luft die Bewegung der Luft relativ zum Flugzeug, welche Vorstellung insbesondere den Untersuchungen einer Schraube in einem Windkanal entspricht, so spricht man auch von einer Anblasgeschwindigkeit der Schraube und ebenso von einer geraden oder schrägen Anblasung.

Der schraubenden Bewegung entspricht auch die Gestalt der Luftschraube.

b) Durchmesser und Flügelzahl. Der Abstand der Flügelenden von der Luftschraubenachse ist der Luftschraubenaußenradius R. Das Doppelte davon nennt man den Luftschraubendurchmesser D (Abb. 1).

Als Flügelzahlen $\mathfrak{z}$ sind gebräuchlich $\mathfrak{z} = 2$, $\mathfrak{z} = 3$ und $\mathfrak{z} = 4$. Es erscheint aber nicht ausgeschlossen, daß für gewisse Zwecke auch noch größere Flügelzahlen in Erwägung gezogen werden können. Auch die einflügelige Schraube kann unter Umständen Beachtung verdienen, da sie neben einigen konstruktiven Schwierigkeiten, wie ihrer Auswuchtung, doch auch Vorteile verspricht, welche eben in der Einzahl des Flügels beruhen.

Die üblichen Durchmesser liegen zwischen 2,20 und 3,50 m, doch kommen auch Schrauben mit kleinerem Durchmesser bis herunter auf 1,50 m und mit größerem Durchmesser bis auf 6,00 m beim Fliegen zur Verwendung. Bei den kleineren Schrauben liegt die Notwendigkeit der Verwendung von mehr als zwei Flügeln im allgemeinen nicht vor. Die großen Schrauben haben jedoch meist mehr als zwei Flügel. Die Größe des Durchmessers ist im allgemeinen durch bauliche Umstände des Flugzeugs, bei welchem die Schraube zur Verwendung kommen soll, nach oben hin beschränkt, da ein gewisser Abstand f der Flügelspitze vom Erdboden beim Starten aus Sicherheitsgründen nicht unterschritten werden kann. Diese im allgemeinen verlangte Bodenfreiheit beträgt etwa $f = 0{,}40$ m (Abb. 2). Sie ist bedingt durch Unebenheiten und Bewuchs der Flugplätze und die Durchfederung des Fahrgestells beim Landen. Andererseits spielt aber auch das Gewicht und unter Umständen das Trägheitsmoment bei der Wahl des Durchmessers, wenigstens bei größeren Schrauben, eine Rolle.

Abb. 1. Erläuterung von Luftschraubenradius R, Luftschraubendurchmesser D und Schraubenkreisfläche F_s.

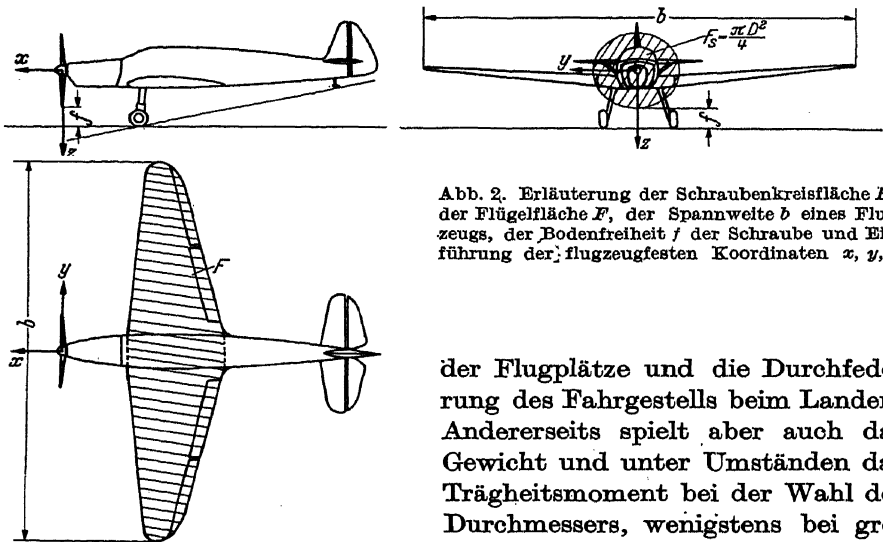



Abb. 2. Erläuterung der Schraubenkreisfläche F_s, der Flügelfläche F, der Spannweite b eines Flugzeugs, der Bodenfreiheit f der Schraube und Einführung der flugzeugfesten Koordinaten x, y, z.

In der Hauptsache wird aber der Luftschraubendurchmesser nach aerodynamischen Gesichtspunkten gewählt, deren Darlegung als eine Hauptaufgabe des vorliegenden Buches zu betrachten ist. Als ein

wichtiges Maß ist hierbei das Verhältnis der Schraubenkreisfläche $F_s = \frac{\pi}{4} D^2$ zur Flügelfläche F des Flugzeugs, das Kreisflächenverhältnis

$$\varphi = \frac{\frac{\pi}{4} D^2}{F} = \frac{F_s}{F}, \qquad (1,1)$$

anzusehen (Abb. 2) [Lit. 8].

c) Flügelprofil und Steigung. Ein zur Schraubenachse konzentrischer Zylinder vom Radius $r < R$ schneidet die Schraubenflügel. Dieser Schnitt heißt das Flügelprofil im Radius r. Wickelt man einen solchen Zylinderschnitt ab, so erhält man eine regelmäßige Reihe von immer gleichen Profilen, die man mit Profilreihe oder mit Profilgitter bezeichnet (Abb. 3). Der gegenseitige Abstand dieser Profile heißt die Teilung des Profilgitters. Sie ist

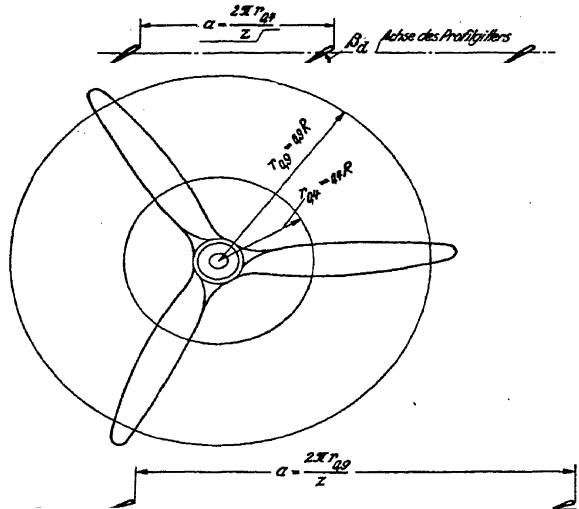



Abb. 3. Entstehung der Profilgitter durch Abwicklung der Zylinderschnitte.

$$a = \frac{2\pi r}{\;} \qquad (1,2)$$

Die geradlinige Verbindung aller Profile des Gitters heißt die Gitterachse. Die Gitterachse ist also die Abwicklung des Schnitts der Schraubenkreisebene mit dem Zylinder.

Die Profile eines solchen Gitters werden nun am meisten gekennzeichnet durch die Profiltiefe t und durch die Neigung β_s ihrer Sehne gegen die Gitterachse, den sog. Steigungswinkel.

Bei der Definition der Profilsehne für aerodynamische Zwecke geht man zweckmäßig von der Definition der Profilmittellinie aus. Die Profilmittellinie ist der Ort der Mittelpunkte der dem Profil einbeschriebenen Kreise und dessen stetige Verlängerung bis zum senkrechten Schnitt mit dem Krümmungsscheitel der Profilnase (Abb. 4). Die Profilsehne ist dann die Sehne dieser Profilmittellinie, d. h. die geradlinige Verbindung des vorderen und hinteren Endpunktes der Profilmittellinie, also der Profilnase und der Abflußkante.

Ist β_s der Neigungswinkel der Profilsehne gegen die Gitterachse bzw. gegen die Schraubenkreisebene, so ist die Sehnensteigung

$$H_s = 2\pi r \operatorname{tg} \beta_s. \qquad (1,3)$$

Unter der Profiltiefe t oder Blattbreite kann man die Länge t_s der Profilsehne verstehen.

Damit ist das Teilungsverhältnis des Profilgitters zu

$$\mathfrak{T} = \frac{a}{t} \tag{1,4}$$

festgelegt.

Die Gestalt des Profils selbst wird am besten beschrieben durch die Gestalt der Profilmittellinie und den Dickenverlauf. Die Be-

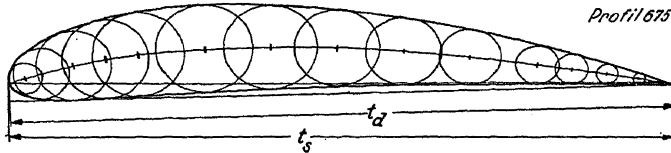



Abb. 4. Ermittlung der Mittellinie eines Profils und Erläuterung der Profilsehne und der Druckseitentangente. Profiltiefe $t \sim t_d$ und Sehnenlänge t_s sind nur vernachlässigbar wenig voneinander verschieden.

schreibung des Profils und seiner Verwendung bei der Schraube ist so am zweckmäßigsten für die aerodynamische Untersuchung.

Für die Herstellung und Nachprüfung einer Schraube sind jedoch andere Festlegungen zweckmäßiger. Statt der Sehnensteigung β_s führt man die Druckseitensteigung β_d ein. Bei Profilen mit teilweise konkaver Druckseite ist die Druckseitensteigung durch die Doppeltangente an die Druckseite gegeben.

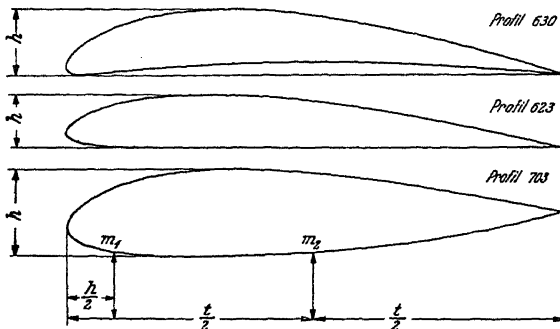



Abb. 5. Erläuterung der Druckseitentangente für ein Profil mit konkaver Druckseite, gerader Druckseite und konvexer Druckseite und der Profilhöhe h.

Bei Profilen mit größtenteils gerader Druckseite ist die Steigung des geraden Druckseitenteils maßgebend. Bei Profilen mit konvexer Druckseite ist die Festlegung etwas umständlicher. Man benutzt dabei die Steigung einer Geraden, welche von zwei Profilpunkten m_1 und m_2 (Abb. 5) den gleichen Abstand hat. Diese Profilpunkte liegen um $h/2$ und $t/2$ auf der Profildruckseite gemessen hinter der Profilnase. Als Profiltiefe t gilt bei diesen Festlegungen die Projektion t_d des Profils auf die Druckseitenrichtung. Praktisch ist also die Profiltiefe t die größte Projektion des Profils. Unter Profilhöhe h hat man die kleinste Projektion des Profils zu verstehen. Mit β_d als Neigungswinkel der Druckseitenrichtung gegen die Schraubenkreisebene wird die Druckseitensteigung $H_d = 2\pi r \operatorname{tg}\beta_d$. Statt der Bestimmung des Profils

als Zylinderschnitt ist es praktisch zulässig, das Profil als Schnitt mit einer Ebene senkrecht zur Schraubenkreisebene und zur Normalen von der Flügelspitze nach der Schraubenachse oder zur Schraubenflügelachse zu bestimmen; der Unterschied gegenüber der genaueren Festlegung ist nämlich meistens vernachlässigbar, da die Blattbreite der Luftschraube nur klein ist im Vergleich zum örtlichen Radius, wenigstens in den wichtigen Schraubenflügelteilen, welche größere Entfernung von der Schraubenachse haben, und da die Flügelmittellinie im allgemeinen gerade ist oder nur wenig davon abweicht.

d) Flügelmittellinie und Koordinatensystem. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Profile kann als Flügelmittellinie bezeichnet werden. Im allgemeinsten Falle ist die Flügelmittellinie gekrümmt. Es möge nun ein Koordinatensystem für die Schraube gewählt werden.

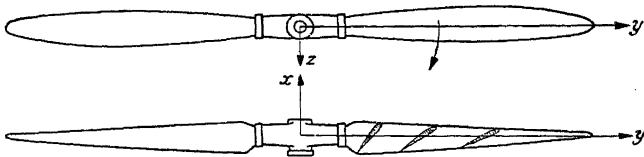



Abb. 6. Einführung der Koordinaten x, y, z einer Schraube mit geradachsigen Flügeln. Die gezeichnete Schraube ist eine rechtsgängige Zugschraube.

Als x-Achse dient die Schraubenachse. Als y-Achse dient die Flügelmittellinie, wenn sie gerade ist, senkrecht zur Schraubenachse steht und diese schneidet. Die z-Achse ist dann die zur xy-Ebene senkrechte Achse (Abb. 6).

Die $+x$-Achse zeigt also in Flugrichtung. In der Nullage der Schraube zeigt der betrachtete Flügel und damit die $+y$-Achse nach rechts,

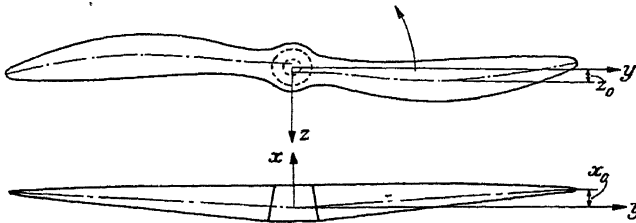



Abb. 7. Einführung der Koordinaten x, y, z einer Schraube mit Flügeln beliebig gestalteter Achse.

wenn man in Flugrichtung sieht, und die $+z$-Achse nach unten. Wir haben also damit ein rechtsschraubendes Koordinatensystem gewählt. Bei Betrachtung des Flugzeugs von vorne, also entgegen der Flugrichtung, zeigt die $+y$-Achse nach links. Ist die Flügelmittellinie gekrümmt oder steht sie bzw. ihre stetige Verlängerung nicht senkrecht zur Schraubenachse oder schneidet sie diese nicht, so kann man als z-Achse eine Achse festlegen, welche zur Schraubenachse senkrecht

steht und die Flügelmittellinie bzw. ihre Verlängerung senkrecht schneidet. Als y-Achse hat dann die Senkrechte zur x-Achse und z-Achse in deren Schnittpunkt zu gelten (Abb. 7).

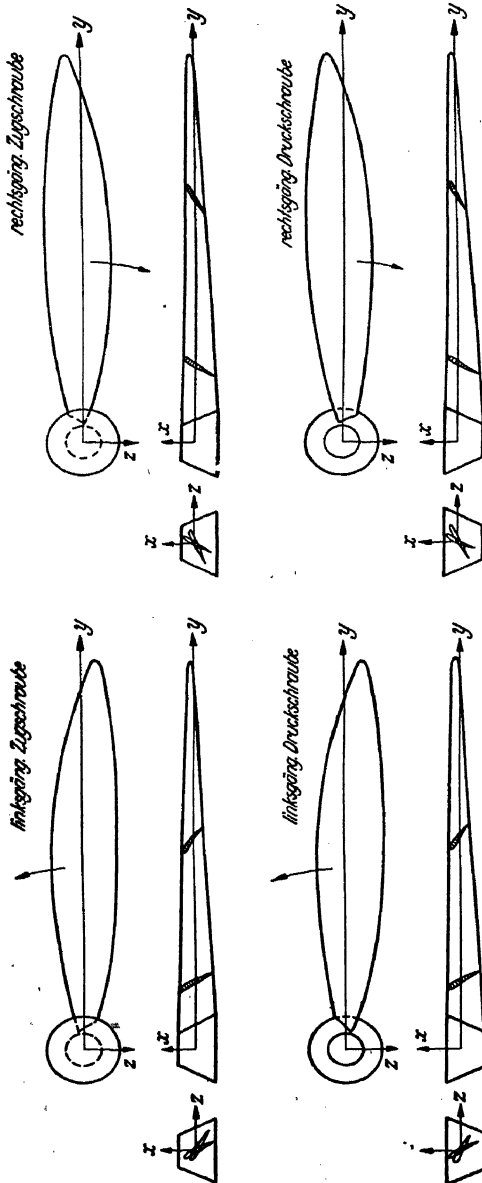



Abb. 8. Unterscheidung der Luftschrauben in rechtsgängige und linksgängige Zugschrauben und Druckschrauben.

Als Vorneigung x_0 der Flügelmittellinie in irgendeinem Punkte in Flugrichtung hat nun der Abstand der Projektion dieses Punktes in die xy-Ebene von der y-Achse zu gelten. Als Vorneigung z_0 in der Schraubenkreisebene, in der yz-Ebene also, hat entsprechend zu gelten der Abstand der Projektion des Punktes in die yz-Ebene von der y-Achse. Die Vorneigung hat deshalb Bedeutung, weil sie eine Verringerung der festigkeitsmäßigen Beanspruchung ermöglicht [Lit. 242].

Die y-Achse kann als Flügelachse bezeichnet werden. Als Sehne des Schraubenflügels hat zu gelten die Verbindungsgerade zwischen dem beschriebenen Koordinatenanfangspunkt und der Schraubenflügelspitze, dem äußeren Ende der Flügelmittellinie. Ist die Vorneigung längs des Schraubenflügels überall Null, so fallen Flügelachse, Flügelmittellinie und Flügelsehne zusammen.

Bei theoretischen Überlegungen ist es oft zweckmäßig, den Schraubenradius R als Längeneinheit zu benutzen, oder was das gleiche ist, durch Division mit R die Längen dimensionslos zu machen.

e) Der Begriff der rechtsgängigen und der linksgängigen Schraube. Man hat bei den Luftschrauben linksgängige und rechtsgängige zu unterscheiden. Rechts-

gängig sind jene, welche in Flugrichtung gesehen sich im Uhrzeigersinne drehen, linksgängig sind jene, welche sich im entgegengesetzten Sinne drehen (Abb. 8).

r	h	t	β	x_0	z_0	a	b	c	d
300	61	193	40°00'	1	1	70,0	60,2	75,2	85,0
400	54,5	189	35°45'	2,2	1,7	43,1	56,2	68,0	90,3
500	48	189	32°00'	3,3	2,4	45,7	51,6	62,3	95,5
600	43	189	28°20'	4,5	3,3	75,8	44,4	55,0	99,8
700	39	186	25°05'	6,0	4,3	74,1	44,9	47,0	102,8
800	35	192	22°40'	7,7	5,4	73,4	42,5	38,9	104,0
900	31	184	19°25'	9,5	6,7	70,7	39,8	29,8	102,8
1000	27,5	173	17°45'	11,7	8,1	65,3	37,8	20,6	101,4
1100	23,5	160	15°00'	14,2	9,7	57,7	35,7	14,6	96,6
1200	20,5	144	13°30'	16,8	11,5	45,0	34,4	7,2	90,5
1300	16,5	120	12°30'	20,0	13,7	36,5	33,2	4,5	80,5
1400	11	90	11°40'	23,8	16,0	24,7	32,5	-9,8	65,3
1450	7	62	11°20'	26,0	17,5	18,0	32,3	-12,2	50,3

Abb. 9. Beispiel der Konstruktionszeichnung einer rechtsgängigen Zugschraube.
Oben: Vorderriß mit Flügelumriß. Mitte: Seitenriß mit Dickenverlauf. Unten links: Spitzenriß. Unten rechts: Erläuterung der Maße. Im Original werden im allgemeinen Vorder- und Seitenriß im Maßstabe 1:2,5, Spitzenriß im Maßstabe 1:1 gezeichnet.

Weiter unterscheidet man, je nachdem, in Flugrichtung gesehen, die Rückseite oder die Vorderseite der Schraube die Antriebsseite der Schraube ist, Zugschrauben und Druckschrauben.

Ein Motor einschließlich gegebenenfalls des Getriebes, welcher bei Zugschraubenanordnung also eine rechtsgängige Schraube verlangt, braucht bei Druckschraubenanordnung eine linksgängige und umgekehrt.

f) Symmetrische und unsymmetrische Schrauben. Sind alle Flügel einer Schraube einander gleich und liegen alle Flügelachsen in einer Ebene, der Schraubenkreisebene, und schließen diese gleiche Winkel miteinander ein, so spricht man von symmetrischen Schrauben, andernfalls von unsymmetrischen.

g) Die Schraubenentwurfszeichnung. Um Verwechslungsmöglichkeiten zwischen Links- und Rechtsgängigkeit beim Lesen einer Schraubenentwurfszeichnung zu vermeiden, ist es zweckmäßig, sich auf eine bestimmte Art der Darstellung zu einigen. Ein Muster für die Darstellung wird deshalb hier durch die Abb. 9 für eine rechtsgängige Zugschraube gegeben. Diese Darstellung entspricht den DIN-Normen.

Im oberen Teile der Zeichnung ist die Ansicht der Schraube in Flugrichtung gesehen enthalten. Entsprechend unseren Festlegungen ist das gezeichnete Schraubenblatt in Richtung der y-Achse nach rechts gerichtet. Die z-Achse zeigt nach unten. Der Drehsinn der Schraube entspricht in der Zeichnung der Bezeichnung der Gängigkeit. Für die dargestellte rechtsgängige Schraube zeigt also die Eintrittskante nach unten. Aus Zweckmäßigkeitsgründen wurde gestrichelt die Abwicklung des Schraubenblattes dargestellt und ausgezogen die Ansicht in Flugrichtung.

Im mittleren Teile der Zeichnung ist die Ansicht der Schraube von oben wiedergegeben. Die x-Achse zeigt nach vorne. Diese Ansicht entsteht nach dem Gebrauch der darstellenden Geometrie durch Klappen der xy-Ebene. Aus Zweckmäßigkeitsgründen ist wieder gestrichelt der Dickenverlauf des Schraubenblattes und ausgezogen der Umriß der Ansicht von oben dargestellt.

Ansicht in Flugrichtung und von oben müssen im allgemeinen in verkleinertem Maßstabe wiedergegeben werden.

Im linken unteren Teil wird im Maßstabe 1 : 1 das Schraubenblatt in Richtung der Schraubenflügelachse gegen die Nabe zu gesehen dargestellt und zwar durch die Profilschnitte, welche als Hilfslinien dünn ausgezogen werden. Die Einhüllenden dieser Schnitte würden die Ansicht des Schraubenblattes von der Flügelspitze her gesehen darstellen und sind stark auszuziehen, wenn man auf ihre Darstellung nicht verzichten will.

In der Mitte des unteren Teils sind die Maßbezeichnungen erklärt. Rechts unten ist Raum für die Beschriftung und darüber eine Maßzahlentafel.

Wie sich eine linksgängige Zugschraube oder rechtsgängige und linksgängige Druckschrauben darstellen ließen, ist durch Vergleich mit der Abb. 8 leicht zu erkennen [Lit. 292].

2. Geometrische Eigenschaften der Flügelprofile.

a) Gestalt der Flügelprofile. Die benutzten Flügelprofile sind im allgemeinen recht schlank, soweit es sich nicht um die nabennahen Flügelteile handelt ($r > 0{,}3\,R$). Das Dickenverhältnis schwankt bei Holzluftschrauben zwischen $h/t = 0{,}07$ und $0{,}20$, bei Metalluftschrauben zwischen $h/t = 0{,}05$ und $0{,}15$ (Abb. 10). Auf der Lufteintrittsseite sind die Flügelprofile gut abgerundet, auf der Abflußseite verhältnismäßig spitz zulaufend, jedoch ganz am Ende aus Herstellungsgründen noch etwas abgerundet. Nach der Schraubenvorderseite, der Profilsaugseite zu, sind die Profile immer konvex, auf der Schraubenrückseite, der Profildruckseite, sind sie meist gerade oder etwas hohl. Bei Schrauben hoher Umfangsgeschwindigkeit sind gegen die Schraubenflügelenden zu die Profilsaugseiten jedoch zweckmäßig ebenfalls konvex, so daß die Profile unter Umständen schon fast symmetrisch werden. Beim Übergang der Flügel in die Nabe sind die Profile meist allseits konvex und verhältnismäßig oft recht dick.

Abb. 10. a) Profil einer ausgeführten Holzluftschraube auf $r/R \sim 0{,}7$. b) Profil einer ausgeführten Metalluftschraube auf $r/R \sim 0{,}7$.

Die Profilmittellinie ist von den äußeren Flügelteilen nach den inneren Flügelteilen zu im allgemeinen zunehmend gekrümmt.

b) Profilquerschnittsfläche. Zur Berechnung von Schraubengewicht und Schraubenträgheitsmoment sowie zur Berechnung der Zentrifugalkräfte ist die Kenntnis des Profilquerschnitts nötig. Trotz der Mannigfaltigkeit der Profilformen ist jedoch die Querschnittsfläche F_p der Profile recht gut allgemein abzuschätzen:

$$F_p = \psi_1 \cdot th. \tag{2, 1}$$

Hierbei bedeutet ψ_1 den „Völligkeitsgrad" der Profilquerschnittsfläche bezogen auf das umbeschriebene Rechteck. Für gebräuchliche Profile ist

$$\psi_1 \backsim 0{,}62 \div 0{,}72\,.$$

Denkt man sich senkrecht zur Druckseite ein Profil mit gerader Druckseite in schmale Streifen zerlegt und diese Streifen nach ihrer Höhe fortlaufend geordnet neu über der Sehne aufgetragen oder, was das gleiche ergibt, zerlegt man das Profil parallel zur Druckseite in Streifen und trägt man die jeweilige Länge als Abszisse auf (Abb. 11), so kann man die Berandung der neu entstehenden Figur durch eine Gleichung annähern:

$$\frac{y}{h} = 1 - \left(\frac{x}{t}\right)^n. \tag{2, 2}$$

Damit ist

$$F_p = ht\int_0^1 \left(\frac{y}{h}\right) \cdot d\left(\frac{x}{t}\right) = ht\int_0^1 \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^n\right) d\left(\frac{x}{t}\right) = h\,t\,\psi_1 .$$

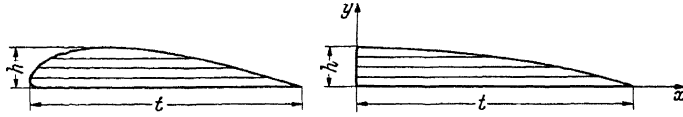



Abb. 11. Profil mit gerader Druckseite und Verwandlung in eine flächengleiche Kurve gleicher Tiefenverteilung der Höhe nach.

Somit wird

$$\psi_1 = \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^n\right) d\left(\frac{x}{t}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} . \tag{2, 3}$$

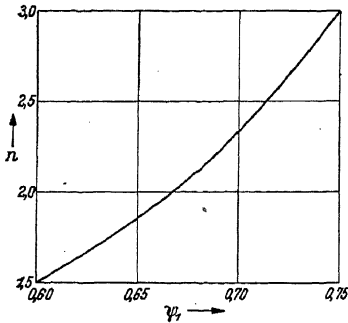



Abb. 12. Zusammenhang zwischen dem Völligkeitsgrad ψ_1 des Profilquerschnitts mit dem Exponenten n.

Der Zusammenhang zwischen ψ_1 und n ist durch Abb. 12 veranschaulicht.

Für gebräuchliche Profile ist also

$$n = \frac{\psi_1}{1 - \psi_1} \backsim 1{,}6 \div 2{,}6 \tag{2, 4}$$

zu setzen.

c) Schwerpunkt der Profile. Zur Bestimmung der Flügelachse und zur Berechnung der Biegebeanspruchungen benötigt man die Kenntnis der Profilschwerpunkte. Den Abstand des Schwerpunktes von der Druckseite kann man bei einem Profil mit gerader Druckseite praktisch genau genug abschätzen. Zunächst bestimmt man das Flächenmoment um die Druckseite als Achse, die hierzu als x-Achse dienen möge. Dieses ist mit Einführung von ψ_2

$$M_x = \psi_2 \frac{th^2}{2} = \frac{th^2}{2}\int_0^1 \left(\frac{y}{h}\right)^2 d\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{th^2}{2}\int_0^1 \left(1 - 2\left(\frac{x}{t}\right)^n + \left(\frac{x}{t}\right)^{2n}\right) d\left(\frac{x}{t}\right) . \tag{2, 5}$$

Somit wird

$$\psi_2 = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} . \tag{2, 6}$$

Der Schwerpunkt $\odot$ hat von der Druckseite den Abstand

$$y_\odot = \frac{M_x}{F} . \tag{2, 7}$$

Es ist also

$$y_\odot = \frac{n}{2n+1} h = \frac{\psi_1}{1+\psi_1} h \quad \text{und} \quad h - y_\odot = \frac{n+1}{2n+1} h = \frac{1}{1+\psi_1} h . \tag{2, 8}$$

Der Zusammenhang zwischen $y_\odot/h$ und ψ_1 ist durch Abb. 13 wiedergegeben.

Der Profilschwerpunkt der Profiltiefe nach muß liegen zwischen der halben Tiefe und der Lage der größten Profildicke x_d. Er liegt mit guter Annäherung um

$$x_m = x_{\odot} - x_d = \frac{1}{2}\,\frac{1+n}{2+n}(t - 2x_d) \quad (2,9)$$

hinter der Stelle der größten Dicke. Zu dieser Beziehung gelangt man, indem man die Völligkeit des vorderen und hinteren Profilteils gleich setzt, was man mit meist hinreichender Annäherung tun darf. Der Schwerpunkt liegt dann um

$$\left.\begin{aligned} x_{\odot} &= \frac{1}{2}\,\frac{1+n}{2+n}(t - 2x_d) + x_d \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-\psi_1}\,t + \frac{1-\psi_1}{2-\psi_1}\,x_d \end{aligned}\right\} \quad (2,10)$$

hinter der Profilnase.

Der Zusammenhang zwischen $x_{\odot}/t$ und ψ_1 bzw. x_d/t ist in Abb. 14 dargestellt.

Abb. 13. Zusammenhang zwischen dem Völligkeitsgrad ψ_1 des Querschnitts eines Profils mit gerader Druckseite mit der Hochlage $y_{\odot}/h$ des Profilschwerpunkts.

Die Bestimmung der Lage der größten Profildicke stößt praktisch auf Schwierigkeiten; es handelt sich dabei um die Bestimmung des Berührungspunktes einer

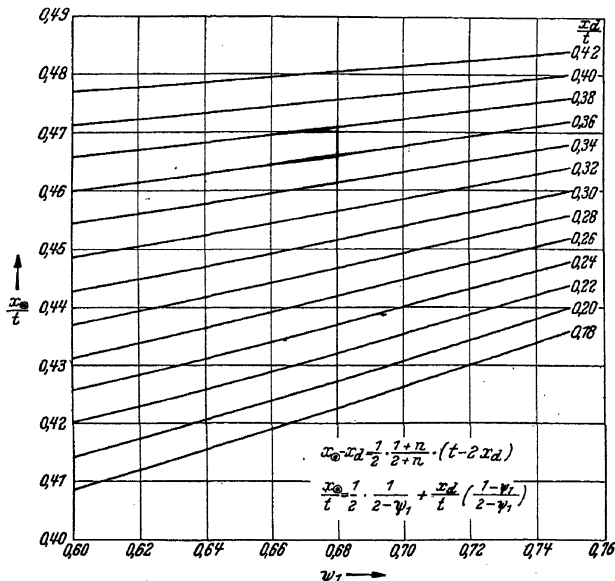



Abb. 14. Zusammenhang zwischen dem Völligkeitsgrad ψ_1 des Profilquerschnitts und der Rücklage x_d/t der Stelle der größten Dicke mit der Rücklage $x_{\odot}/t$ des Profilschwerpunkts.

Tangente parallel zur Druckseite. Man könnte einige parallele Sehnen zeichnen, den Ort ihrer Mittelpunkte bis zum Schnitt mit der Profilsaugseite verlängern. Diese umständliche Konstruktion kann auf folgende Weise umgangen werden: Man zeichnet das um das Profil beschriebene Rechteck, dessen Seiten h und t sind, bestimmt die vor der dicksten Stelle gelegene Fläche ΔF zwischen Rechteck und Profil (Abb. 15). Dann ist mit hinreichender Genauigkeit

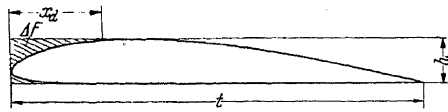



Abb. 15. Angenäherte Bestimmung der Rücklage $x_d = \frac{1}{1-\psi_1} \cdot \frac{\Delta F}{h}$ der Stelle der größten Dicke mit Hilfe des umbeschriebenen Rechtecks.

$$x_d = \frac{1}{1-\psi_1} \cdot \frac{\Delta F}{h} = (n+1)\frac{\Delta F}{h}. \qquad (2, 11)$$

Da wir einen Ersatz des Profils durch zwei Parabelbogen $n$ter Ordnung mit der Scheitelabszisse x_d vorgenommen haben, so ergibt das auf die zuletzt beschriebene Weise bestimmte angenäherte x_d bessere Ergebnisse für die Schwerpunktslage $x_\odot$ als die tatsächliche Rücklage x_d der Stelle der größten Dicke.

d) Hauptträgheitsmomente der Profile und Widerstandsmoment gegen Biegung. Zur Bestimmung der Biegebeanspruchungen ist auch die Kenntnis der Trägheitsmomente um die Schwerpunktsachsen nötig. Zunächst möge das Trägheitsmoment um die Druckseite eines Profils mit gerader Druckseite als Achse bestimmt werden. Es ist

$$J_x = \psi_3 \frac{t h^3}{3} = \frac{t h^3}{3}\int_0^1 \left(\frac{y}{h}\right)^3 d\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{t h^3}{3}\int_0^1 \left(1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^n + 3\left(\frac{x}{h}\right)^{2n} - \left(\frac{x}{h}\right)^{3n}\right) d\left(\frac{x}{t}\right). \quad (2, 12)$$

Somit wird

$$\psi_3 = 1 - \frac{3}{n+1} + \frac{3}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} = \frac{6n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)}. \quad (2, 13)$$

Das auf eine zur Druckseite parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse bezogene Trägheitsmoment ist

$$J_{\odot x} = J_x - y_\odot^2 F,$$

$$J_{\odot x} = \frac{t h^3}{3}\left(\psi_3 - 3\psi_1\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2\right) = \frac{t h^3}{3}\left(\frac{6n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} - \frac{3n^3}{(n+1)(2n+1)^2}\right),$$

$$J_{\odot x} = t h^3 \frac{n^3}{(2n+1)^2(3n+1)} = t h^3 \frac{\psi_1^3}{(1+\psi_1)^2(1+2\psi_1)}. \quad (2, 14)$$

Der Zusammenhang zwischen $J_{\odot x}/t h^3$ und ψ_1 ist durch Abb. 16 wiedergegeben.

Das Trägheitsmoment um die dazu senkrechte Achse ist, da die gebräuchlichen Profile recht schlank sind, um ein Vielfaches größer

als das soeben berechnete. Schätzungsweise ist daher in erster Näherung

$$J_{\odot y} \backsim \left(\frac{t}{h}\right)^2 J_{\odot x}.$$

Besser ist jedoch zu schreiben

$$J_{\odot y} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{t}{h}\right)^2 J_{\odot x}. \quad (2, 15)$$

Der Berichtigungsfaktor k wird im folgenden noch berechnet werden. Er ist in Abb. 24 dargestellt.

Die Richtung der großen Achse der Trägheitsellipse muß deshalb mit hinreichender Annäherung mit der Parallelen zur Druckseite bzw. der Profilsehne zusammenfallen.

Bei der Berechnung auf Biegebeanspruchungen kommen also praktisch nur die Komponenten der Biegemomente um diese Achse in Betracht. Das Widerstandsmoment gegen Biegung ist damit

$$\left.\begin{aligned} W_s &= \frac{J_{\odot x}}{y_\odot} \\ &= th^2 \frac{n^2}{(2n+1)(3n+1)} \\ &= th^2 \frac{\psi_1^2}{(1+\psi_1)(1+2\psi_1)} \end{aligned}\right\} \quad (2, 16)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} W_d &= \frac{J_{\odot x}}{h - y_\odot} \\ &= th^2 \frac{n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} \\ &= th^2 \frac{\psi_1^3}{(1+\psi_1)(1+2\psi_1)}. \end{aligned}\right\} \quad (2, 17)$$

W_s/th^2 und W_d/th^2 sind in Abb. 17 in Abhängigkeit von ψ_1 dargestellt.

Abb. 16. Zusammenhang zwischen Völligkeitsgrad ψ_1 des Profilquerschnitts mit dem Trägheitsmoment $J_{\odot x}/th^3$.

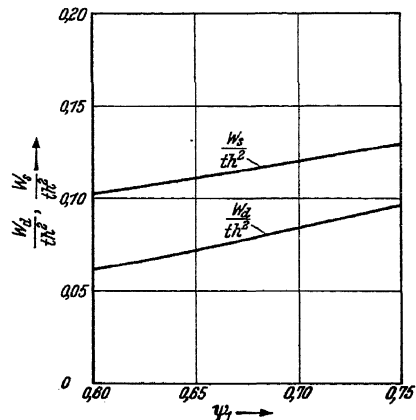



Abb. 17. Zusammenhang zwischen Völligkeitsgrad ψ_1 des Profilquerschnitts mit den Widerstandsmomenten gegen Biegung W_s/th^2 und W_d/th^2.

e) Widerstandsmoment der Profile gegen Verdrehung. Die Verdrillung der Schraubenflügel ist meist weniger vom Standpunkt der Festigkeit aus zu kennen wichtig als wegen ihrer aerodynamischen Folgen, da durch sie gerade die Steigungen am Flügelende, wo sie von besonders großer Bedeutung sind, verändert werden.

Die exakte Berechnung der Widerstandsmomente gegen Verdrehung ist jedoch sehr umständlich. Praktisch genügt meist eine Annäherungsformel. Ist das Widerstandsmoment gegen Verdrehung eines Rechtecks mit den Seiten t und h J_{d_R}, das einer Ellipse mit den Achsen t und h J_{d_E} und ist die Völligkeit des Profilquerschnitts ψ_1, so ist folgende lineare Interpolation hinreichend:

$$J_d = J_{d_R} - \frac{1-\psi_1}{1-\pi/4}\,(J_{d_R} - J_{d_E})\,. \tag{2,18}$$

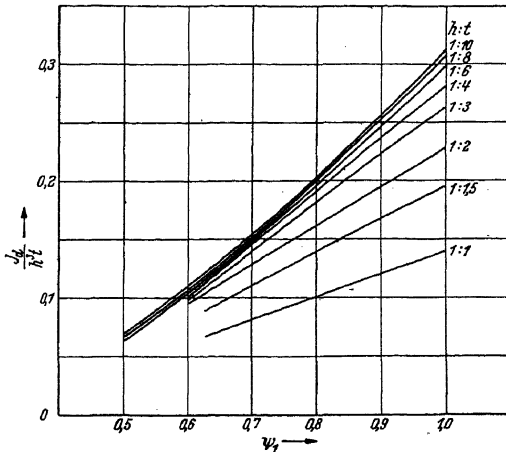



Abb. 18. Zusammenhang zwischen Völligkeitsgrad ψ_1 der Profilquerschnitte und der Dickenverhältnisse h/t mit den Widerstandsmomenten J_d gegen Verdrehung.

J_d in Abhängigkeit von ψ_1 und h/t ist durch Abb. 18 dargestellt [Lit. 228, 229, 245].

Die Verdrillung ϑ, d. i. die Verdrehung bezogen auf die Längeneinheit, ist damit

$$\vartheta = \frac{M_d}{J_d \cdot G}\,, \tag{2,19}$$

wobei M_d das Drillmoment, G der Gleitmodul des Schraubenwerkstoffes ist.

f) Trägheitsellipse und Zentrifugalmoment der Profile. Sind die Achsen I und II die durch den Profilschwerpunkt gehenden Hauptträgheitsachsen, J_I und J_{II} ($J_I < J_{II}$) die darauf bezogenen Trägheitsmomente und trägt man $1/\sqrt{J_I}$ und $1/\sqrt{J_{II}}$ auf diesen Achsen als Längen ab, so kann man aus $1/\sqrt{J_I}$ und $1/\sqrt{J_{II}}$ als Halbachsen die Trägheitsellipse konstruieren. Das Trägheitsmoment bezogen auf eine beliebige andere durch den Profilschwerpunkt gehende Achse ist dann

$$J = J_I \cos^2\alpha + J_{II} \sin^2\alpha\,,$$

wobei α der Winkel ist, den diese Achse im positiven Sinne mit der ersten Hauptträgheitsachse einschließt.

Das Zentrifugalmoment ist auf eine solche Achse als ξ-Achse bezogen bekanntlich

$$J_{\xi\eta} = \int\!\!\int \xi\eta\, d\xi\, d\eta = -\tfrac{1}{2}(J_{II} - J_I)\sin 2\alpha\,.$$

Es ist aber

$$J_I \sim J_{x\odot}\,, \qquad J_{II} \sim J_{y\odot} = \frac{1}{k}\left(\frac{t}{h}\right)^2 J_{x\odot}\,,$$

so daß damit auch $J_{\xi\eta}$ abgeschätzt werden kann.

$$J_{\xi\eta} \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{t}{h}\right)^2 - 1\right)\sin 2\alpha\, t h^3 \frac{n^3}{(2n+1)^2(3n+1)}$$

oder da $t/h \gg 1$

$$J_{\xi\eta} \sim -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \frac{t^3 h}{k}\frac{n^3}{(2n+1)^2(3n+1)}\,. \tag{2,20}$$

Eine bessere Abschätzung ergibt sich, indem man unter Annahme gleicher Völligkeit der vor und hinter der Stelle größter Dicke liegenden Profilteile außer dem Trägheitsmoment $J_{\odot x}$ auch das Trägheitsmoment $J_{\odot y}$ und das Zentrifugalmoment $J_{\odot xy}$ berechnet. Wir hatten oben gefunden

$$J_{\odot x} = t h^3 \frac{n^3}{(2n+1)^2 (3n+1)} .$$

Für eine durch die Stelle größter Dicke gehende zur Druckseite senkrechte y-Achse wird das Trägheitsmoment des vorderen Profilstückes

$$J_{y_v} = -\frac{x_d^3 h}{3} \int_0^1 \left(\frac{x}{x_d}\right)^3 d\left(\frac{y}{h}\right),$$

oder mit

$$\frac{y}{h} = 1 - \left(\frac{x}{x_d}\right)^n, \qquad -d\left(\frac{y}{h}\right) = n \left(\frac{x}{x_d}\right)^{n-1} d\left(\frac{x}{x_d}\right),$$

$$J_{y_v} = \frac{x_d^3 h}{3} n \int_0^1 \left(\frac{x}{x_d}\right)^{n+2} d\left(\frac{x}{x_d}\right),$$

$$J_{y_v} = \frac{n}{3(n+3)} x_d^3 h .$$

Entsprechend wird für den hinteren Teil mit $x_h = t - x_d$

$$J_{y_h} = \frac{n}{3(n+3)} x_h^3 h$$

und damit

$$J_y = J_{y_v} + J_{y_h} = \frac{n}{3(n+3)} t^3 h \left(\left(\frac{x_d}{t}\right)^3 + \left(1 - \frac{x_d}{t}\right)^3\right).$$

Für eine durch den Schwerpunkt $\odot$ gehende, zur Druckseite senkrechte Achse wird mit $x_m = x_\odot - x_d$

$$J_{\odot y} = J_y - x_m^2 F,$$

also

$$J_{\odot y} = t^3 h \left\{\frac{n}{3(n+3)} \left(\left(\frac{x_d}{t}\right)^3 + \left(1 - \frac{x_d}{t}\right)^3\right) - \frac{n(1+n)}{4(2+n)^2} \left(1 - \frac{2x_d}{t}\right)^2\right\},$$

$$J_{\odot y} = t^3 h \left\{\frac{\psi_1}{3(3-2\psi_1)} \left(\left(\frac{x_d}{t}\right)^3 + \left(1 - \frac{x_d}{t}\right)^3\right) - \frac{\psi_1}{4(2-\psi_1)^2} \cdot \left(1 - \frac{2x_d}{t}\right)^2\right\}. \quad (2,21)$$

Der Zusammenhang zwischen $J_{\odot y}/t^3 h$ und dem Profilvölligkeitsgrad ψ_1 sowie der Lage der größten Dicke x_d/t ist durch Abb. 19 bzw. 20 wiedergegeben.

Für die Druckseite als x-Achse und die dazu senkrecht durch die Stelle der größten Dicke gehende y-Achse wird das Zentrifugalmoment des vorderen Profilstückes

$$J_{xy_v} = -\frac{x_d^2 h^2}{2}\int\left(\frac{x}{x_d}\right)\left(\frac{y}{h}\right)^2 d\left(\frac{x}{x_d}\right),$$

$$J_{xy_v} = -\frac{x_d^2 h^2}{2}\int\left(\frac{x}{x_d}\right)\left(1 - 2\left(\frac{x}{x_d}\right)^n + \left(\frac{x}{x_d}\right)^{2n}\right) d\left(\frac{x}{x_d}\right),$$

$$J_{xy_v} = -\frac{x_d^2 h^2}{2}\int\left(\frac{x}{x_d} - 2\left(\frac{x}{x_d}\right)^{n+1} + \left(\frac{x}{x_d}\right)^{2n+1}\right) d\left(\frac{x}{x_d}\right),$$

$$J_{xy_v} = -\frac{x_d^2 h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right),$$

$$J_{xy_v} = -x_d^2 h^2 \frac{n^2}{4(n+2)(n+1)}.$$

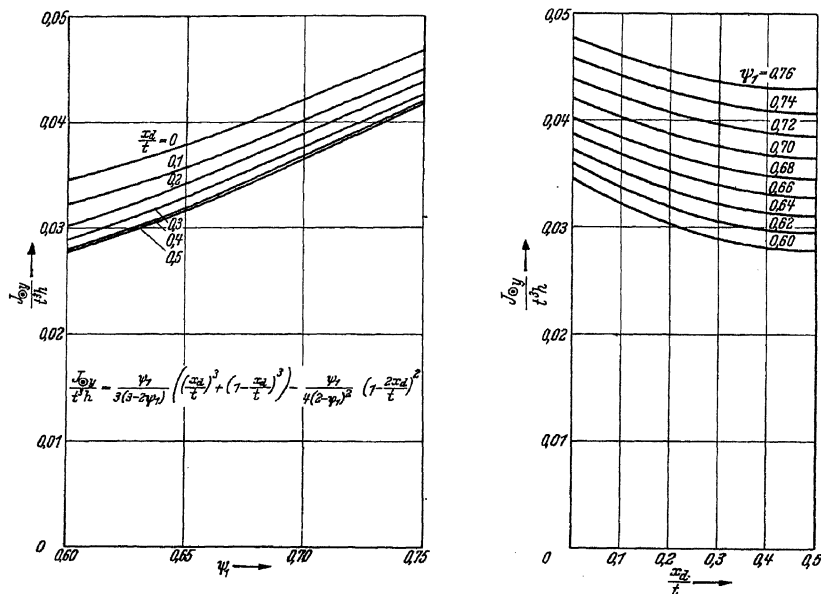



Abb. 19 u. 20. Zusammenhang zwischen Völligkeitsgrad ψ_1 der Profilquerschnitte und der Lage der größten Dicke x_d/t mit dem Trägheitsmoment $J_{\odot y}/t^3 h$.

Entsprechend wird für das hintere Profilstück

$$J_{xy_h} = +x_h^2 h^2 \frac{n^2}{4(n+2)(n+1)}.$$

Und damit

$$J_{xy} = J_{xy_v} + J_{xy_h} = t^2 h^2 \frac{n^2}{4(n+2)(n+1)}\left(\left(\frac{x_h}{t}\right)^2 - \left(\frac{x_d}{t}\right)^2\right),$$

$$J_{xy} = t^2 h^2 \frac{n^2}{4(n+2)(n+1)}\left(1 - \frac{2x_d}{t}\right). \tag{2,22}$$

Für das parallel durch den Schwerpunkt gehende Koordinatensystem wird

$$J_{\odot xy} = x_m y_\odot F - J_{xy},$$

also

$$J_{\odot xy} = t^2 h^2 \left(1 - \frac{2 x_d}{t}\right) \left(\frac{n^2}{2(2+n)(1+2n)} - \frac{n^2}{4(2+n)(n+1)}\right),$$

$$J_{\odot xy} = t^2 h^2 \left(1 - \frac{2 x_d}{t}\right) \frac{n^2}{4(2+n)(2n+1)(n+1)},$$

$$J_{\odot xy} = t^2 h^2 \left(1 - \frac{2 x_d}{t}\right) \frac{\psi_1^2 (1-\psi_1)}{4(2-\psi_1)(1+\psi_1)}. \qquad (2, 23)$$

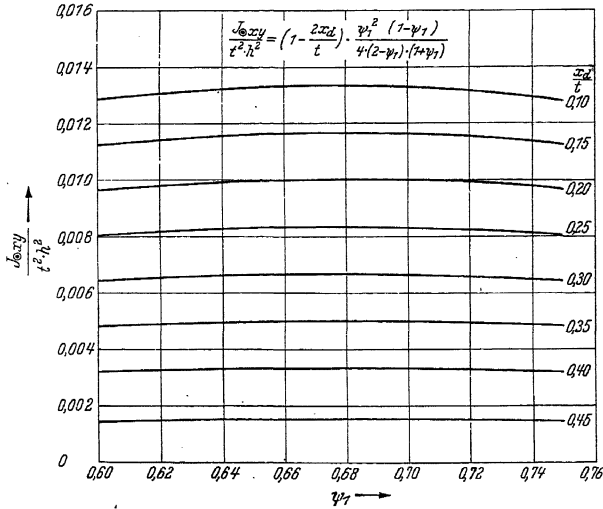



Abb. 21. Zusammenhang zwischen Völligkeitsgrad ψ_1 der Profilquerschnitte und der Lage der größten Dicke x_d/t mit dem Zentrifugalmoment $J_{\odot xy}/t^2 h^2$.

Der Zusammenhang zwischen $J_{\odot xy}/t^2 h^2$ und dem Profilvölligkeitsgrad ψ_1, sowie der Lage der größten Dicke x_d/t ist durch Abb. 21 dargestellt.

Da $J_{\odot xy}$ nicht verschwindet, sind die Hauptträgheitsachsen gegen die Druckseite bzw. ihre Senkrechte um einen Winkel α_0 gedreht:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{J_{\odot xy}}{J_{\odot y} - J_{\odot x}} = \frac{J_{\odot xy}}{J_{\odot y}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{J_{\odot x}}{J_{\odot y}}}. \qquad (2, 24)$$

$\frac{J_{\odot xy}}{J_{\odot y}} \cdot \frac{t}{h}$ und $\frac{J_{\odot x}}{J_{\odot y}} \cdot \frac{t^2}{h^2}$ sind durch Abb. 22 bzw. 23 und Abb. 24 in Abhängigkeit von ψ_1 und x_d/t wiedergegeben.

Die Hauptträgheitsmomente sind

$$\left.\begin{aligned} J_I &= \frac{J_{\odot x} + J_{\odot y}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{\odot y} - J_{\odot x}}{2}\right)^2 + J_{\odot xy}^2}, \\ J_{II} &= \frac{J_{\odot x} + J_{\odot y}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{\odot y} - J_{\odot x}}{2}\right)^2 + J_{\odot xy}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2, 25)$$

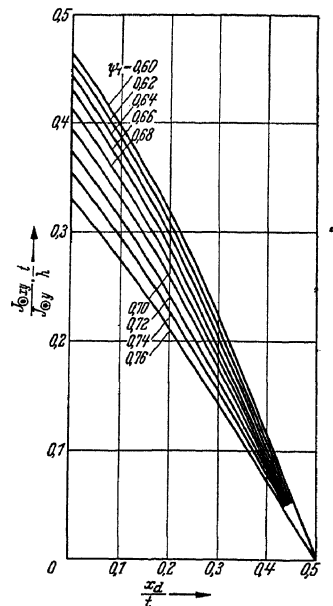
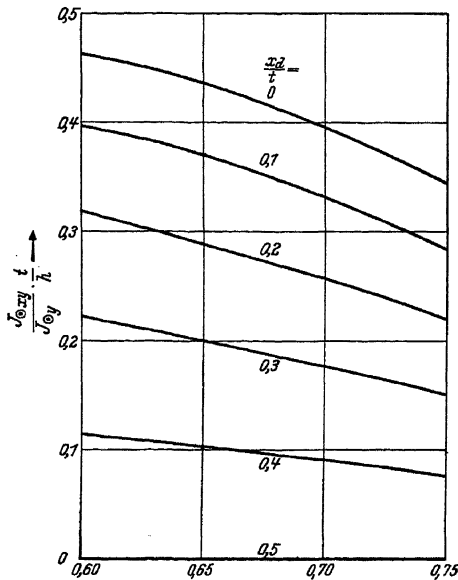



Abb. 22 u. 23. Verhältnis des Zentrifugalmomentes $J_{\odot xy}$ zum Trägheitsmoment $J_{\odot y}$.

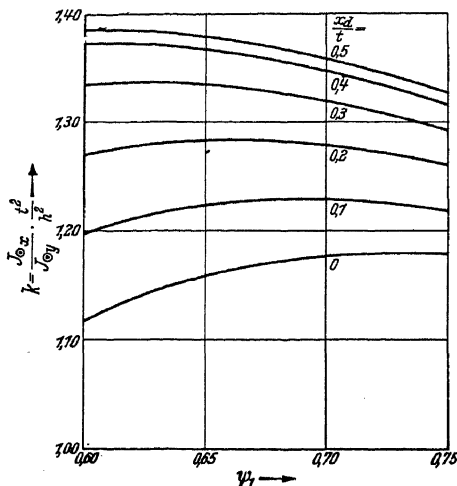



Abb. 24. Verhältnis der Trägheitsmomente $k = J_{\odot x}/J_{\odot y}$.

g) Beispiel für die Ermittlung des Schwerpunktes und der Trägheitsmomente eines Flügelprofils. Um den Gebrauch der abgeleiteten Beziehungen zu erläutern, mögen hier Schwerpunkt und Trägheitsmoment des in Abb. 25 dargestellten Profils bestimmt werden.

Die Profiltiefe beträgt $t = 20$ cm, die Profildicke $h = 4$ cm. Die Querschnittsfläche F ergibt sich durch Planimetrieren zu $F = 55$ cm². Hiermit wird

$$\psi_1 = \frac{F}{th} = 0{,}687 .$$

Nach Abb. 12 wird hiernach

$$n = 2{,}195 .$$

Durch Planimetrieren des zwischen dem Profil und dem ihm umbeschriebenen Rechteck gelegenen Flächenteils ΔF ergibt sich

$$\Delta F = 4{,}3 \text{ cm}^2$$

und damit

$$x_d = \frac{1}{1-\psi_1}\,\frac{\Delta F}{h} = 3{,}45\ \text{cm}, \qquad \frac{x_d}{t} = 0{,}173.$$

Nach dem den gemachten Ausführungen zugrunde gelegten Ersatz des gegebenen Profils durch ein angenähertes, das sich aus zwei Parabelbogen $n$ter Ordnung zusammensetzt, wobei der gemeinsame Scheitel die Abszisse x_d haben soll, ergibt sich das in Abb. 25 eingetragene Ersatzprofil. Die Übereinstimmung ist wohl praktisch ausreichend.

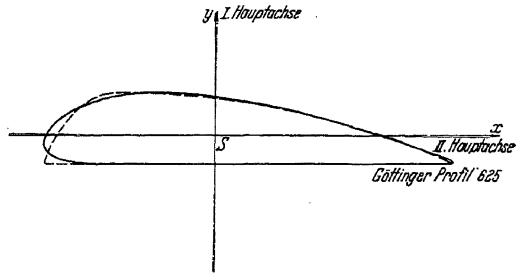



Abb. 25. Beispiel für die Ermittlung des Schwerpunktes und des Trägheitsmomentes eines Profils.

Die Hochlage $y_\odot$ des Schwerpunkts wird entsprechend dem gefundenen $\psi_1 = 0{,}687$ durch Abb. 13 gewonnen:

$$\frac{y_\odot}{h} = 0{,}4072,$$

$$y_\odot = 1{,}63\ \text{cm}.$$

Die Rücklage $x_\odot$ des Schwerpunkts ergibt sich mit Hilfe von $\psi_1 = 0{,}687$, $x_d/t = 0{,}173$ durch Abb. 14:

$$\frac{x_\odot}{t} = 0{,}422,$$

$$x_\odot = 8{,}44\ \text{cm}.$$

Das Trägheitsmoment $J_{\odot x}$ ergibt sich mit Hilfe der Abb. 16:

$$\frac{J_{\odot x}}{t h^3} = 0{,}0481,$$

$$J_{\odot x} = 61{,}7\ \text{cm}^4.$$

Dem entsprechen nach Abb. 17 die Widerstandsmomente gegen Biegung W_s und W_d:

$$\frac{W_s}{t h^2} = 0{,}118, \qquad \frac{W_d}{t h^2} = 0{,}081,$$

$$W_s = 37{,}6\ \text{cm}^3, \qquad W_d = 25{,}9\ \text{cm}^3.$$

Das Widerstandsmoment J_d gegen Verdrehung ist mit $t/h = 5{,}0$ durch Abb. 18 gegeben:

$$\frac{J_d}{t h^3} = 0{,}141,$$

$$J_d = 180{,}5\ \text{cm}^4.$$

Das Trägheitsmoment $J_{\odot y}$ läßt sich mit Hilfe der Abb. 19 bzw. 20 gewinnen:

$$\frac{J_{\odot y}}{t^3 h} = 0{,}0378\,,$$
$$J_{\odot y} = 1200\ \text{cm}^4\,.$$

Das Zentrifugalmoment $J_{\odot xy}$ ergibt sich mit Hilfe der Abb. 21:

$$\frac{J_{\odot xy}}{t^2 h^2} = 0{,}01095\,,$$
$$J_{\odot xy} = 70\ \text{cm}^4\,.$$

Hiermit wird $\frac{J_{\odot xy}}{J_{\odot y}} \cdot \frac{t}{h} = 0{,}292$, entsprechend Abb. 22 bzw. 23, und $\frac{J_{\odot x}}{J_{\odot y}} \cdot \frac{t^2}{h^2} = 0{,}268$, entsprechend Abb. 24, und damit

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{J_{\odot xy}}{J_{\odot y} - J_{\odot x}} = \frac{70}{1138} = 0{,}0615$$
$$\alpha_0 = 1^\circ 45'.$$

Die Hauptträgheitsmomente sind hiermit zu errechnen zu

$$J_I = 1204{,}5\ \text{cm}^4,$$
$$J_{II} = 57{,}2\ \text{cm}^4,$$

sie weichen in ihrer Größe nur wenig von $J_{\odot y}$ bzw. $J_{\odot x}$ ab. Obwohl das untersuchte Profil schon erheblich dick und unsymmetrisch ist, stimmt doch die Richtung der Hauptträgheitsachsen nahezu mit der Druckseitenrichtung bzw. der Senkrechten dazu überein. Die Widerstandsmomente gegen Biegung können also in der beschriebenen Weise aus $J_{\odot x}$ praktisch genau genug berechnet werden. Auch das Zentrifugalmoment bezogen auf die xy-Achse des Profils darf praktisch vernachlässigt werden.

3. Steigung und Steigungswinkel und ihre Verteilung über den Schraubenradius.

a) Die geometrische und die aerodynamische Steigung. Der rein geometrische Begriff der Profilsehnensteigung H_s und der Profildruckseitensteigung H_d wurde schon dargelegt. Es läßt sich aber auch ein aerodynamischer Begriff für die Steigung geben.

Für jedes Profil gibt es, wie Tragflügeltheorie und Versuch zeigen, eine Anströmrichtung, unter der das Profil keinen Auftrieb erfährt. Eine Achse parallel zu dieser Richtung heißt die erste aerodynamische Hauptachse des Profils (Abb. 26). Die Steigung dieser ersten aerodynamischen Hauptachse kann man als aerodynamische Steigung H^*

definieren. Es leuchtet ein, daß gerade diesem Steigungsbegriff bei aerodynamischen Untersuchungen eine große Bedeutung zukommt:

$$H^* = 2\pi r \operatorname{tg}\beta^*. \tag{3, 1}$$

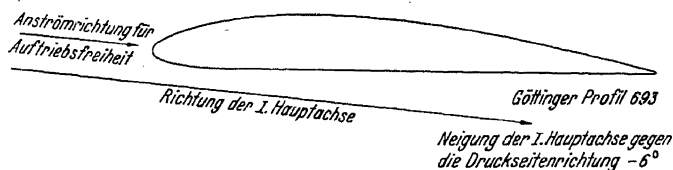



Abb. 26. Profil und erste aerodynamische Hauptachse [Lit. 22].

b) Steigungswinkelverlauf über dem Schraubenradius *r* bei konstanter Steigung. Es möge nun der Verlauf des Steigungswinkels β über dem Schraubenradius bei konstanter Steigung H dargestellt werden. Wir bilden hierzu eine dimensionslose Radiusgröße

$$x = \frac{r}{R}. \tag{3, 2}$$

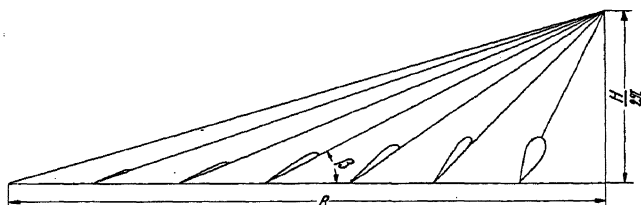



Abb. 27. Veranschaulichung der Änderung des Steigungswinkels β über dem Schraubenradius bei einer Schraube konstanter Steigung.

Am Flügelende ist also $x = 1$, in der Schraubenachse $x = 0$. Der Steigungswinkel ergibt sich dann aus

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{\pi D} \cdot \frac{1}{x} = \frac{H/2\pi R}{r/R} \text{ (Abb. 27).} \tag{3, 3}$$

Für endliche Steigung ist also der Steigungswinkel in Nähe der Schraubenachse (Index i) $\beta_i \to \frac{\pi}{2}$. Am Flügelende (Index a) ist der Steigungswinkel am kleinsten,

$$\beta_a = \operatorname{arc\,tg} \frac{H_a}{\pi D}.$$

In einem Schaubild soll nun der Übersichtlichkeit wegen für einige H/D der Steigungswinkelverlauf dargestellt werden (Abb. 28). Man sieht daraus, daß der Steigungswinkel von außen nach innen zunächst nur wenig, dann aber immer stärker zunimmt.

c) Steigungswinkelverlauf über dem Schraubenradius bei Verstellschrauben. In neuerer Zeit wurden außer Schrauben mit durchlaufenden Flügeln sowohl aus Metall wie aus Holz viele Schrauben mit bei

der Montage einstellbaren Flügeln — Einstellschrauben — oder auch mit im Flug verstellbaren Flügeln — Verstellschrauben — hergestellt. Bei den Einstellschrauben wie bei den Verstellschrauben ist der Flügel also verdrehbar. Zumeist ist die Verstellachse die Flügelachse. Daraus ergibt sich, daß der Steigungswinkelverlauf über dem Schraubenradius bei solchen Schrauben von der Flügelstellung abhängt. Ist z. B. für eine gewisse Flügelstellung die Steigung konstant oder nahezu konstant, so kann man diese Stellung als Nullstellung der Flügel und diese Steigung als Nullsteigung bezeichnen. Der Verstellwinkel von dieser Nullstellung aus gemessen heißt dann die Schränkung der Schraubenflügel. Diese Schränkung ist konstant, wenn die Flügelmittellinie gerade ist und mit der als Verstellachse dienenden Flügelachse zusammenfällt. Einige Abweichungen von diesen Verhältnissen sind aber unbedeutend.

Abb. 28. Steigungswinkelverlauf β über dem Schraubenradius in Abhängigkeit vom Steigungsverhältnis H/D bei konstanter Steigung.

d) Die Bestimmung der Nullsteigung eines Schraubenflügels und der Schränkung. Hat man den Steigungswinkelverlauf für irgendeine Flügelstellung bestimmt, so kann man auf folgende Weise die Nullsteigung und die Schränkung festlegen. Man zeichnet auf Pauspapier im Maßstabe der Abb. 28 den Steigungswinkelverlauf auf und verschiebt dieses Bild solange in Richtung der β-Achse über der Abb. 28, bis sich eine gute Übereinstimmung mit einer der H/D = konst.-Kurven ergibt. Das entsprechende H/D ist dann das gesuchte Nullsteigungsverhältnis und die nötige Verschiebung die gesuchte Schränkung (Abb. 29).

Im allgemeinen ist die beste Übereinstimmung erzielt, wenn die Steigung in

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = 0{,}8881 \text{ und in}$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = 0{,}4598 \qquad (3, 4)$$

gleich der einer Schraube konstanter Steigung wird.

Hat man den Steigungswinkel β_1 in $r_1/R = 0{,}888$ und den Steigungswinkel β_2 in $r_2/R = 0{,}460$ bestimmt, so ist durch die Differenz $\Delta_1\beta = \beta_2 - \beta_1$ das Nullsteigungsverhältnis H_0/D bestimmbar. Der Zusammenhang ist durch Abb. 30 gegeben. Der Vergleich der gemessenen Steigungswinkel mit den in Abb. 28 dargestellten ergibt dann die Schränkung. Wäre z. B., wie in Abb. 29 wiedergegeben,

Abb. 29. Beispiel für die Bestimmung der Nullsteigung H_0/D einer gegebenen Schraube und der Schränkung δ.

$$\beta_2 = \beta_{(r/R = 0{,}460)} = 39{,}6°,$$

$$\beta_1 = \beta_{(r/R = 0{,}888)} = 26{,}7°,$$

$$\Delta_1\beta = \beta_2 - \beta_1 = 12{,}9°,$$

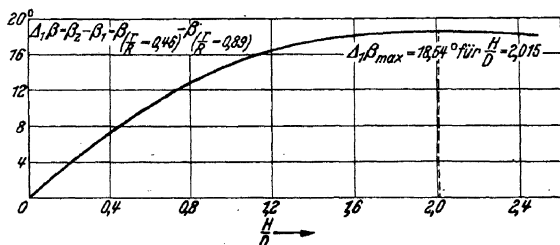



Abb. 30. Der Unterschied $\Delta_1\beta$ der Steigungswinkel für $r/R = 0{,}460$ und für $r/R = 0{,}888$ in Abhängigkeit von der Nullsteigung H_0/D.

dann fände sich hieraus aus Abb. 30

$$H_0/D = 0{,}800$$

und aus Abb. 28

$$\beta_{02} = \beta_{0(r/R = 0{,}460)} = 29{,}0°,$$

$$\beta_{01} = \beta_{0(r/R = 0{,}888)} = 16{,}1°$$

und damit die Schränkung

$$\delta = \beta_2 - \beta_{02} = \beta_1 - \beta_{01} = 10{,}6^\circ .$$

Da $\Delta_1 \beta = \beta_{02} - \beta_{01}$ in Abhängigkeit von H_0/D ein Maximum besitzt:

$$\Delta_1 \beta_{\max} = (\beta_{02} - \beta_{01})_{\max} = 18{,}54^\circ \quad \text{für} \quad H_0/D = 2{,}015 , \qquad (3,5)$$

so kann man nur in jenen Fällen H_0/D aus $\beta_2 - \beta_1$ bestimmen, in denen diese Differenz kleiner ist als dieses Maximum. Im allgemeinen dürfte diese Bedingung jedoch erfüllt sein und auch $H_0/D < 2{,}015$ werden.

e) **Schätzung der mittleren aerodynamischen Steigung bei beliebiger Schränkung.** Unter der mittleren aerodynamischen Steigung H^* versteht man den Fortschritt je Umdrehung der Schraube, wenn diese den Schub Null ergibt. Das ist also im sog. Schub-Null-Flug der Fall, der sehr ähnlich ist dem Gleitflug. Die Erfahrung und die Auswertung zahlreicher Schraubenversuche zeigt nun, daß bei beliebiger Schränkung oder sonst beliebiger Steigungsverteilung diese mittlere aerodynamische Steigung recht gut wiedergegeben wird durch die aerodynamische Steigung des Profils im Radius $r/R = \sqrt{\frac{1}{2}} \sim 0{,}7$. Der Steigungswinkel β^* der ersten Profilachse ist von dem der Druckseitenrichtung β_d um einen Winkel $\Delta \beta$ verschieden. β ist von der Profilform, d. h. von der Gestalt der Mittellinie und der Dickenverteilung abhängig. Für Profile mit gerader Druckseite, wie etwa die Profile Göttingen 622—625, ist der Differenzwinkel

$$\Delta \beta = h/t \cdot 45^\circ = \beta^* - \beta_d . \qquad (3,6)$$

Solange die Strömung nicht an den Schraubenflügeln abgerissen ist, ergeben erfahrungsgemäß Schrauben gleicher Flügelzahl und gleichen Durchmessers praktisch gleichen Schub und gleiches Drehmoment, wenn ihre mittlere aerodynamische Steigung die gleiche ist und ihre Flügelformen, abgesehen von der Steigungsverteilung, einigermaßen gleich sind, bei gleicher Blattbreite in $r/R = \sqrt{\frac{1}{2}} \backsim 0{,}7$ und bei sonst gleichem Betriebszustande.

Die Kenntnis der mittleren aerodynamischen Steigung ist daher für die Beurteilung einer Luftschraube sehr wertvoll.

Hat man aber in der vorhin beschriebenen Weise H_0^*/D und δ mit Hilfe von $\beta_{(r/R = 0{,}460)} - \beta_{(r/R = 0{,}888)}$ bestimmt, so ist besser als die Annäherung durch die Steigung auf $r/R = 0{,}7$

$$\frac{H^*}{2\pi R} = \operatorname{tg}\left(\delta + \operatorname{arc\,tg} \frac{H_0^*}{2\pi R}\right) .$$

f) **Anpassung des Steigungsverlaufs einer Verstellschraube an verschiedene Betriebsbedingungen.** Wenn man davon ausgehen darf, daß zu einem gegebenen Betriebszustand eine Schraube sich als besonders gut erweisen würde, wenn sie eine bestimmte dazu passende konstante Aus-

gangssteigung besitzt, so entsteht bei der Wahl des Steigungsverlaufes einer Verstellschraube die Frage, wie man diesen Steigungsverlauf nun nach Möglichkeit mehreren Betriebsbedingungen anpaßt, unter denen die Verstellschraube arbeiten soll. Den zwei wichtigsten Betriebszuständen mögen nun als jeweils günstigste Ausgangssteigungen H/D_I und H/D_{II} entsprechen. Sind H/D_I und H/D_{II} beide kleiner als etwa 1,2, so wird man zweckmäßig für die Verstellschraube eine konstante Ausgangssteigung zwischen H/D_I und H/D_{II} wählen. Bei größeren Steigungsverhältnissen empfiehlt sich jedoch eine andere Anpassung.

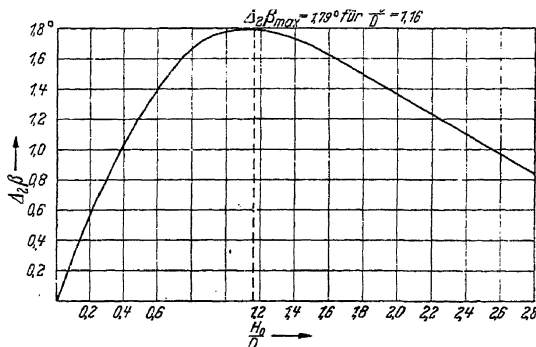



Abb. 31. Der Unterschied $\Delta_2\beta$ der halben Summe der Steigungswinkel in $r/R = 0{,}460$ und in $r/R = 0{,}888$ vom Steigungswinkel in $r/R = 0{,}674$ in Abhängigkeit von der Nullsteigung H_0/D.

Es wurde schon gezeigt, daß der Steigungswinkelunterschied in den Radien 0,460 R und 0,888 R nach Überschreiten eines Maximums bei zunehmendem H/D wieder abnimmt. Als weiteres Merkmal der Steigungswinkelverteilung ist es daher zweckmäßig, noch den Unterschied des Steigungswinkels β_3 in 0,674 R von der halben Summe der Steigungswinkel β_1 in 0,460 R und β_2 in 0,888 R einzuführen:

$$\Delta_2\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \beta_3. \quad (3,7)$$

Für Schrauben konstanter Steigung ist dieser Unterschied $\Delta_2\beta$ in Abhängigkeit von der Steigung in Abb. 31 dargestellt. $\Delta_2\beta$ erreicht für $H/D = 1{,}16$ als Höchstwert 1,79°. In Abb. 32 ist $\Delta_2\beta$ in Abhängigkeit von $\Delta_1\beta$ dargestellt. Als Parameter ist beigeschrieben das zugehörige Steigungsverhältnis bei konstanter Steigung.

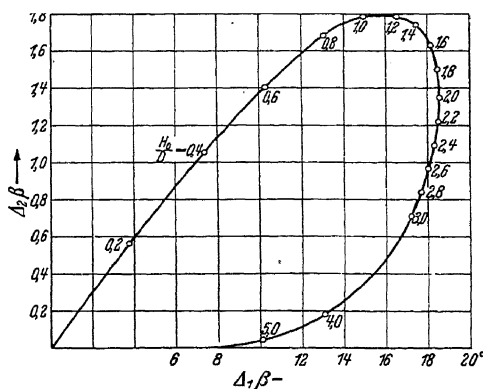



Abb. 32. Der Zusammenhang zwischen $\Delta_1\beta$ und $\Delta_2\beta$ bei Schrauben konstanter Nullsteigung H_0/D.

Einen zweckmäßigen Steigungsverlauf erhält man nun für eine Verstellschraube dadurch, daß man ein $\Delta_1\beta$ und ein $\Delta_2\beta$ aus dem Gebiet im Innern dieser Kurve wählt. Für

$$H/D_I = 3{,}0 \text{ wäre } \Delta_1\beta = 17{,}2°, \quad \Delta_2\beta = 0{,}71°,$$
$$H/D_{II} = 1{,}2 \qquad \Delta_1\beta = 16{,}5°, \quad \Delta_2\beta = 1{,}78°.$$

Gewählt wird zur gleichzeitigen Anpassung an beide Betriebszustände

$$\Delta_1\beta = 16{,}4°,$$

$$\Delta_2\beta = 1{,}25°.$$

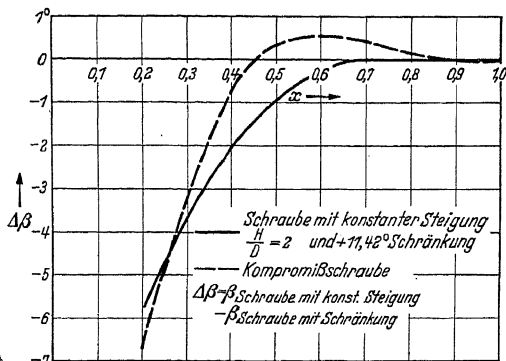



Abb. 33. Unterschied der Steigungswinkel einer Schraube mit $H_0/D = 2$, $\delta = 11{,}42°$ und einer Kompromißschraube (für $H_0/D = 3{,}0$ bzw. 1,2) gegenüber den Steigungswinkeln einer Schraube konstanter Steigung $H_0/D = 3$.

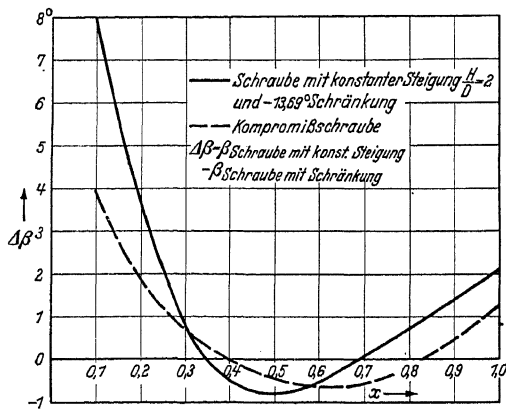



Abb. 34. Unterschied der Steigungswinkel einer Schraube mit $H_0/D = 2$, $\delta = -13{,}69°$ und einer Kompromißschraube (für $H_0/D = 3{,}0$ bzw. 1,2) gegenüber den Steigungswinkeln einer Schraube mit konstanter Steigung $H_0/D = 1{,}2$.

In Abb. 33 und 34 sind nun die sich ergebenden Steigungswinkelunterschiede

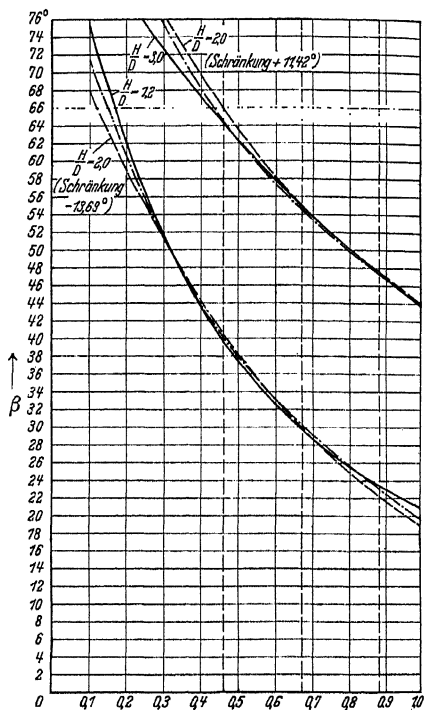



Abb. 35. Steigungswinkelverlauf β einer Schraube mit $H_0/D = 2$ = konst. und einer Kompromißschraube bei Einstellung $H_0/D = 3{,}0$ bzw. 1,2.
——— Schraube jeweils konstanter Steigung ($H_0/D = 1{,}2$ bzw. 3).
– – – Schraube konstanter Steigung ($H_0/D = 2$) und Schränkung ($\delta = -13{,}69°$ bzw. 11,42°).
— · — Kompromißschraube.

gegenüber einer Schraube $H/D = 3{,}0$ = konst. bzw. $H/D = 1{,}2$ = konst. dargestellt. Zum Vergleich sind auch noch die Unterschiede angegeben, welche eine Schraube mit $H/D = 2{,}0$ = konst. bei einer Schränkung um 11,42° bzw. −13,69° ergeben hätte. Abb. 35 zeigt noch den Steigungswinkelverlauf dieser Schrauben selbst [Lit. 22].

4. Gewicht und Trägheitsmoment der Luftschrauben.

a) Die dimensionslosen Größen für Gewicht und Trägheitsmoment. Das Gewicht der Luftschraube bzw. ihr Anteil am Fluggewicht ist von Bedeutung bei der Berechnung und Beurteilung eines Flugzeugs. Das Trägheitsmoment der Luftschraube ist für die Schwingungsvorgänge des Triebwerks maßgeblich und im Kurvenflug von Einfluß auf die Flugeigenschaften und auf die Beanspruchung der Schraubenwelle.

Zur Vorausbestimmung des Gewichts und des Trägheitsmomentes eines Neuentwurfs ist die Einführung von dimensionslosen, das Gewicht und das Trägheitsmoment mit den Hauptabmessungen in Beziehung bringenden Größen zweckmäßig.

Das Gewicht G einer Schraube ist im wesentlichen verhältig der Flügelzahl $\mathfrak{z}$, dem spezifischen Gewicht γ, dem Radius R, der Blattbreite t, der Blattdicke h. Die für das Gewicht maßgebliche dimensionslose Größe ist also

$$f_G = \frac{G}{\mathfrak{z}\,\gamma\, t\, h\, R}\,. \qquad (4,1)$$

Das Trägheitsmoment J ist im wesentlichen verhältig der Flügelzahl $\mathfrak{z}$, der Massendichte $\varrho = \gamma/g$, der dritten Potenz des Radius R^3, der Blattbreite t und der Blattdicke h. Die für das Trägheitsmoment maßgebliche dimensionslose Größe ist also

$$f_J = \frac{g\,J}{\mathfrak{z}\,\gamma\, t\, h\, R^3}\,. \qquad (4,2)$$

Durch Division der beiden findet man

$$f_{J/G} = \frac{g\,J}{G\,R^2} = 4\,g\,\frac{\;}{G\,D^2} \qquad (4,3)$$

Die Größen f_G, f_J, $f_{J/G}$ sind im allgemeinen abhängig vom Anteil der Nabe an Gewicht und Trägheitsmoment, andererseits von der Verteilung der Blattbreite t und der Blattdicke h über dem Schraubenradius. Im allgemeinen werden t und h nur auf einem Radius $r = 0{,}7\,R$ aufgemessen. Deshalb mögen hier für t und h die Werte auf 0,7 in obige Formeln eingesetzt werden. Die Werte für einige neuere Schrauben sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Für Schrauben aus verschiedenem Werkstoff wurde für γ ein mittlerer Wert eingesetzt.

b) Der statistische Zusammenhang zwischen Gewicht und Trägheitsmoment. Die für die in Zahlentafel 1 zusammengestellten Schrauben berechneten Werte für f_G, f_J, $f_{J/G}$ wurden zur Auftragung in folgenden Koordinatensystemen benutzt:

I:	f_G,	f_J	(Abb. 36),
II:	$1/f_G$,	J/GD^2	(Abb. 37),
III:	f_J,	J/GD^2	(Abb. 38).

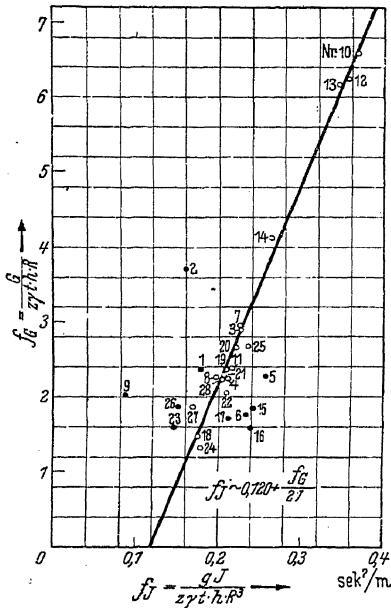



Abb. 36. Zusammenhang zwischen der Gewichtszahl f_G und der Trägheitsmomentenzahl f_J.

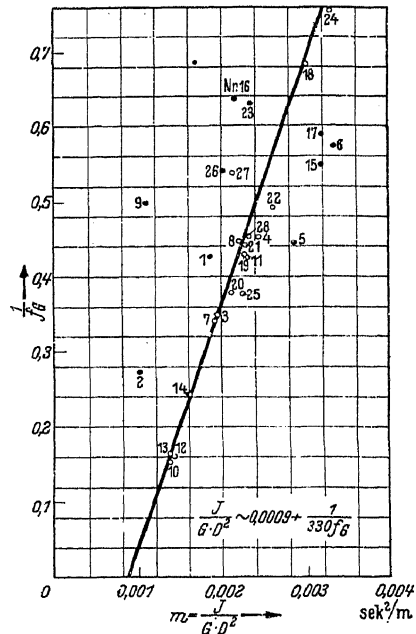



Abb. 37. Zusammenhang der Gewichtszahl f_G mit J/GD^2.

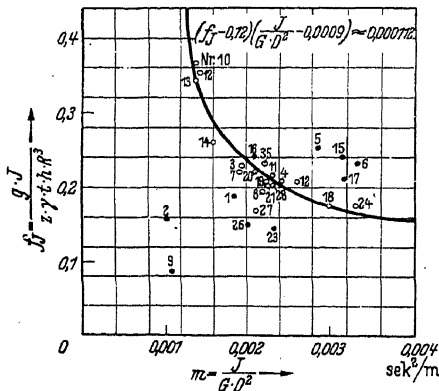



Abb. 38. Zusammenhang der Trägheitsmomentenzahl f_J mit J/GD^2.

Man sieht insbesondere in Auftragung I und II, daß sich die berechneten Werte längs gewisser Linien häufen. Als gute Interpolationsformeln des Zusammenhangs können also gelten

$$\text{I:} \qquad f_J \approx 0{,}12 + \frac{f_G}{27} \qquad (4,4)$$

und

$$\text{II:} \quad \frac{J}{GD^2} \approx \left(0{,}0009 + \frac{1/f_G}{330}\right) \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}\,. \quad (4,5)$$

Hieraus ergibt sich

$$\text{III:} \quad (f_J - 0{,}12) \cdot \left(\frac{J}{GD^2} - 0{,}0009\right) \approx 0{,}112\,\frac{\text{sec}^2}{\text{m}}\,. \qquad (4,6)$$

Die entsprechende Kurve interpoliert auch die in Abb. 38 eingetragenen Werte recht gut.

Bemerkenswert ist, daß in allen drei Darstellungen die Werte ○ der gleichen Schrauben in dichter Nähe der Interpolationskurven liegen

Zahlentafel 1.
Gewicht und Trägheitsmoment ausgeführter Luftschrauben.

Lfd. Nr.	Gewicht G kg	Massenträgheitsmoment J mkg · sec²	⌀ $D = 2R$ m	$\mathfrak{z}$	t m	h m	$10^{-3}\gamma$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$10^3 f_G = \frac{G}{\mathfrak{z}\cdot\gamma\cdot t\cdot h\cdot R}$	$10^3 f_J = \frac{g\cdot J}{\mathfrak{z}\cdot t\cdot h\cdot\gamma\cdot R^5}$	$\frac{J}{G\cdot D^2}$ $\frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$
1	47,9	0,885	3,102	2	0,182	0,020	1,8	2359,6	177,86	0,00187
2	26,7	0,182	2,505	2	0,153	0,021	0,9	3685,8	158,4	0,00104
3	43,7	0,873	3,19	2	0,180	0,0145	1,8	2913,3	225,5	0,00195
4	45,3	1,199	3,294	2	0,172	0,013	2,8	2220,6	210,3	0,00244
5	87,0	3,618	3,806	2	0,191	0,013	2,8	2259,7	253,7	0,00287
6	61,6	1,618	2,802	2	0,23	0,0195	2,8	1750,0	231,7	0,00333
7	87,0	1,841	3,298	3	0,138	0,0155	2,8	2939,2	223,5	0,00194
8	89,2	2,832	3,782	3	0,195	0,020	1,8	2246,9	194,2	0,00221
9	67,1	1,117	3,886	3	0,187	0,017	1,8	2015,0	87,0	0,00110
10	52,0	0,602	2,864	2	0,213	0,026	0,5	6557,3	365,0	0,00140
11	17,5	0,234	2,400	3	0,114	0,010	1,8	2368,1	215,0	0,00232
12	22,96	0,149	2,120	2	0,158	0,020	0,55	6222,2	353,1	0,00144
13	22,96	0,1455	2,118	2	0,160	0,020	0,55	6155,5	343,9	0,00141
14	27,15	0,246	2,356	2	0,205	0,025	0,55	4113,6	261,3	0,00163
15	29,5	0,603	2,5	2	0,177	0,013	2,8	1832,3	241,1	0,00317
16	130,7	7,02	3,986	3	0,247	0,020	2,8	1582,3	237,3	0,00215
17	93,4	4,726	3,986	2	0,247	0,020	2,8	1700,0	211,7	0,00318
18	90,9	4,927	4,25	2	0,247	0,021	2,8	1470,8	173,6	0,00300
19	44,4	0,967	3,1	2	0,188	0,018	1,8	2349,2	209,03	0,00227
20	47,1	1,021	3,2	2	0,181	0,017	1,8	2661,0	220,2	0,00212
21	60,2	1,412	3,2	2	0,196	0,015	2,8	2280,3	204,5	0,00229
22	43,2	0,882	2,8	2	0,164	0,017	2,7	2047,4	208,9	0,00262
23	73,5	1,75	3,2	2	0,214	0,024	2,8	1594,3	145,5	0,00234
24	86,2	3,582	3,5	2	0,265	0,025	2,8	1326,1	176,5	0,00329
25	63,8	1,952	3,7	2	0,268	0,036	0,67	2639,4	234,2	0,00224
26	60,2	1,34	3,3	2	0,183	0,019	2,8	1863,8	149,5	0,00204
27	60,0	1,387	3,3	2	0,182	0,019	2,8	1863,3	167,7	0,00213
28	11,7	0,109	2,0	2	0,122	0,012	1,8	2216,2	202,8	0,00233

und daß die stärker abweichenden Werte • auf jeder Seite der Interpolationskurven im allgemeinen zu den gleichen Schrauben gehören.

Die trotzdem vorhandene, nicht unerhebliche Streuung ist wohl in erster Linie dadurch zu erklären, daß die untersuchten Schrauben von vielen verschiedenen Herstellern stammen und daher untereinander erheblich abweichende Konstruktionen darstellen; ferner dadurch, daß auch ein erheblicher Anteil der Schrauben Neukonstruktionen sind und damit auch häufig aus dem Rahmen der übrigen Schrauben herausfallen.

c) Zusammenhang des Gewichts und des Trägheitsmomentes mit dem Blattquerschnittsverlauf. Abgesehen von der Nabengestaltung, welche auf f_G und f_J auch einen Einfluß besitzt, werden f_G und f_J offenbar stark durch den Blattquerschnittsverlauf bedingt. Da nun zu vermuten ist, daß für Schrauben, deren Werte mit den angegebenen

Interpolationskurven zusammenfallen, dieser Blattquerschnittsverlauf einer gewissen Gesetzmäßigkeit folgt, sind hier in Abb. 39

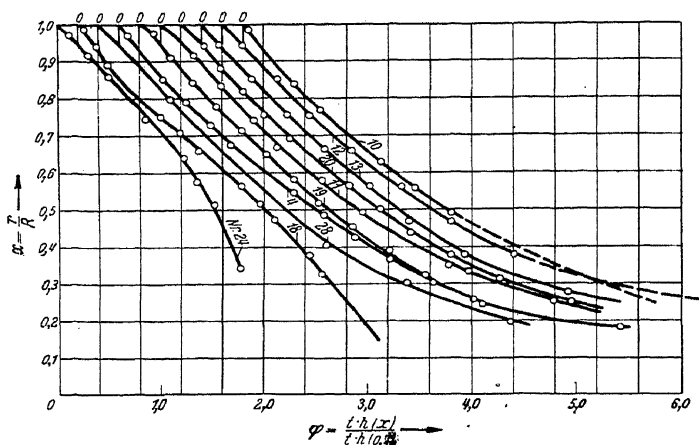



Abb. 39. Blattquerschnittsverlauf $th(x)$ einiger Schrauben in Abhängigkeit vom Radius bezogen auf $th(x = 0,7)$.

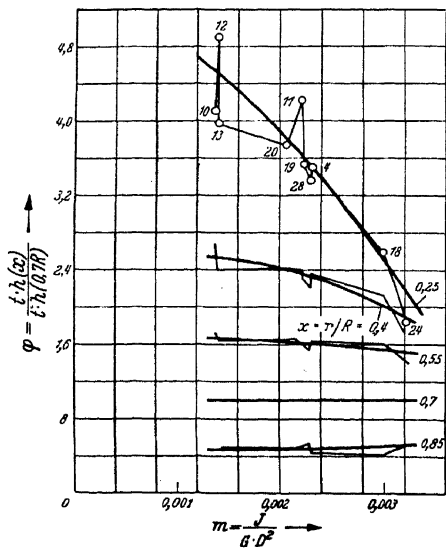



Abb. 40.
Blattquerschnittsverhältnis $th(x)/th$ (0,7) für einige Radien in Abhängigkeit von J/GD^2.

einige Verteilungen aufgetragen. Um diese Verteilungen miteinander vergleichen zu können, werden sie immer bezogen auf $t \cdot h$ in $r = 0,7\,R$. Statt des Radius r wurde $x = r/R$ als Ordinate gewählt. Abb. 39 gibt also

$$\varphi = \frac{t \cdot h(x)}{t\,h(0,7)}.$$

Die so ermittelte Kurvenschar wurde nun noch unter sich geglättet (Abb. 40) und in Abb. 41 neu aufgetragen. Jeder Kurve in Abb. 41 läßt sich als Parameter

$$m = \frac{J}{G D^2} \qquad (4,7)$$

zuordnen. Die Abb. 37 und Abb. 38 geben also in Abhängigkeit von f_G bzw. f_J gleichzeitig den für den Blattquerschnittsverlauf interessierenden Parameter $m = J/GD^2$.

d) Anwendungsbeispiele. Die Anwendung der gefundenen Ergebnisse sei an einigen Beispielen gezeigt. Sind z. B. $\mathfrak{z}$, R, t, h, γ einer beabsichtigten Neukonstruktion gegeben, so wählt man einen Wert

$m = J/G D^2$ und findet dann mit den in Abb. 37 und Abb. 38 enthaltenen Interpolationskurven das zu erwartende G und J. Sind $\mathfrak{z}, \gamma, R, G, J$ vorgeschrieben, so findet man mit Hilfe von $m = J/G D^2$ dazu zunächst das zu erwartende $th\,(0{,}7)$ und damit auch den Blattquerschnittsverlauf.

Abb. 41. Blattquerschnittsverlauf in Abhängigkeit vom Radius für einige Verhältnisse J/GD^2.

Beispiel 1: Gegeben $\mathfrak{z}, \gamma, R, t, h, m$; gesucht G, J.

Aus Abb. 37 und 38 ergibt sich zu dem gegebenen m f_G und f_J und damit

$$G = f_G \cdot \mathfrak{z}\, \gamma\, R\, t\, h,$$

$$J = f_J \cdot \mathfrak{z}\, \varrho\, R^3\, t\, h,$$

z. B. für

$$\mathfrak{z} = 2, \qquad \gamma = 2800 \text{ kg/m}^3$$

$$R = 2{,}125 \text{ m}, \qquad t = 0{,}250 \text{ m},$$

$$h = 0{,}021 \text{ m}, \quad m = 0{,}00300 \text{ sec}^2/\text{m}$$

ergibt sich

$$f_G = \frac{1}{0{,}680} = 1{,}47, \qquad f_J = 0{,}174.$$

und damit

$$G = 91 \text{ kg},$$

$$J = 4{,}93 \text{ mkgsec}^2.$$

Beispiel 2: Gegeben $\mathfrak{z}, \gamma, R, G, J$; gesucht $th\,(0{,}7)$.

Aus $\frac{J}{G D^2} = \frac{1}{4}\frac{J}{G R^2} = m$ findet man mit Hilfe der Abb. 37 bzw. Abb. 38 f_G bzw. f_J. Damit ist

$$t h = f_G \cdot \frac{\mathfrak{z}\, \gamma\, R}{G} = f_J \frac{\mathfrak{z}\, \gamma\, R^3}{g\, J}$$

gefunden. Aus Abb. 41 ergibt sich dann, unter Umständen durch entsprechende Interpolation, der weitere Blattquerschnittsverlauf.

Z. B. für

$$\mathfrak{z} = 3, \quad \gamma = 2{,}800 \text{ kg/m}^3, \quad R = 1{,}65 \text{ m}, \quad G = 87 \text{ kg}, \quad J = 1{,}84 \text{ mkgsec}^2$$

ergibt sich

$$m = 0{,}00194 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}, \qquad f_G = \frac{1}{0{,}342} = 2{,}93, \qquad f_J = 0{,}223$$

und damit

$$th\,(0{,}7) = 0{,}00214 \text{ m}^2$$

und der weitere Blattquerschnittsverlauf aus Abb. 41:

x	r	φ	th
$x = 0{,}9$,	$r = 1{,}485$ m,	$\varphi = 0{,}31$,	$th = 0{,}00066\ \mathrm{m}^2$,
0,8	1,320	0,64	0,00137
0,7	1,155	1,00	0,00214
0,6	0,990	1,41	0,00302
0,5	0,825	1,90	0,00406
0,4	0,660	2,51	0,00537

Beispiel 3: Gegeben $z, \gamma, R, th(0{,}7), th(0{,}4)$, gesucht G, J.

Aus $th(0{,}7)$ und $th(0{,}4)$ findet man mit Hilfe der Abb. 41 $m = J/GD^2$. Hieraus ergibt sich f_G und f_J und damit

$$G = f_G\, z\, \gamma\, R\, th,$$
$$J = f_J\, z\, \varrho\, R^3\, th,$$

z. B. für

$z = 2$, $\gamma = 2800\ \mathrm{kg/m^3}$, $R = 1{,}700$ m, $th(0{,}7) = 0{,}200 \cdot 0{,}016\ \mathrm{m}^2 = 0{,}0032\ \mathrm{m}^2$, $th(0{,}4) = 0{,}220 \cdot 0{,}033\ \mathrm{m}^2 = 0{,}0073\ \mathrm{m}^2$

ergibt sich
$$\frac{th(0{,}4)}{th(0{,}7)} = 2{,}28$$

und damit
$$m = \frac{J}{GD^2} = 0{,}0025\ \frac{\mathrm{sec}^2}{\mathrm{m}},$$

also
$$f_G = \frac{1}{0{,}528} = 1{,}89\,,$$
$$f_J = 0{,}19\,,$$
$$G = 57{,}5\ \mathrm{kg}\,,$$
$$J = 1{,}70\ \mathrm{mkgsec}^2.$$

Aus den Ergebnissen der Abschätzung ist dann im allgemeinen zu ersehen, ob die beabsichtigte Schraube den gefundenen Anforderungen genügt. Genügt sie nicht, so zeigen die dargelegten Zusammenhänge, in welcher Richtung eine nötige Änderung liegen wird, um den gewünschten Bedingungen besser zu entsprechen.

e) **Bestimmung des Schwerpunktes eines Luftschraubenflügels mit Hilfe des Gewichts und des Trägheitsmomentes.** Bei der Nachrechnung einer Luftschraubennabe auf Festigkeit und des Übergangs des Schraubenblattes in die Nabe ist die Kenntnis des Schwerpunktes des Schraubenblattes wichtig. Bei Schrauben mit einstellbaren Blättern ist die Bestimmung dieses Schwerpunktes nicht schwer. Anders ist dies bei starren Schrauben.

Im vorigen wurde jedoch gezeigt, daß zwischen Gewicht, Trägheitsmoment und Blattform gesetzmäßige Zusammenhänge bestehen. Damit ist aber auch ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen Gewicht, Trägheitsmoment und Schwerpunkt eines Schraubenflügels

anzunehmen. Das Gewicht G der ganzen Schraube ist durch Wiegen, das polare Trägheitsmoment J der ganzen Schraube durch Pendeln, wie es noch beschrieben werden soll, leicht zu bestimmen. Es möge nun der Schwerpunkt des zwischen r_i und R gelegenen Teils eines Schraubenflügels bestimmt werden. Gewicht G_N und Trägheitsmoment J_N des innerhalb r_i gelegenen Schraubenteils möge rechnerisch bestimmt werden, was im allgemeinen ohne große Schwierigkeiten möglich ist, wenn r_i nicht wesentlich größer als der Nabenradius ist.

Wir setzen nun $r/R = y$, $r_i/R = y_i$. Die Blattquerschnitte mögen F sein. Der Blattquerschnittsverlauf läßt sich dann für $y > y_i$ annähern durch

$$F = (1 - y)^n \cdot F_0 \quad \text{oder mit} \quad 1 - y = \eta \quad F = \eta^n F_0 . \tag{4, 8}$$

Das Gewicht des Flügels ist mit $\mathfrak{z}$ als Flügelzahl

$$G_{\mathrm{Fl}} = \frac{G - G_N}{\mathfrak{z}} . \tag{4, 9}$$

Das auf die Luftschraubenachse bezogene polare Trägheitsmoment des Flügels ist

$$J_{\mathrm{Fl}} = \frac{J - J_N}{\mathfrak{z}} \tag{4, 10}$$

Das Gewicht des Flügels läßt sich auch berechnen aus

$$G_{\mathrm{Fl}} = \gamma F_0 R \int_{y_i}^{1} (1 - y)^n \, dy = \gamma F_0 R \int_{0}^{\eta_i} \eta^n \, d\eta . \tag{4, 11}$$

Das Trägheitsmoment des Flügels läßt sich berechnen aus

$$J_{\mathrm{Fl}} = \frac{\gamma}{g} F_0 R^3 \int_{y_i}^{1} (1 - y)^n y^2 \, dy = \frac{\gamma}{g} F_0 R^3 \int_{0}^{\eta_i} \eta^n (1 - \eta)^2 \, d\eta . \tag{4, 12}$$

Damit wird

$$\frac{G_{\mathrm{Fl}}}{\gamma F_0 R} = \int_0^{\eta_i} \eta^n \, d\eta = \frac{\eta_i^{n+1}}{n+1} ,$$

$$\frac{J_{\mathrm{Fl}}}{\frac{\gamma}{g} F_0 R^3} = \int^{\eta_i} \eta^n (1 - \eta)^2 \, d\eta = \int^{\eta_i} (\eta^n - 2\eta^{n+1} + \eta^{n+2}) \, d\eta \tag{4, 13}$$

$$= \frac{\eta_i^{n+1}}{n+1} - 2\frac{\eta_i^{n+2}}{n+2} + \frac{\eta_i^{n+3}}{n+3} .$$

Es möge nun $r_\Theta = y_\Theta R$ den Trägheitsradius des Luftschraubenblattes bezeichnen. Dann gilt

$$\frac{g J_{\mathrm{Fl}}}{G_{\mathrm{Fl}} R^2} = y_\Theta^2 = 1 - \frac{2(n+1)}{n+2} \eta_i + \frac{n+1}{n+3} \eta_i^2 . \tag{4, 14}$$

Der Zusammenhang zwischen y_Θ, $y_i = 1 - \eta_i$ und n ist durch Abb. 42 dargestellt.

Sind $G_{\mathrm{Fl}} = \frac{G - G_N}{\mathfrak{z}}$ und $J_{\mathrm{Fl}} = \frac{J - J_N}{\mathfrak{z}}$ bekannt, so ist damit auch n bestimmt. Mit Hilfe von n läßt sich aber auch der Schwerpunkts-

abstand $r_\odot = y_\odot R$ des Schraubenflügels von der Schraubenachse berechnen.

Dieser ist $r_\odot = y_\odot R = \frac{M_{\mathrm{Fl}}}{G_{\mathrm{Fl}}}$ oder $y_\odot = \frac{M_{\mathrm{Fl}}}{R G_{\mathrm{Fl}}}$, (4, 15)

wenn M_{Fl} das statische Moment des Flügels bezogen auf die Schraubenachse ist. Es ist aber

$$M_{\mathrm{Fl}} = \gamma F_0 R^2 \int_{y_i}^{1} (1-y)^n y\, dy = \gamma F_0 R^2 \int_0^{\eta_i} \eta^n (1-\eta)\, d\eta \quad (4, 16)$$

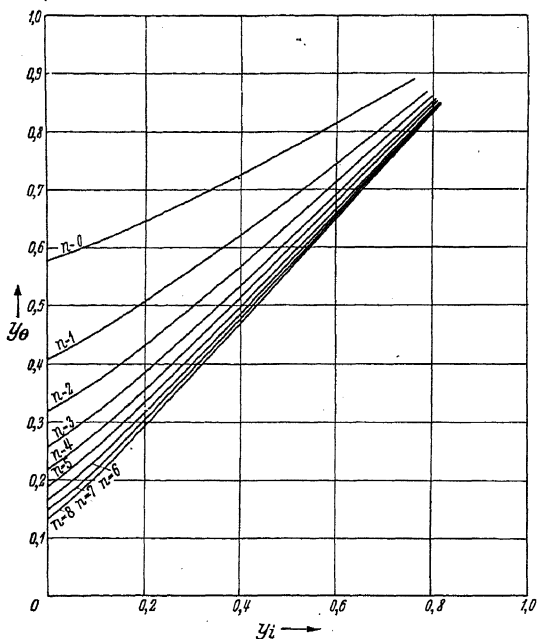



Abb. 42. Zusammenhang zwischen dem Nabenradius $r_i = y_i R$, dem Trägheitsradius des Schraubenflügels $r_\Theta = y_\Theta R$ und dem Formparameter n des Schraubenflügels.

und damit

$$\frac{M_{\mathrm{Fl}}}{\gamma F_0 R^2} = \int_0^{\eta_i} \eta^n (1-\eta)\, d\eta = \int_0^{\eta_i} (\eta^n - \eta^{n+1})\, d\eta = \frac{\eta_i^{n+1}}{n+1} - \frac{\eta_i^{n+2}}{n+2}. \quad (4, 17)$$

Hiermit wird

$$\frac{M_{\mathrm{Fl}}}{G_{\mathrm{Fl}} R} = y_\odot = 1 - \frac{n+1}{n+2} \eta_i. \quad (4, 18)$$

Trägt man $y_\odot$ in Abhängigkeit von $y_i = \eta_i - 1$ für konstante n (Abb. 43) auf, so wird diese Abhängigkeit durch Gerade gegeben, die sich alle im Punkte $y_i = 1$, $y_\odot = 1$ schneiden.

Mit Hilfe des durch Abb. 42 dargestellten Zusammenhangs kann man leicht zu einem gegebenen y_Θ und n das zugehörige y_i bestimmen. Damit lassen sich dann in Abb. 43 leicht zu den gleichen n und y_i die Werte y_Θ eintragen und somit in diese Abbildung auch die Kurven y_Θ eintragen. Aus Abb. 43 läßt sich also leicht zu jedem gegebenen y_i und $y_\Theta = \sqrt{\frac{J_{\mathrm{Fl}} \cdot g}{G_{\mathrm{Fl}} \cdot R^2}} = \sqrt{\frac{g (J - J_N)}{R^2 (G - G_N)}}$ das zugehörige $y_\odot$ bestimmen.

Man kann also tatsächlich aus den gegebenen $J - J_N$ und $G - G_N$ unter der praktisch zulässigen Annahme $F = F_0 (1-y)^n$ den Schwerpunktsabstand $r_\odot = y_\odot R$ eines Schraubenflügels von der Achse bestimmen.

5. Nachmessen von Luftschrauben.

a) Bestimmung von Gewicht und Trägheitsmoment einer Schraube. Die Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Schraube ist nicht viel schwieriger als die mit Hilfe einer Waage durchzuführende Bestimmung des Schraubengewichts. Man bedient sich dabei folgender Versuchsanordnung:

Die Schraube wird entsprechend Abb. 44 symmetrisch zu ihrer Achse an zwei Drähten aufgehängt, welche die gleiche Länge a und voneinander den Abstand $2\,e$ haben, wobei $e \ll a$ sein soll. Man bestimmt nun die Schwingungsdauer T kleiner Drehschwingungen der Schraube um ihre Achse und erhält dann

Abb. 43. Zusammenhang zwischen dem Nabenradius $r_i = y_i R$, dem Schwerpunktsabstand $r_\odot = y_\odot R$ des Schraubenflügels und dem Formparameter n des Schraubenflügels bzw. dem Trägheitsradius $r_\Theta = y_\Theta R$ des Schraubenflügels.

$$J = \frac{G\,T^2\,e^2}{4\,\pi^2\,a} \tag{5,1}$$

Man kommt zu dieser Beziehung durch folgende Überlegungen: Der Auslenkung zur Zeit t um den kleinen Winkel φ entspricht in beiden

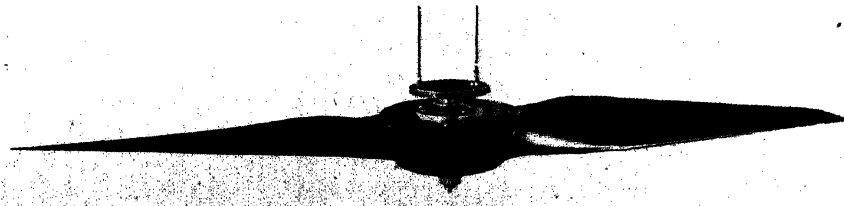



Abb. 44. Aufhängung einer Schraube zur Bestimmung des Trägheitsmomentes durch Pendeln.

Drähten die gleiche Vertikalkomponente der Fadenkraft $G/2$ und die Horizontalkomponente

$$H = \frac{G}{2} \cdot \frac{e\,2\sin\varphi/2}{a} = \frac{G}{2}\,\frac{e\,\varphi}{a} \quad \text{(Abb. 45).}$$

Die beiden Horizontalkomponenten bilden ein Kräftepaar $M = 2\,e\,H\,\cos\frac{\varphi}{2}$ $= G\frac{e^2\varphi}{a}$, welchem eine Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ der das Trägheitsmoment J besitzenden Schraube entspricht. Damit erhält man als Schwingungsgleichung:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{G\,e^2}{a}\varphi\,.$$

Die Auflösung ergibt

$$\varphi = \sin\left(\frac{G\,e^2}{J\,a}\right)^{1/2} t\,.$$

Die Dauer $t = T$ einer vollen Schwingung ist gegeben durch

$$\left(\frac{G\,e^2}{J\,a}\right)^{1/2}\cdot T = 2\pi\,,$$

woraus sich dann durch Auflösung nach J der oben angegebene Zusammenhang (5, 1) ergibt.

Abb. 45. Vertikal- und Horizontalkomponente der Fadenspannung beim Pendeln einer Schraube.

Die Bestimmung des Massenträgheitsmomentes durch den beschriebenen Pendelversuch ist einfach und genügend genau. Die rein rechnerische Bestimmung durch entsprechende Integration und sorgfältige Bestimmung der Blattquerschnitte wäre wesentlich umständlicher und keinesfalls genauer.

Die Aufhängung erfolgt am zweckmäßigsten an der Nabe in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten. Ist

G = Gewicht der Schraube in kg,
T = Dauer einer vollen Schwingung in sec,
e = halber Abstand der beiden Aufhängedrähte in m,
a = Länge der Aufhängedrähte in m,

so wird

J = Massenträgheitsmoment der Schraube in mkgsec².

Beim Versuch ist auf folgendes zu achten:

1. Die Luftschraube ist so zu wiegen, wie sie für den Pendelversuch aufgehängt wird, also mit Nabe und allem Zubehör.

2. Die Schwingungsdauer wird zweckmäßig aus der Zeit einer größeren Anzahl von vollen Schwingungen errechnet. Man führt am besten zwei Pendelungen durch und zählt dabei jedesmal 10 Schwingungen.

3. Da die Berechnungsformel nur für kleine Ausschlagwinkel gilt, darf die Luftschraube nicht mehr als 10° horizontal aus ihrer Nullage ausgelenkt werden.

4. Die Anbringung der Drähte muß im gleichen Abstand von der Drehachse der Luftschraube erfolgen. Die beiden Drähte müssen in der Ruhelage völlig parallel zueinander sein.

5. Die beiden Aufhängedrähte müssen gleichlang sein. Ihre Länge muß möglichst groß sein, damit bei der Auslenkung die bei der Ableitung der Formel unberücksichtigte Hebung des Schraubenschwerpunkts entsprechend klein bleibt. Das Verhältnis von $a : e$ sollte daher mindestens 7 : 1 betragen.

6. Der Pendelversuch ist in einem geschlossenen Raum vorzunehmen, da Erschütterungen und Zugluft das Ergebnis fälschen können.

7. Die Luftschraube darf nur Schwingungen in ihrer Schraubenkreisebene ausführen. Die Flügelspitzen müssen also eine horizontale Spur beschreiben und keine wellenförmige, sonst wäre der Versuch zu wiederholen.

8. Die Luftschraubenachse darf bei dem Pendelversuch ihre Lage nicht verändern. Sie muß also Drehachse der Drehschwingung sein.

b) Auswuchten von Schrauben. An die Gleichmäßigkeit der Massenverteilung einer Luftschraube sind zwei Forderungen zu stellen:

Abb. 46. Erläuterung der statischen Unwucht durch die Außenmittigkeit des Schwerpunktes. $\Delta M_{stat} = G\,\Delta y$.

1. Der Schwerpunkt der ganzen Schraube muß möglichst genau in die Schraubenachse fallen, d. h. das Massenmoment um die Schraubenachse, die x-Achse, muß möglichst ganz verschwinden.

2. Um jede zur Schraubenachse senkrechte Achse durch den Schwerpunkt der Schraube muß ebenfalls, soweit möglich, das Massenmoment verschwinden. Bei einer zweiflügeligen Schraube muß also die Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Flügel zur Schraubenachse senkrecht stehen.

Ist die erste Bedingung erfüllt, so spricht man von einer statischen Auswuchtung der Luftschraube. Ist die zweite Bedingung erfüllt, so spricht man von einer dynamischen Auswuchtung. [Lit. 231, 234, 244.]

Ist die Schraube nicht statisch ausgewuchtet, so wird die Welle durch eine Fliehkraft Z beansprucht. Ist das Moment der statischen Unwucht $\Delta M_{stat} = G \cdot \Delta y$ (Abb. 46), so wird

$$\Delta Z = \frac{\Delta M_{stat}}{g}\,\omega^2. \tag{5,2}$$

Einer Unwucht von z. B. $10\,m\,g = 0{,}01$ mkg entspräche also bei $\omega = 150\,\text{sec}^{-1}$ eine Zentrifugalkraft von

$$\Delta Z = 23{,}0\ \text{kg}.$$

Die Schädlichkeit einer solchen Unwucht läge jedoch nicht so sehr in der Größe einer solchen Kraft als darin, daß nach dem Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes der ganze Motorvorbau eines Flugzeugs zu entsprechenden Schwingungen angeregt würde. Um die entsprechenden schädlichen Wechselbeanspruchungen zu vermeiden, muß also die Unwucht möglichst klein gehalten werden.

Ist die Schraube nicht dynamisch ausgeglichen und ist das Moment dieser Unwucht ΔM_{dyn} (Abb. 47), so wird die Welle durch ein Biegemoment M_b beansprucht. Dieses wäre, wenn $y_\odot$ der Schwerpunktsabstand der Flügel von der Schraubenachse ist,

$$\Delta M_b = y_\odot \frac{\Delta M_{\text{dyn}}}{g}\,\omega^2. \tag{5,3}$$

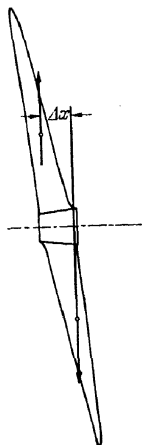



Abb. 47. Erläuterung der dynamischen Unwucht durch Vor- und Rücklage der Schwerpunkte der einzelnen Luftschraubenblätter. $\Delta M_{\text{dyn}} = \frac{G}{2}\Delta x$.

Aber auch dieses Biegemoment würde die Welle nicht beträchtlich beanspruchen. Die Schädlichkeit einer solchen dynamischen Unwucht liegt wieder in den Wechselbeanspruchungen des Motorvorbaues entsprechend dem Satze von der Erhaltung des Moments. Um also Schwingungen zu vermeiden, muß sowohl die statische als auch die dynamische Unwucht möglichst klein sein.

Die Ursachen einer Unwucht können sowohl in nicht ganz genauer Herstellung als auch in nicht vollkommener Gleichmäßigkeit des Werkstoffs liegen, dies insbesondere bei Holz. Durch Nacharbeit läßt sich die Unwucht der Schraube im allgemeinen leicht auf ein erträgliches Maß zurückführen. Eine weitere sehr wesentliche Ursache einer Unwucht, insbesondere einer dynamischen Unwucht, ist durch unrichtigen Zusammenbau bedingt. Bei einer starren Holzluftschraube kann durch ungleiches Anziehen der Muttern des Nabenflansches der Metallteil der Nabe in das Holz der Schraube ungleichmäßig eingepreßt werden.

Bei Schrauben mit einstellbaren Flügeln kann die Metallnabe durch geringe Ausführungsfehler Anlaß dazu sein, daß die Schraubenflügelschwerpunkte nicht in die gleiche zur Schraubenachse senkrechte Ebene zu liegen kommen.

Auch anscheinend kleine Fehler können zu erheblicher Unwucht führen. Eine zweiflügelige Holzschraube mit

Durchmesser $D = 3$ m,

Gewicht $G = 54$ kg,

Schwerpunktradius des Flügels einschl. Nabenanteil $y_{\odot} = 0{,}53$ m möge durch ungleichmäßiges Anziehen der Flanschmuttern eine Schräglage zur Drehachse von

$$\delta = 8{,}6' = 0{,}00250$$

bekommen. Das entspricht bei einem Nabendurchmesser von $D_N = 40$ cm einem Unterschied der Einpressung von 1 mm auf beiden Seiten. Dann ist das Moment der dynamischen Unwucht

$$M_{\text{dyn}} = G\, y_{\odot}\, \delta = 0{,}0715 \text{ mkg}.$$

Bei einer Drehzahl von $n = 1800$ U/min ($\omega = 188{,}5 \text{ sec}^{-1}$) ergäbe das ein Biegemoment von 137 mkg.

Es darf hier noch darauf hingewiesen werden, daß Ungleichheit der Flügel, sei es durch die Herstellung oder durch verschiedene Verformung unter Einfluß der Luftkräfte infolge Ungleichmäßigkeit des Werkstoffs, zu einer aerodynamisch ungleichen Belastung führen können, welche zu den gleichen Wirkungen führt wie ein dynamisches Unwuchtmoment. Man kann dafür den Begriff der aerodynamischen Unwucht prägen. Auch diese kann recht erheblich werden.

Die Bestimmung der statischen Unwucht von Schrauben wird auf Auswuchtmaschinen durchgeführt. Die Schraube kann dabei entsprechend Abb. 48 bis 50 auf zwei gut gelagerte, leicht drehbare, schneidenartige Rollen gelegt werden. Die Lagerung gestattet es, daß der schwerere Teil der Schraube sich nach abwärts dreht. Um die Schraube nun in einer gewünschten Stellung auszubalancieren, wird auf den leichteren Teil ein entsprechendes kleines Gewicht aufgelegt. Abstand dieses Gewichtes von der Achse × Gewicht gibt dann das Moment der statischen Unwucht.

Diese Auswuchtung wird im allgemeinen für zwei Lagen durchgeführt, und zwar für zwei zueinander senkrechte Lagen, bei Zweiflügelschrauben z. B. für vertikale und horizontale Stellung der Flügel (Abb. 51).

Die Benutzung von Vorrichtungen zur Bestimmung der dynamischen Unwucht von Luftschrauben ist bisher nicht gebräuchlich geworden. Man begnügt sich statt dessen im allgemeinen damit festzustellen, ob die Schraube spurt, d. h. ob die Flügelspitzen in der gleichen Ebene senkrecht zur Schraubenachse liegen.

Ist die Nabe statisch bzw. dynamisch gewuchtet, so kann man auch die einzusetzenden Flügel unter sich vergleichen und damit zur statischen bzw. dynamischen Auswuchtung gelangen. Auch hierfür gibt es Vorrichtungen. Doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

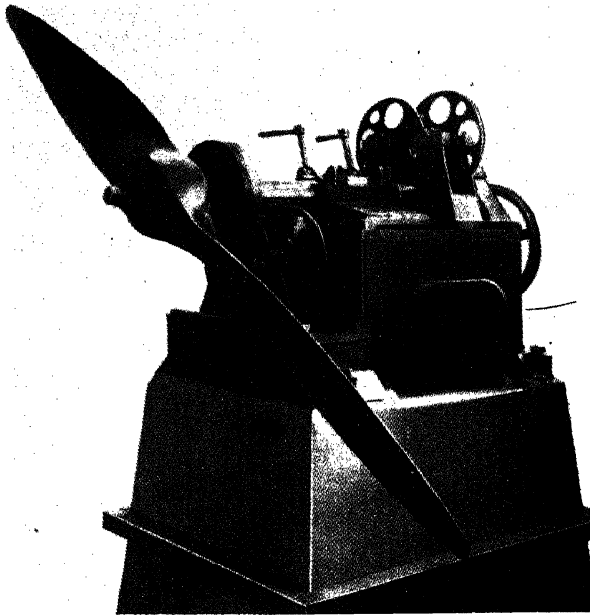



Abb. 48.

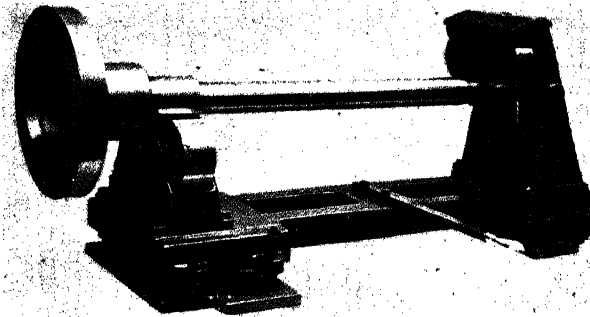



Abb. 49.

c) Bestimmung von Durchmesser, Steigung und Blattbreite. Die Nachprüfung der Abmessungen einer Schraube erstreckt sich auf

Durchmesser,
Blattbreite,
Blattdicke,
Steigung.

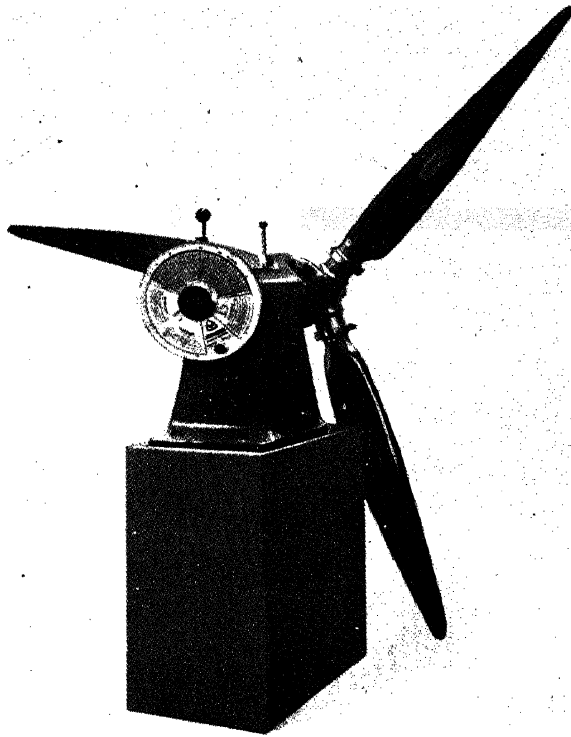



Abb. 50.

Abb. 48 bis 50. Vorrichtungen zur Bestimmung der statischen Unwucht. Abb. 48 Ausführung Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt; Abb. 49 Ausführung Trebelwerk; Abb. 50 Ausführung Losenhausenwerk.

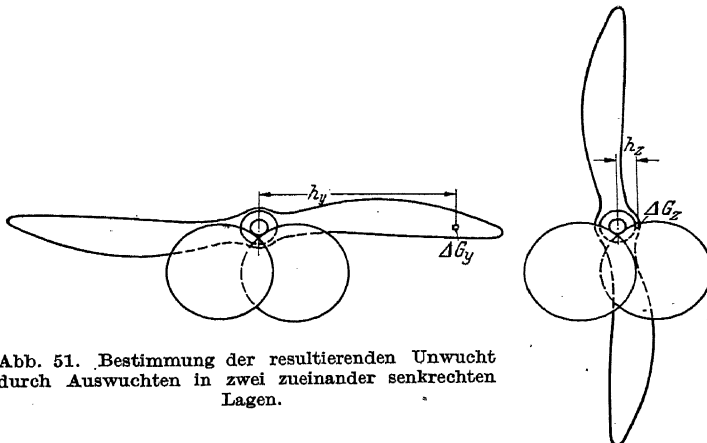



Abb. 51. Bestimmung der resultierenden Unwucht durch Auswuchten in zwei zueinander senkrechten Lagen.

Dies geschieht auf einem dazu besonders eingerichteten und genau waagerecht ausgerichteten Meßtisch (Abb. 52). Dieser Meßtisch ist eine einfache gußeiserne Platte, welche an ihrem einen Ende mit einem Gewindezapfen senkrecht zur Meßebene versehen ist, um die nachzumessende Schraube befestigen zu können. Diese Platte ist senkrecht zu einer durch die Schraubenachse gehenden Mittellinie metrisch eingeteilt. Das nachzumessende Schraubenblatt wird so gedreht, daß das Flügelende genau über dieser Mittellinie liegt bzw. daß die Projektion des Flügelendes genau symmetrisch liegt zu dieser Mittellinie. Die Mittellinie des Meßtischs soll also die Projektion der Flügelsehne dar-

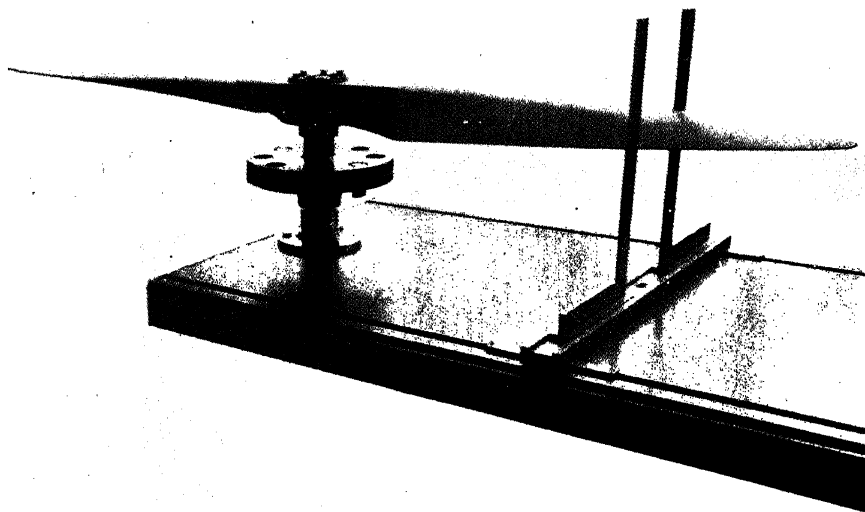



Abb. 52. Meßtisch für Luftschrauben.

stellen. Der Durchmesser ist nach dieser Einstellung mit Hilfe eines rechten Winkels leicht abzulesen. Die metrische Einteilung des Meßtisches gestattet ein bequemes und leichtes Anreißen der Radien auf dem Schraubenblatt, in welchem die Schraube nachgemessen werden soll.

Die Bestimmung der Blattbreiten t und der Profildicken h geschieht mit Hilfe einer beliebig einstellbaren Rechteckschablone, einer Profilschere (Abb. 53). Der eine feste rechte Winkel wird an die Druckseite und die Profilnase angelegt, dann die dritte Seite der Rechteckschablone an die Hinterkante herangeschoben und darauf die vierte Seite an die Profilsaugseite. Die Seiten des festen rechten Winkels sind metrisch geteilt, die bewegliche dritte und vierte Seite tragen die Meßmarken für Profiltiefe und Profildicke.

Zur Bestimmung der Steigung dient der Steigungsmesser; mit ihm kann der Steigungswinkel gemessen werden. Der Steigungsmesser

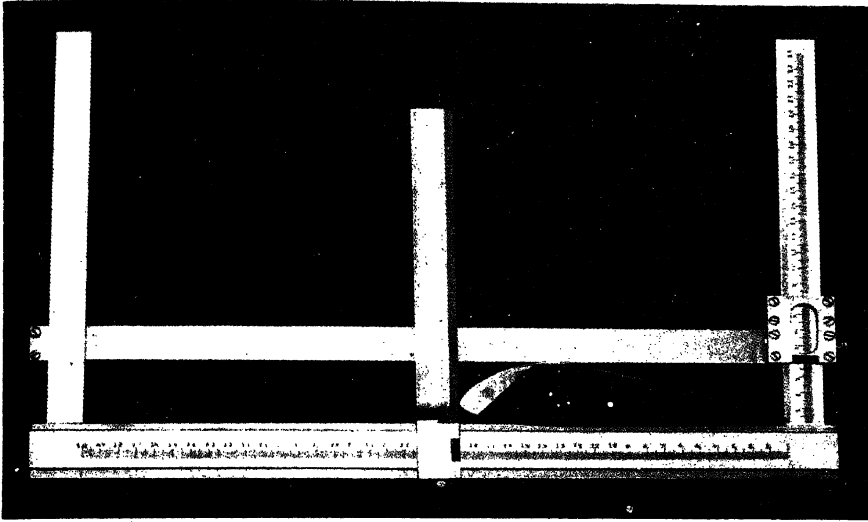



Abb. 53. Bestimmung der Blattbreite t und Profildicke h mit Hilfe der Profilschere.

(Abb. 54) ist ein einstellbares, rechtwinkliges Dreieck. Die eine Kathede liegt parallel zum Meßtisch. Die andere Kathede trägt eine Tangensteilung, so daß auf ihr der Steigungswinkel abgelesen werden kann, wenn die Hypotenuse an die Druckseite des Schraubenflügels angelegt wird.

Man kann den Steigungsmesser aber auch so einrichten, daß man an ihm die Steigung unmittelbar ablesen kann. Dazu wird der vertikale Schenkel auf dem waagerechten verschiebbar eingerichtet (Abb. 55). Seine Entfernung vom Drehpunkt wird nun gleich dem Radius oder einem bestimmten Teil $1 : M$ davon gemacht. Wird also der vertikale Schenkel als Läufer ausgebildet, so kann man an ihm auch die Steigung selbst ablesen. Der Maßstab der Steigung ist dann linear und zwar $1 : 2\pi M$.

Abb. 54. Steigungswinkelmesser mit fester Kathede.

Statt den Steigungsmesser direkt an die Druckseite anzulegen, kann man ihn auch an die Profilschere anlegen.

Ist das Profil an der Druckseite konvex, so muß man aber die Profilschere in die entsprechende Lage bringen. Man bringt dann auf der

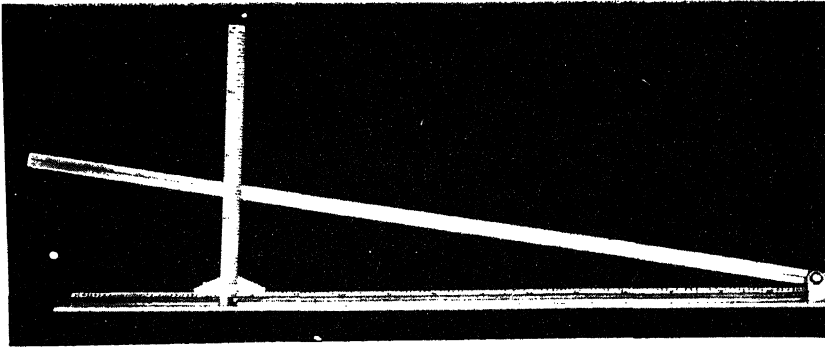



Abb. 55. Steigungsmesser mit dem Schraubenradius proportional einstellbarer Kathede.

der Druckseitenrichtung entsprechenden Seite zwei gleich hohe Reiter an in der Entfernung $h/2$ bzw. $t/2$ hinter dem vorderen Profilende und drückt nun diese Reiter an die Profildruckseite an (vgl. Abb. 5).

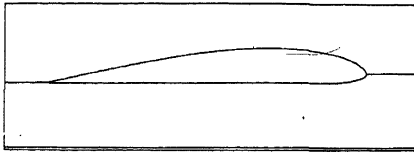



Abb. 56. Profilübersteckschablone.

In ähnlicher Weise geht man auch bei der Nachprüfung von Profilen einer Schraube vor, insbesondere, wenn mehrere Schrauben des gleichen Musters nachzuprüfen sind. Statt der Profilschere benutzt man dabei eine Profilübersteckschablone (Abb. 56), deren Unterseite parallel ist mit der Druckseite des Profils, so daß an sie der Steigungsmesser angelegt werden kann.

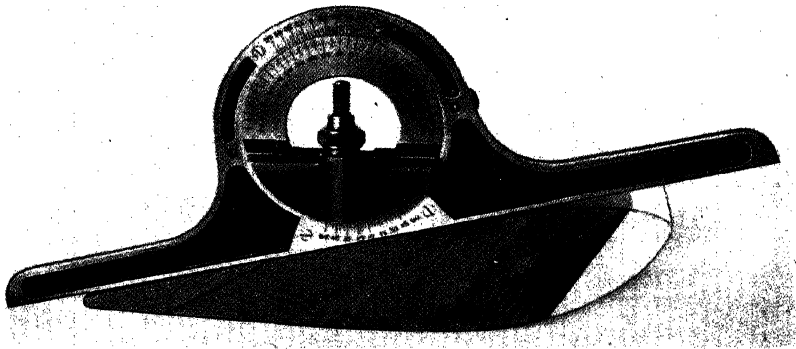



Abb. 57. Anlegelineal mit drehbar eingesetzter Libelle zur Bestimmung der Steigung bei Druckschrauben.

Das Vorstehende gilt zunächst für Zugschrauben, deren Druckseiten dem Meßtisch zugekehrt sind. Bei Druckschrauben, wo die Druckseite bei der beschriebenen Meßtischausführung nach oben gerichtet ist, benutzt man als Steigungsmesser ein Anlegelineal, welches einen drehbaren Einsatz mit Libelle trägt (Abb. 57). Der Einsatz wird gedreht, bis die Libelle die waagerechte Lage anzeigt. An einer Skala läßt sich dann der Steigungswinkel ablesen.

B. Grundlagen für Luftschraubenversuche und deren Auswertung.

6. Die für die Schraube, das Flugzeug und die Luft maßgeblichen physikalischen Größen.

a) Dichte, Zähigkeit und Schallgeschwindigkeit der Luft. Die Kraftwirkungen der Luftschrauben sind wesentlich bedingt durch die physikalischen Eigenschaften der Luft. Die wichtigste Eigenschaft ist die Dichte ϱ [kg sec²/m⁴]. Sie ist abhängig vom Luftdruck und von der Temperatur. Auch die Zusammensetzung der Luft, wobei insbesondere an ihren Gehalt an Wasserdampf zu denken ist, hat einen gewissen Einfluß auf die Dichte. Von letzterem sei jedoch abgesehen. Ist T die absolute Temperatur in Grad, γ das spezifische Gewicht in kg/m³, p der Luftdruck in kg/m², dann gibt die Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\gamma} = R\,T \qquad (6,1)$$

oder mit der Schwerebeschleunigung $g = 9{,}81$ m/sec² und der Dichte ϱ

$$\frac{p}{g\,\varrho} = R\,T.$$

Hierbei ist R die Gaskonstante in m/Grad. Für Luft ist

$$R = 29{,}27 \text{ m/Grad}.$$

In Bodennähe ($h = 0$ m über NN) ist im Mittel (Normalatmosphäre INA)

$$p = 10\,330 \text{ kg/m}^2,$$
$$\gamma = 1{,}225 \text{ kg/m}^3,$$
$$T = 288 \text{ Grad}.$$

Für andere Höhen ist der Mittelwert von p, ϱ, γ, T in Abb. 58 und 59 aufgetragen (Normalatmosphäre). Doch kommen erhebliche Abweichungen von diesen Werten vor. Als Grenzwerte können in Europa bezogen auf $h = 0$ m etwa gelten:

in einem Hochdruckgebiet im Winter

$p = 10600$ kg/m², $T = 240°$,

$\gamma = 1{,}500$ kg/m³, $\varrho = 0{,}154$ kg sec²/m⁴,

in einem Tiefdruckgebiet im Sommer

$p = 9500$ kg/m², $T = 310°$,

$\gamma = 1{,}050$ kg/m³ $\varrho = 0{,}107$ kg sec²/m⁴.

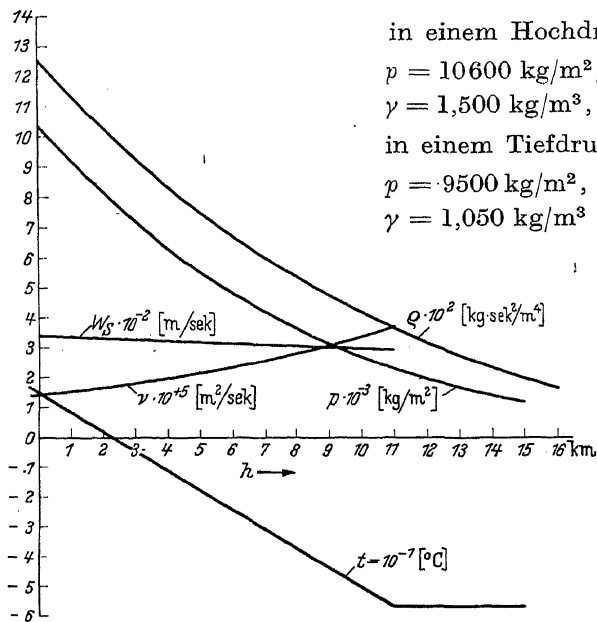



Abb. 58. Die Zustandsgrößen der Luft in Abhängigkeit von der Höhe entsprechend der Normalatmosphäre. p = Luftdruck in kg/m², $\varrho = \gamma/g$ Luftdichte in kg sec²/m⁴, t = Temperatur in Celsiusgrad, ν = kinematische Zähigkeit in m²/sec, w_s = Schallgeschwindigkeit in m/sec.

Für die Reibungsvorgänge an den Schraubenflügeln ist die kinematische Zähigkeit ν [m²/sec], d. i. die absolute Zähigkeit μ [kg sec/m²] geteilt durch die Dichte ϱ [kg sec²/m⁴], maßgeblich.

Für die absolute Zähigkeit μ der Luft gilt mit ausreichender Genauigkeit bei nicht zu hohen Drücken und bei mittlerer Temperatur

$$10^{-6}\mu = 1{,}712\sqrt{1 + 0{,}003665\,t} \cdot (1 + 0{,}00080\,t)^2. \qquad (6, 2)$$

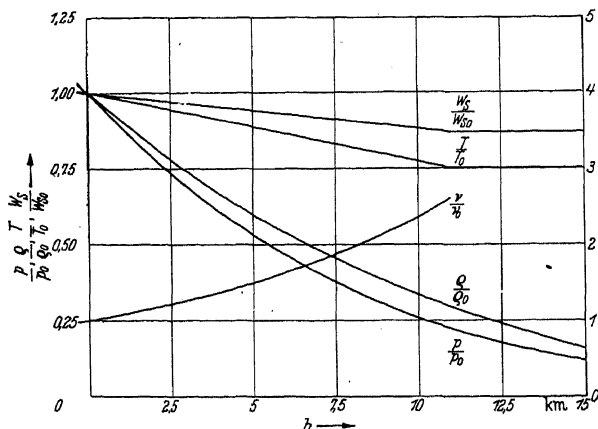



Abb. 59. Die auf den Normalzustand in Bodennähe bezogenen Zustandsgrößen.

Die sich hiernach ergebende kinematische Zähigkeit $\nu = \mu/\varrho$ ist in Abb. 60 wiedergegeben. Für die Normalatmosphäre ergibt sich der in Abb. 60 gezeigte Zusammenhang.

Da entsprechend der Zustandsgleichung die Luft zusammendrückbar ist, muß diese Zusammendrückbarkeit nötigenfalls berücksichtigt werden. Dies ist der Fall bei Annäherung der Relativgeschwindigkeit eines Profils an die Schallgeschwindigkeit, z. B. bei Flugzeugen sehr großer Geschwindigkeit und an den Flügelenden der Luftschrauben.

Die Schallgeschwindigkeit w_s berechnet sich aus

$$w_s = \sqrt{g \varkappa R T}\,.$$

Hierin bedeutet

$g = 9{,}81\ \mathrm{m/sec^2}$ die Schwerebeschleunigung,
$\varkappa = c_p/c_v$ den Quotienten aus der spez. Wärme bei konstantem Druck c_p und der spez. Wärme bei konstantem Volumen c_v,
R = die Gaskonstante,
T = die absolute Temperatur.

Für Luft ist $\varkappa = 1{,}40$; $R = 29{,}27$ m/Grad, somit

$$w_s = \sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}40 \cdot 29{,}27} \cdot \sqrt{T} = 20{,}1\sqrt{T}. \quad (6,3)$$

Man sieht hieraus, daß die Schallgeschwindigkeit nur von der Temperatur allein abhängig ist und zwar verhältig der Wurzel aus der absoluten Temperatur. Da sich jedoch diese mit der Flughöhe erheblich ändert, ist auch der Einfluß der Flughöhe auf die Schallgeschwindigkeit und damit auf die Strömungsvorgänge insbesondere an den Flügelenden der Luftschrauben sehr beachtlich (Abb. 59).

Abb. 60. Abhängigkeit der kinematischen Zähigkeit ν vom Druck p und von der Temperatur T.

b) Geschwindigkeit, Widerstand und Anstellung des Flugzeugs. Für die Strömungsverhältnisse an der Luftschraube ist wesentlich die Geschwindigkeit v des Flugzeugs. Je nach der Größe der jeweiligen Geschwindigkeit des Flugzeugs ist der Betriebszustand der Schraube ein anderer. Die Geschwindigkeit im Horizontalflug schwankt zwischen der größten Fluggeschwindigkeit v_{max} und der kleinsten Fluggeschwindigkeit v_{min}. Je größer also die Geschwindigkeitsspanne $v_{max} - v_{min}$ bzw. das Geschwindigkeitsverhältnis v_{max}/v_{min} ist, um so wechselnderen Betriebsbedingungen muß die Schraube schon im Horizontalflug genügen. Darüber hinaus muß die Schraube aber auch den Start ermöglichen, also schon bei der Geschwindigkeit $v = 0$ im allgemeinen

wirksam sein. Eine Ausnahme machen hier höchstens Flugzeuge, welche nur mit Hilfe einer Flugzeugschleuder oder einer anderen Starthilfe starten sollen. In vielen Fällen kommen aber noch größere Geschwindigkeiten vor, nämlich bei Flugzeugen, welche für den Fall des Sturzfluges zugelassen sind. Hierbei sind insbesondere auch Festigkeitsfragen von Bedeutung, welche nicht immer ganz leicht zu lösen sind.

Außer der Fluggeschwindigkeit selbst beeinflußt die Verhältnisse an der Schraube eine Drehung des Flugzeugs um eine zur Luftschraubenachse senkrechte Achse, z. B. im Kurvenflug oder beim Abfangen aus dem Sturzflug. Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\omega_F = \omega_B + \omega_A$ setzt sich zusammen aus der Bahnwinkelgeschwindigkeit $\omega_B = v/r_B$, wobei v die Fluggeschwindigkeit, r_B der Krümmungsradius der Flugbahn ist, und der Anstell- bzw. Schiebewinkeländerungsgeschwindigkeit des Flugzeugs gegen die Flugbahn $\omega_A = d\alpha/dt$.

Abb. 61. Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit vom Anstellwinkel bei verschiedenen Klappenausschlägen.

Der Bewegung mit der Geschwindigkeit v setzt das Flugzeug einen Widerstand W entgegen, welcher dem Staudruck

$$q = \frac{\varrho}{2} v^2 \qquad (6,4)$$

verhältig ist. Unter Benutzung der Flügelfläche F und des hierauf bezogenen Widerstandsbeiwertes c_w schreibt sich

$$W = q \cdot c_w \cdot F. \qquad (6,5)$$

Der Widerstand W bzw. der Widerstandsbeiwert c_w ist noch abhängig vom Anstellwinkel α des Flugzeugs.

Der Anstellwinkel des Flugzeugs ist außerdem von Einfluß auf die Strömung durch die Luftschraube, da sich mit ihr ja auch der Anstellwinkel der Luftschraube ändert.

Vom Anstellwinkel ist auch der Auftrieb A des Flugzeugs abhängig. Unter Benutzung der Flügelfläche F und des hierauf bezogenen Auftriebsbeiwertes c_a schreibt sich

$$A = q c_a F. \qquad (6,6)$$

Man kann nun sowohl c_a wie c_w in Abhängigkeit von α darstellen (Abb. 61). Gebräuchlicher ist die Darstellung von c_w in Abhängigkeit von c_a (Abb. 62). Diese Darstellung heißt die Polare des Flugzeugs.

Der Widerstand und in gewissem Maße der Auftrieb eines Flugzeugs ohne Schraube, d. h. der Zelle, setzen sich aus verschiedenen Teilen zusammen.

Diese Anteile sind:

1. Der Widerstand und der Auftrieb des Tragflügels für sich allein, welcher im Bereich des Rumpfes mit entsprechendem Profil durchlaufend gedacht wird.

2. Der Widerstand und der Auftrieb des Rumpfes einschließlich aller Anhänge, wie Fahrgestell, Motorgondeln, Leitwerk, bei fehlend gedachtem Tragflügel.

3. Der Zusatzwiderstand der Zelle, der im allgemeinen positiv ist, und Zusatzauftrieb, der im allgemeinen negativ ist, welcher verbleibt, wenn man vom Gesamtwiderstand bzw. Gesamtauftrieb die ersten beiden Anteile abzieht. Diese Änderung von Widerstand und Auftrieb beruht auf der gegenseitigen Beeinflussung und auf dem Wegfall des Flügelzwischenstückes. Gerade der Zusatzwiderstand der Zelle ist für die Beurteilung des Zusammenarbeitens der Zelle mit der Luftschraube wichtig. Durch den Einfluß der Schraube wird aber der Widerstand und Auftrieb des ganzen Flugzeugs wieder anders. Zu dem vorhin Aufgezählten kommt also noch

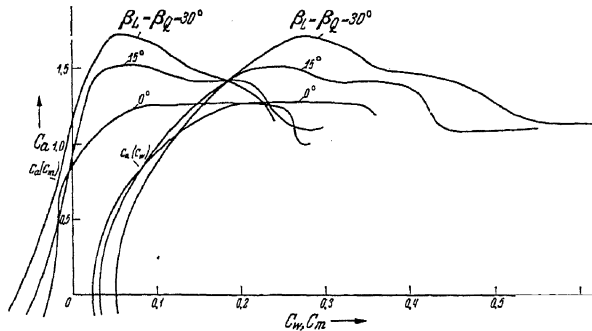



Abb. 62. Polaren bei verschiedenen Klappenausschlägen.

4. Der Zusatzwiderstand und der Zusatzauftrieb durch den Einfluß der Schraube. Sie sind selbstverständlich vom Betriebszustand der Schraube abhängig.

Auf diese Zusammenhänge wird später bei der Behandlung des Zusammenwirkens von Schraube und Zelle noch einzugehen sein. Zu beachten ist ferner, daß bei Anwendung von besonderen Hilfsmitteln zur Auftriebserhöhung Auftriebsbeiwert, Widerstandsbeiwert und Momentbeiwert nicht mehr durch den Anstellwinkel allein gegeben sind. Abb. 61 bzw. 62 zeigen als Beispiel die Wirkung der Verwendung einer Auftriebsklappe in Flügelmitte und das Anwenden der Querruder als zusätzliche Landeklappe bei symmetrischem Ausschlag [Lit. 293].

c) Leistung und Drehschnelle des Motors. Der Motor treibt entweder direkt oder über ein Untersetzungsgetriebe, unter Umständen

auch über ein Ferngetriebe, z. B. Kettenantrieb, die Luftschraube an. Für die Luftschraube ist maßgeblich die für sie geltende Drehzahl. Im allgemeinen wird bei praktischen Angaben die Umdrehungszahl n auf die Minute bezogen. Die sekundliche Umdrehungszahl ist also

$$n' = \frac{n}{60}.$$

Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit, kürzer Drehschnelle, ist

$$\omega = 2\pi n' = \frac{\pi}{30} n = \frac{n}{9{,}55}.$$

Die an die Luftschraube abgegebene Leistung N wird praktisch im allgemeinen in PS angegeben. In den Gleichungen der folgenden Darlegungen wird jedoch N in mkg/sec benutzt (N [mkg/sec] $= 75\,N$ [PS]).

Abb. 63. Vollgasleistung N eines Motors bei verschiedenen Drehzahlen n in Abhängigkeit von der Flughöhe h.

Die Leistung N ist das Produkt aus Drehmoment M_d und Drehschnelle ω

$$N = M_d \cdot \omega.$$

Die Leistung des Motors ist abhängig von der Drehzahl, der Drossel- bzw. Regelstellung und dem Ansaugzustand der Luft und damit insbesondere von der Flughöhe und nicht am wenigsten, aber meist nicht recht bekannt, weil schlecht zu kontrollieren, außer von der Einregulierung vom jeweiligen Motorzustand: Temperatur, Schmierölzustand,

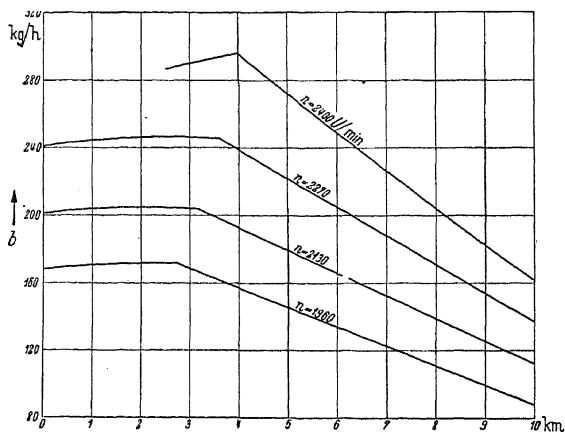



Abb. 64. Betriebsstoffverbrauch b eines Motors bei verschiedenen Drehzahlen n in Abhängigkeit von der Flughöhe h.

Arbeiten der Kerzen, Kolbenspiel, Verschleiß. Das Beispiel in Abb. 63 und Abb. 64 kann also nur für einen Motor bei gleichem Zustand gelten.

Für das Zusammenarbeiten zwischen Flugzeug, Luftschraube und Motor wichtig ist auch der Verbrauch des Motors an Betriebsstoff, d. h. an Kraftstoff und Schmieröl (Abb. 64).

d) Spitzenumfangsgeschwindigkeit und Schub der Luftschraube. Eine für den Betriebszustand der Schraube besonders wichtige kennzeichnende Größe ist ihre Spitzenumfangsgeschwindigkeit u_a

$$u_a = R\omega = \frac{n}{19{,}1}\cdot D \qquad (n\,[\mathrm{min}^{-1}])\,. \qquad (6,7)$$

Sie ist im allgemeinen kleiner als die Schallgeschwindigkeit, aber doch immerhin mit ihr schon vergleichbar. Die üblichen Umfangsgeschwindigkeiten liegen zwischen 180 m/s und 280 m/s.

Der Zweck einer Luftschraube ist die Erzeugung der Vortriebskraft, des Schubs. Unter Schub S versteht man die in die Richtung der

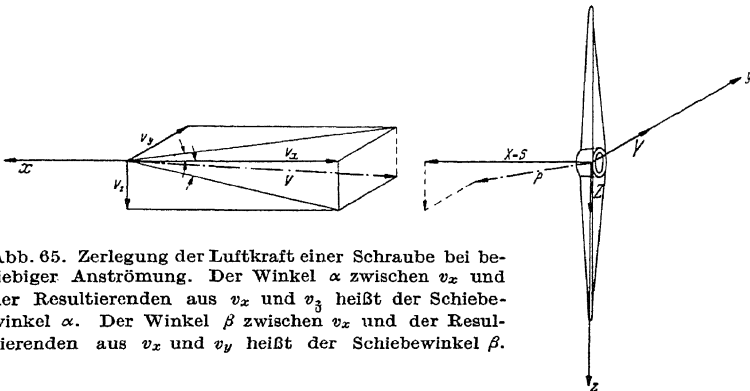



Abb. 65. Zerlegung der Luftkraft einer Schraube bei beliebiger Anströmung. Der Winkel α zwischen v_x und der Resultierenden aus v_x und v_z heißt der Schiebewinkel α. Der Winkel β zwischen v_x und der Resultierenden aus v_x und v_y heißt der Schiebewinkel β.

Luftschraubenachse fallende Komponente $P_x = X$ der von der Luft auf die Luftschraube ausgeübten Kraft P, nicht diese Kraft selbst (Abb. 65). Bei gerader Anströmung der Luftschraube wäre dies zwar gleich. Bei schräger Anströmung unter der Anstellung α bzw. β der Luftschraubenachse, welche ja der allgemeine Fall ist, hat diese Kraft auch eine Komponente $P_n = Q$ senkrecht zur Schraubenachse, welche wieder in eine Schiebekomponente $P_y = Y$ und eine zu ihr und der Schraubenachse senkrechte Auftriebskomponente $P_z = Z$ zerlegt werden kann. Im allgemeinen greift diese Kraft P auch nicht in der Achse an, so daß sich auch ein Moment M_n ergibt, welches wieder in eines um die y- und eines um die z-Achse zerlegt werden kann, also in $M_y = M$ und $M_z = N$. $M_x = M_d$ ist das Schraubendrehmoment.

7. Die Kenngrößen zur Berücksichtigung des Einflusses der Zähigkeit und der Kompressibilität.

a) Der REYNOLDSsche Kennwert für Schrauben. Will man die Versuchsergebnisse einer Modellschraube ohne weiteres auf die Leistungen der Großausführung übertragen, so ist es nötig, daß die Strömungen bei beiden Schrauben einander vollkommen geometrisch ähnlich sind. Dazu ist aber nicht nur völlige geometrische Ähnlichkeit der Gestalt nötig, sondern wirklich der ganzen Strömung. Sieht man zunächst vom Einfluß der Kompressibilität ab, so ergibt sich, daß geometrische Ähnlichkeit bedingt ist durch gleiches Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften.

Die Trägheitskräfte in einem Element einer Stromröhre sind verhältig der Dichte (Dimension ϱ), dem Quadrat der Geschwindigkeit (Dimension v^2) und einer Querschnittsfläche (Dimension l^2), die Zähigkeitskräfte der absoluten Zähigkeit (Dimension μ), dem Geschwindigkeitsgefälle quer zur Strömungsrichtung (Dimension v/l) und der Oberfläche (Dimension l^2). Daraus ergibt sich, daß

$$\frac{\varrho\, v^2\, l^2}{\mu \frac{v}{l} \cdot l^2} = \frac{v\, l}{\frac{\mu}{\varrho}} = \frac{v\, l}{\nu} \tag{7, 1}$$

für beide Schrauben gleich sein muß, damit in allen Strömungselementen das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften gleich und damit der Strömungsverlauf ähnlich ist. Diese Kenngröße heißt der REYNOLDSsche Kennwert. ν, die kinematische Zähigkeit, ist bekannt. Als charakteristische Geschwindigkeit v einer Schraube kann man die Umfangsgeschwindigkeit u_a oder die Fluggeschwindigkeit v_0 oder die Spitzengeschwindigkeit $w_a = \sqrt{v_0^2 + u_a^2}$ ansehen. Als charakteristische Länge l kann man den Durchmesser $D = 2\,R$ oder die mittlere Blattbreite t_m ansehen. Als REYNOLDSschen Kennwert der Schraube wollen wir

$$\mathfrak{R}_s = \frac{u\,D}{\nu} = \frac{2\,\omega\,R^2}{\nu} \tag{7, 2}$$

einführen.

b) Der REYNOLDSsche Kennwert der Flügelprofile. Die Strömungsvorgänge an der Schraube sind bedingt durch die Verhältnisse an den Flügelprofilen. Diese sind allerdings nicht ganz vergleichbar mit den Strömungsverhältnissen der ebenen Profilumströmung, wie sie in guter Annäherung bei Modellversuchen an Tragflügelprofilen verwirklicht werden. Durch die Drehung der Schraube wird nämlich die in der Grenzschicht enthaltene Luft nach den Blattenden zu abgedrängt. Sieht man jedoch zunächst von diesem Einfluß ab, so kann man von der ebenen Profilumströmung auf die Strömung um die Flügelprofile

schließen, wenn außer der geometrischen Ähnlichkeit auch der REYNOLDSsche Kennwert der gleiche ist. Als charakteristische Geschwindigkeit v hat man die Anströmgeschwindigkeit w_∞ zu betrachten, als charakteristische Länge die Profiltiefe t, so daß als REYNOLDSscher Kennwert der Flügelprofile sich ergibt

$$\mathfrak{R} = \frac{w_\infty t}{\nu}. \tag{7,3}$$

c) Der kritische REYNOLDSsche Kennwert und der überkritische und der unterkritische Strömungsbereich einer Schraube. Obwohl es nun für eine direkte Übertragung eines Modellversuches auf die Großausführung wesentlich ankommt auf die Gleichheit der REYNOLDSschen Kenngröße, ist man doch nur selten in der Lage, diese Bedingung einzuhalten. Es ist deshalb ein erfreulicher Umstand, daß auch größere Änderungen des REYNOLDSschen Kennwertes im allgemeinen nur geringen und meist leicht abschätzbaren Einfluß auf die Strömungsverhältnisse an einem Flügelprofil haben, nämlich solange man sich im überkritischen Gebiet befindet. Während nämlich unterhalb eines kritischen REYNOLDSschen Kennwertes $\mathfrak{R}_{\text{kr}}$ die Strömung laminar ist, ist sie genügend oberhalb des Kennwertes, abgesehen von einer leicht berücksichtigbaren laminaren Anlaufzone längs des Flügelprofils turbulent.

Während nun diese kritische REYNOLDSsche Zahl bei ebenen Platten bei

$$\mathfrak{R}_{\text{kr}} \backsim 500000$$

liegt, ist sie bei den auf der Saugseite runden Profilen wesentlich kleiner und ist im Mittel zu $\mathfrak{R}_{\text{kr}} \backsim 150000$ anzunehmen. In Nähe der Nabe ist aber die Strömungsgeschwindigkeit wesentlich kleiner als die Strömungsgeschwindigkeit an der Spitze. Es gibt also meist bei jeder Schraube im Inneren einen laminaren Strömungsbereich. Wir wollen nun die Grenze zwischen dem überkritischen turbulenten und dem unterkritischen laminaren Bereich abschätzen.

Hierzu setzen wir näherungsweise als Anströmgeschwindigkeit $u = r\omega = yR\omega$ und statt der örtlich vorhandenen Blattbreite t die mittlere t_m. Als kritischen REYNOLDSschen Kennwert setzen wir $\mathfrak{R}_{\text{kr}} = 150000$ ein. Die gesuchte Grenze liegt also bei

$$y \cdot \frac{R\omega t_m}{\nu} = 150000,$$

$$y = \frac{150000}{R\omega t_m/\nu} = \frac{150000}{t_m/2R} \cdot \frac{1}{2\omega R^2/\nu} = \frac{150000}{t_m/D} \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}_s}. \tag{7,4}$$

In Abb. 66 ist als Schaubild die Abhängigkeit zwischen dem Blattbreitenverhältnis t_m/D, dem REYNOLDSschen Kennwert $\mathfrak{R}_s = uD/\nu$ der Schraube und der Lage y des Übergangs von der laminaren Strömung zur turbulenten dargestellt.

Man sieht hieraus, daß das unterkritische Gebiet bei der Großausführung praktisch vernachlässigbar ist. Bei Modellschrauben jedoch kann es von Bedeutung sein, wenn der Modellmaßstab zu klein ist. Man wird sich deshalb im allgemeinen bemühen, mit nicht zu kleinen Modellen Schraubenversuche durchzuführen [Lit. 37, 38, 39].

d) Der Machsche Kennwert für Schrauben. Bei entsprechend großen Umfangsgeschwindigkeiten macht sich die Kompressibilität der Luft bemerkbar. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Schraubenflügel hervorgerufenen Druckstörungen in der umgebenden Luft,

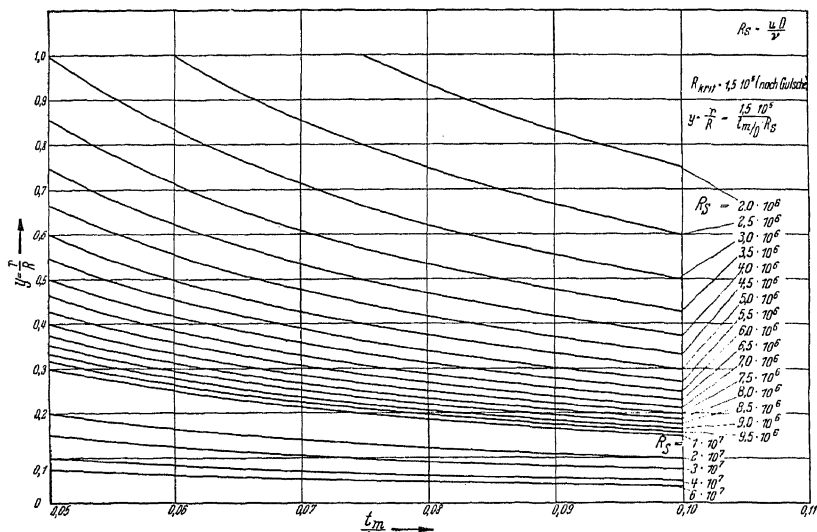



Abb. 66. Lage der Übergangsstelle von unterkritischer zu überkritischer Profilumströmung für eine kritische Reynoldssche Zahl $R_{krit} = 150\,000$ in Abhängigkeit vom Blattbreitenverhältnis t_m/D und der Reynoldsschen Zahl $R_s = uD/\nu$ der Schraube.

die Schallgeschwindigkeit w_s kann dann nicht mehr als groß gegenüber der Anströmgeschwindigkeit w_∞ der Flügelprofile angesehen werden. Die Schallgeschwindigkeit ist (6, 3)

$$w_s = 20{,}1\sqrt{T},$$

wobei T die absolute Temperatur in Grad ist.

Die Anströmgeschwindigkeit eines Flügelprofils ist gegeben durch

$$w_\infty \sim \sqrt{r^2\omega^2 + v_0^2} = \sqrt{y^2R^2\omega^2 + v_0^2} = u_a\sqrt{y^2 + \lambda_0^2},$$

wobei u_a die Spitzenumfangsgeschwindigkeit, $\lambda_0 = v_0/u$ der noch zu erklärende Fortschrittsgrad der Schraube ist. Im wesentlichen kommt es auf die Anströmgeschwindigkeit der Flügelenden an. Für diese ist $y = 1$, also

$$w_{\infty a} \sim u_a\sqrt{1 + \lambda_0^2}.$$

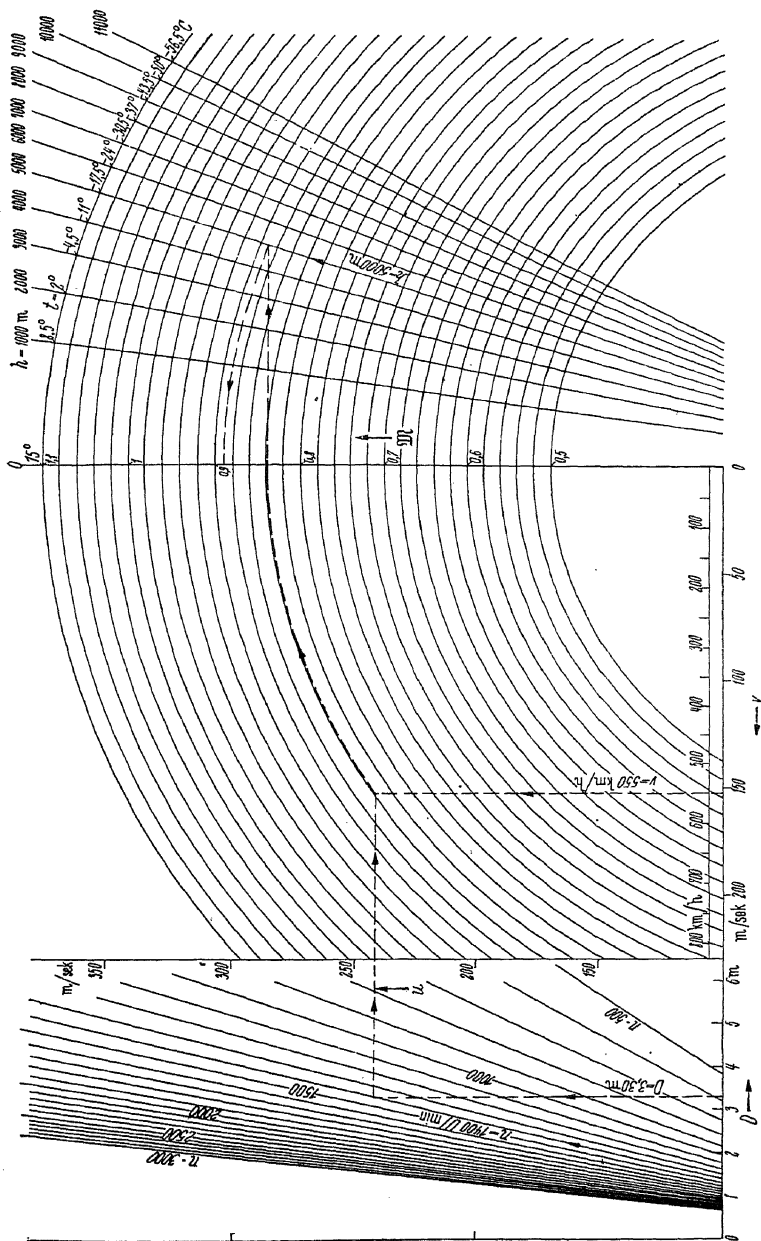



Abb. 67. Bestimmung der MACHschen Zahl aus Durchmesser D [m], Drehzahl n [min^{-1}], Fluggeschwindigkeit v [km/h] und Flughöhe h [km].

Das Verhältnis der Spitzengeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit ist die MACHsche Kenngröße

$$\mathfrak{M} = \sqrt{1 + \lambda_0^2}\,\frac{u_a}{w_s} \tag{7,5}$$

der Luftschraube.

Zur Berechnung der MACHschen Zahl aus Durchmesser, Drehzahl, Fluggeschwindigkeit und Flughöhe kann man sich des in Abb. 67 wiedergegebenen Nomogramms bedienen.

8. Die wichtigsten Kenngrößen für die Kraftbeziehungen, der Fortschrittsgrad und der Wirkungsgrad.

a) Der Schubbelastungsgrad, die Schubziffer und die Leistungsziffer. Um von einer Modellschraube auf die Großschraube zu schließen, bedient man sich zweckmäßig der dimensionslosen Kenngrößen für den Schub, das Drehmoment und die Leistung. Diese ermöglichen nicht nur eine dimensionsfreie und damit allgemeingültige Darstellung von Versuchsergebnissen, sondern auch ein recht bequemes Rechnen.

Aus dem Schub S, der Leistung N bzw. dem Drehmoment M_d, der Flug- oder Fortschrittsgeschwindigkeit v, der Spitzenumfangsgeschwindigkeit u, der Luftdichte ϱ und der Schraubenkreisfläche $F_s = \pi R^2 = \pi/4\, D^2$ bzw. dem Schraubenradius R lassen sich folgende wichtige Kenngrößen bilden:

a) Schubbelastungsgrad

$$c_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} v^2 \pi R^2} = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} v^2 \frac{\pi}{4} D^2}. \tag{8,1}$$

b) Schubziffer

$$k_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} u^2 \pi R^2} = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi}{4} D^2}. \tag{8,2}$$

c) Drehmomentziffer und Leistungsziffer

$$k_d = k_l = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} u^2 \pi R^3} = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u^3 \pi R^2} = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi}{8} D^3} = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u^3 \frac{\pi}{4} D^2}. \tag{8,3}$$

Außer diesen Größen werden gelegentlich auch gebraucht

d) Leistungsbelastungsgrad

$$c_l = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} v^3 \pi R^2}, \qquad ,4)$$

e) Drehmomentbelastungsgrad

$$c_d = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} v^2 \pi R^3}. \qquad 8,5)$$

Der Schubbelastungsgrad, der Leistungsbelastungsgrad und der Drehmomentbelastungsgrad setzen also den Schub, die Leistung und das Drehmoment in Beziehung zur Fluggeschwindigkeit v, die Schubziffer, die Leistungsziffer und die Drehmomentziffer in Beziehung zur Spitzenumfangsgeschwindigkeit u.

Für die Fortschrittsgeschwindigkeit $v = 0$, also für die Schraube am Stand, wird

$$c_s = \infty, \qquad c_l = \infty, \qquad c_d = \infty.$$

Für die Kennzeichnung der Verhältnisse am Stand muß man sich also der Werte k_s, $k_d = k_l$ bedienen, welche für $v = 0$ endlich bleiben.

b) Der Fortschrittsgrad. Um den Betriebszustand einer Schraube aber eindeutig festlegen zu können, muß man auch noch den Fortschrittsgrad der Schraube einführen. Unter dem Fortschrittsgrad der Schraube versteht man das Verhältnis von Flug- oder Fortschrittsgeschwindigkeit v zur Umfangsgeschwindigkeit u:

$$\lambda = \frac{v}{u}. \tag{8, 6}$$

Unter Benutzung von λ bestehen dann folgende Zusammenhänge:

$$\left.\begin{aligned} k_s &= \lambda^2 c_s \\ k_d &= \lambda^2 c_d, \\ k_l &= \lambda^3 c_l. \end{aligned}\right\} \tag{8, 7}$$

Zwei Fortschrittsgrade sind ausgezeichnet. Erstens der Fortschrittsgrad $\lambda = 0$. Dieser ist vorhanden, wenn $v = 0$ wird. Er kennzeichnet also die Verhältnisse der Schraube am Stand. Zweitens der Fortschrittsgrad $\lambda = \lambda^*$, für welchen der Schub der Schraube verschwindet. Dieser Fortschrittsgrad entspricht also dem aerodynamischen Steigungsgrad, so daß

$$\lambda^* = \frac{H^*}{\pi D} = \operatorname{tg} \beta^* \tag{8, 8}$$

wird. λ^* spielt für die aerodynamische Kennzeichnung eine große Rolle.

c) Kenngrößen für Schräganblasung. Der Kennzeichnung der Kräfte und Momente der Luftschraube bei Schräganblasung und Flugzeugdrehung legt man zweckmäßig ein flugzeugfestes rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen Anfangspunkt etwa mit dem Schwerpunkt der Luftschraube zusammenfällt. Die $+x$-Achse zeigt nach vorne und fällt mit der Schraubenachse zusammen, die y-Achse zeigt nach rechts, die z-Achse nach unten, Abb. 68.

Die von der Luftschraube auf das Flugzeug ausgeübten Kräfte in der Richtung dieser Achsen seien X, Y, Z, die Momente der Schraubenkräfte um diese Achsen seien L, M, N, und zwar rechtsdrehend positiv. Fallen die Schraubenachsenrichtung x und die Flugrichtung (Anström-

richtung) nicht zusammen, so sei als Anstellwinkel α definiert der Winkel zwischen der x-Achse und der Projektion der Flugrichtung in die xz-Ebene, als Schiebewinkel β der Winkel zwischen der x-Achse und der Projektion der Flugrichtung in die xy-Ebene. Ist $\frac{\pi \cdot D^2}{4} = F_s$ die Schraubenkreisfläche, $u_a = \omega_s \cdot D/2$ die Spitzenumfangsgeschwindig-

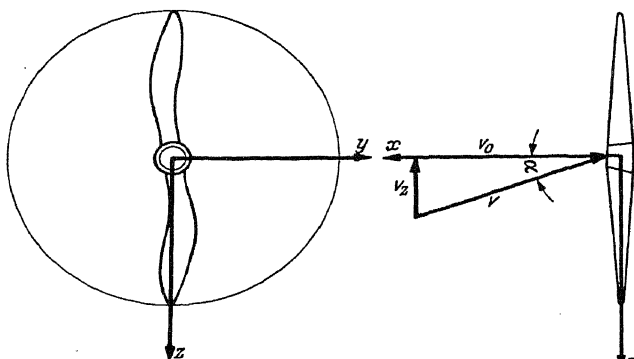



Abb. 68. Erläuterung des Anstellwinkels α einer Luftschraube.

keit der Schraube, so ergeben sich folgende Schraubenkraft- und Schraubenmomentbeiwerte

$$k_x = \frac{X}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^2}{4}}; \quad k_y = \frac{Y}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^2}{4}}; \quad k_z = \frac{Z}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^2}{4}}, \tag{8,9}$$

$$k_L = \frac{L}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^3}{8}}; \quad k_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^3}{8}}; \quad k_N = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^3}{8}}. \tag{8, 10}$$

Für Anstellungs- und Schiebefreiheit fällt die Richtung der Schraubenkraft P mit der Richtung der Schraubenachse zusammen. Dann ist also

$$S = X = P. \tag{8, 11}$$

Im allgemeinen ist aber der Schraubenschub, d. h. die in Richtung der Schraubenachse fallende Komponente der Schraubenkraft

$$S = X = P_x. \tag{8, 12}$$

Die in Flugbahnrichtung fallende Komponente der Schraubenkraft, der aerodynamische Schraubenschub, ist

$$S_a = X_a = P_{x_a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}} [X + Y \operatorname{tg}\beta + Z \operatorname{tg}\alpha]. \tag{8, 13}$$

Ist M_d das Drehmoment einer rechtsdrehenden Schraube, so ist das Reaktionsmoment $L = - M_d$ sinngemäß unabhängig von Anstellwinkel

und Schiebewinkel. Bezeichnet man mit aerodynamischer Schubziffer

$$k_{s_a} = \frac{S_a}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^2}{4}}$$

und mit Drehmomentziffer oder Leistungsziffer

$$k_d = k_l = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} u_a^2 \frac{\pi \cdot D^3}{8}},$$

so ist also $k_s = k_x$

$$k_{s_a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta}} [k_x + k_y \cdot \mathrm{tg}\,\beta + k_z \cdot \mathrm{tg}\,\alpha], \qquad (8, 14)$$

$$k_d = k_l = -k_L. \qquad (8, 15)$$

Die Fluggeschwindigkeit sei v. Ihre Komponenten sind dann

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta}}, \\ v_y &= v \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta}}, \\ v_z &= v \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8, 16)$$

Unter dem Fortschrittsgrad der Schraube wird

$$\lambda_a = \frac{v_x}{u_a} \qquad (8, 17)$$

verstanden.

d) Der Wirkungsgrad. Unter dem Wirkungsgrad einer Schraube versteht man das Verhältnis der Nutzleistung N_n zur aufgebrachten Leistung N. Die Nutzleistung einer Schraube ist die Überwindung eines Widerstandes bzw. die Erzeugung eines Schubs S_a bei einer Fortschrittsgeschwindigkeit v. Die Nutzleistung ist also, genau genommen, wenn ν die Schräganblasung der Luftschraubenachse bedeutet,

$$N_n = v \cdot S_a = v\,(X \cos\nu + Q \sin\nu)$$

und damit der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{v\,S_a}{N} = \frac{v\,(X \cos\nu + Q \sin\nu)}{N}. \qquad (8,18)$$

Im allgemeinen genügt jedoch zur Festlegung des Wirkungsgrades mit $\nu \to 0$, $S_a \to S$ die Beziehung

$$\eta = \frac{v \cdot S}{N}.$$

Unter Benutzung der schon eingeführten Kenngrößen ergibt sich also

$$\eta = \lambda \frac{k_s}{k_d}. \qquad (8, 19)$$

Der Wirkungsgrad ist also für die Schraube am Stand nach obiger Festlegung wegen $\lambda = 0$

$$\eta = 0.$$

Ebenso wird $\eta = 0$ für den Fall, daß der Fortschrittsgrad gleich dem Steigungsgrad $\lambda = \lambda^*$ wird, da hierbei definitionsgemäß $k_s = 0$ und praktisch k_d zwar klein, aber doch endlich bleibt.

e) Einige Umformungen der Kenngrößen und gegenseitige Beziehungen. In manchen Fällen ist es zweckmäßig, statt der wirklichen Leistung N bzw. des wirklichen Drehmomentes M_d und des wirklichen Schubs S die auf die Normaldichte $\varrho_0 = 0{,}125$ kg sec²/m⁴ bezogene Normalleistung oder Gleichdruckleistung $N_0 = \frac{\varrho_0}{\varrho} N$ bzw. das Normaldrehmoment oder Gleichdruckdrehmoment $M_{d_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho} M_d$ und den Normalschub oder Gleichdruckschub $S_0 = \frac{\varrho_0}{\varrho} S$ einzuführen.

Weiter ist es manchmal zweckmäßig statt der sekundlichen Drehzahl die minutliche Drehzahl zu benutzen und ebenso die Leistung in PS statt in mkg/sec anzugeben.

Benutzt man also N_0 [PS] statt N [mkg/sec], M_{d_0} [mkg] statt M_d [mkg], S_0 [kg] statt S [kg] und n [min⁻¹] statt n [sec⁻¹], so werden Schub- und Leistungsziffer

$$\left.\begin{aligned} k_s &= \frac{7350 \cdot S_0}{D^4 \cdot n^2}\,, \\ k_d = k_l &= \frac{14700}{D^5} \cdot \frac{M_{d_0}}{n^2} = \frac{10500000}{D^5} \cdot \frac{N_0}{n^3}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8, 20)$$

Hierbei ist der erste Faktor für eine gegebene Schraube konstant, der zweite Faktor ist vom Betriebszustand abhängig.

In den amerikanischen und englischen Arbeiten werden verwendet die Zeichen

T für den Schub [kg],
Q für das Moment [mkg],
P für die Leistung [mkg/sec],
V für die Geschwindigkeit [m/sec].

Als Kenngrößen werden verwendet in amerikanischen bzw. englischen Arbeiten

$$\left.\begin{aligned} C_T &= k_T = \frac{T}{\varrho n^2 D^4}\,, \\ C_Q &= k_Q = \frac{Q}{\varrho n^2 D^5}\,, \\ C_P &= k_P = \frac{P}{\varrho n^3 D^5}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8, 21)$$

Mit den in Deutschland gebräuchlichen Kennziffern besteht der Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} k_s &= \frac{8}{\pi^3} C_T , \\ k_d = k_l &= \frac{16}{\pi^3} C_Q = \frac{8}{\pi^4} C_P . \end{aligned}\right\} \qquad (8, 22)$$

Als Fortschrittsmaß wird in englischen und amerikanischen Arbeiten benutzt

$$J = \frac{V}{n D} . \qquad (8, 23)$$

Der Zusammenhang mit der deutschen Bezeichnung λ ist

$$\lambda = \frac{J}{\pi} . \qquad (8, 24)$$

Der Wirkungsgrad wird

$$\eta = \frac{T V}{P} = \frac{J C_T}{2 \pi C_Q} = \lambda \frac{k_s}{k_d} . \qquad (8, 25)$$

Eine häufige Aufgabe ist die Untersuchung des Einflusses des Durchmessers D und der Drehzahl n einer Schraube, wenn Leistung N, Fluggeschwindigkeit v und Luftdichte ϱ, d. h. also die Flughöhe gegeben sind. Im Leistungsbelastungsgrad (8, 4)

$$c_l = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} v^3 \frac{\pi D^2}{4}}$$

ist außer den gegebenen Größen nur die gesuchte Größe D, der Durchmesser, enthalten. Aus den gegebenen Größen N, v, ϱ und der gesuchten Größe n läßt sich die Dimensionslose

$$C_S = \frac{v \varrho^{1/5}}{N^{1/5} n^{2/5}} . \qquad (8, 26)$$

bilden. Diese Kenngröße heißt die Geschwindigkeits-Leistungszahl. Sie hängt mit den schon abgeleiteten Kenngrößen Leistungsziffer k_d und Fortschrittsgrad λ durch die Beziehung

$$C_S = (8 \pi)^{1/5} \frac{\lambda}{k_d^{1/5}} \backsim 1{,}91 \frac{\lambda}{k_d^{1/5}} \qquad (8, 27)$$

zusammen.

Bei der Untersuchung von Verstellschrauben kann man häufig das Drehmoment des Motors bei einer gegebenen Reglerstellung als von der Drehzahl unabhängig zugrunde legen. In diesem Falle darf man das Drehmoment M_d, die Fluggeschwindigkeit v und die Luftdichte ϱ, d. h. also die Flughöhe, als konstant ansehen. Man hat dann wieder nach dem Einfluß von Drehzahl und Durchmesser zu fragen. Im Drehmomentbelastungsgrad (8, 5)

$$c_d = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} v^2 \frac{\pi D^3}{8}}$$

ist außer den gegebenen Größen M_d, v, ϱ nur die gesuchte Größe D enthalten. Aus den gegebenen Größen M_d, v, ϱ und der gesuchten Drehzahl n läßt sich die Dimensionslose

$$C_{S_d} = \frac{v\,\varrho^{1/5}}{M_d^{1/5}\,n^{3/5}} \qquad (8,28)$$

bilden. Diese Kenngröße möge die Geschwindigkeits-Drehmomentenzahl heißen. Sie hängt mit den früheren abgeleiteten Kenngrößen durch die Beziehung

$$C_{S_d} = (4\pi)^{2/5}\,\frac{\lambda}{k^{1/5}} = (2\pi)^{1/5}\,C_S \qquad (8,29)$$

zusammen.

Ist der Schub S, die Geschwindigkeit v und die Luftdichte ϱ als gegeben zu betrachten und der Einfluß von Drehzahl und Durchmesser zu untersuchen, so kommt als Dimensionslose, welche die gegebenen Größen S, v, ϱ und die gesuchte Größe D enthält, der Schubbelastungsgrad (8, 1)

$$c_S = \frac{S}{\frac{\varrho}{2}\,v^2\,\frac{\pi D^2}{4}}$$

in Betracht. Aus den gegebenen Größen S, v, ϱ und der gesuchten Größe n ergibt sich die Dimensionslose

$$C_{S_s} = \frac{v\,\varrho^{1/4}}{S^{1/4}\,n^{1/2}}\,. \qquad (8,30)$$

Sie möge die Geschwindigkeits-Schubzahl heißen. Sie hängt mit den früher abgeleiteten Kenngrößen durch

$$C_{S_s} = (8\pi)^{1/4}\,\frac{\lambda}{k_s^{1/4}} = \frac{C_S^{5/4}}{\eta^{1/4}} \qquad (8,31)$$

zusammen.

Eine weitere wichtige Kenngröße ist die Schubzahl

$$\sigma = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{k_s}{k_d} = \frac{R\,S}{M_d}\,. \qquad (8,32)$$

Sie setzt Schraubenradius, Schraubenschub und Drehmoment in unmittelbare Beziehung.

Da für $\lambda \to 0$ auch $\eta \to 0$ wird, so wird für $\lambda > 0$, also in der Nachbarschaft der Verhältnisse am Stand durch σ auch der Anstieg $d\eta/d\lambda$ der Wirkungsgradkurve gegeben. Zur Beurteilung der Verhältnisse am Stand dient auch vielfach der Standschubgütegrad [Lit. 54]

$$\zeta_s = \frac{1}{2^{2/3}}\cdot\frac{k_s}{k_l^{2/3}}\,.$$

Er gibt, wie später noch ausgeführt wird, an, wie sich der am Stande erreichte Schub zu dem verhält, der sich bei gleichem Durchmesser

unter idealisierten Annahmen bei gleicher Leistungsaufnahme erreichen ließe. Statt dessen kann man auch den Standleistungsgütegrad

$$\zeta_l = \frac{1}{2} \frac{k_s^{3/2}}{k_l}$$

benutzen, der das Verhältnis der unter idealisierenden Annahmen bei gleichem Durchmesser für den erreichten Standschub aufzuwendenden Leistung zur wirklich aufgewandten Leistung angibt. Dabei besteht der Zusammenhang

$$\zeta_l = \zeta_s^{3/2}.$$

9. Durchführung von Schraubenversuchen.

a) Standversuche. Steht kein Windkanal zur Verfügung und sieht man von der Möglichkeit des Versuchs am fliegenden Flugzeug, von dem im späteren noch gesprochen werden soll, ab, so kann man die Luftschraube nur am Stand, d. h. bei einem Fortschrittsgrade $\lambda = 0$ untersuchen.

Solche Standversuche geben Aufschluß über das aerodynamische Verhalten der Luftschraube beim Beginn des Starts und lassen sich ohne allzu großen Aufwand an Mitteln auch mit wirklichen Luftschrauben statt nur mit Modellen durchführen. Hierzu dienen die sog. Luftschraubenprüfstände. Beim Entwurf solcher Prüfstände ist auf die Unterbringung in einer möglichst großen Halle zu achten, damit nicht durch die verhältnismäßige Kleinheit der Halle die Zuströmung und Abströmung der Luft in merkbarem Maße geändert wird.

Der Luftschraubenprüfstand muß es ermöglichen, den Schub und das Drehmoment bei verschiedenen Drehzahlen zu messen.

Für die Schubmessung können grundsätzlich alle bekannten Verfahren, mit denen Kräfte gemessen werden können, angewendet werden. Man kann sie einteilen in solche, bei denen Gleichgewicht zwischen Kraft und Gegenkraft nur herrscht, wenn die Angriffspunkte der beiden in die Ausgangslage, die sie vor einer Störung hatten, zurückgekehrt sind, sog. Nullverfahren, und in solche, bei denen Gleichgewicht herrscht, wenn die Angriffspunkte um einen der Kraft verhältigen Betrag verschoben sind. Zu der ersten Klasse gehören die Hebel- und Laufgewichtswaagen, zu der zweiten die Neigungs- und Federwaagen und die hydraulischen Dosen. Die Entscheidung, welche dieser vielen Möglichkeiten gewählt werden soll, hängt von der Zweckmäßigkeit ab. Aus diesem Grunde zeigen die neueren Ausführungen von Luftschraubenprüfständen automatische Wiegeeinrichtungen, und zwar werden hydraulische Dosen bevorzugt, weil sie einen sehr kleinen Verschiebeweg bei ausreichender Meßgenauigkeit benötigen.

Bei jedem der möglichen Wiegeverfahren muß eine Verschiebung der Bauelemente, welche die Luftschraubenkräfte an die Meßeinrichtung

weiterleiten, möglich sein. Bei der Schubmessung bedeutet das, daß die Luftschraubenwelle in ihrer Längsrichtung beweglich ist, wobei sich Gleitlager bewährt haben. Es ist ferner nötig, daß dieser längsverschiebliche Teil der Welle mit der übrigen Wellenleitung bzw. der Antriebsmaschine durch eine Kupplung verbunden ist, die das von der Luftschraube aufgenommene Drehmoment überträgt, ohne der Längsverschieblichkeit einen nennenswerten Widerstand entgegenzusetzen. Es genügt zu diesem Zwecke eine Kupplung, deren eine Hälfte Klauen nach der Art der üblichen Klauenkupplung besitzt, deren andere Hälfte jedoch statt der Gegenklauen radialstehende Bolzen besitzt, auf welchen je ein Querkugellager aufgesteckt wird.

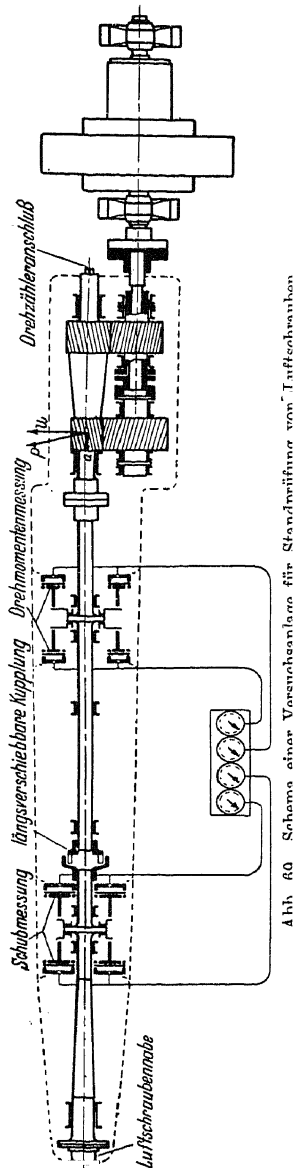



Abb. 69. Schema einer Versuchsanlage für Standprüfung von Luftschrauben.

Die Drehmomentenmessung kann durch ein Torsionsdynamometer üblicher Bauart erfolgen; eine weitere Möglichkeit besteht in einer Einrichtung, welche gestattet, eine Umfangskraft auf hydraulischem Wege in eine Längskraft zu verwandeln und diese Längskraft nach denselben Verfahren wie den Schub zu messen. An die Stelle der hydraulisch bewirkten Richtungsänderung können auch mechanische Elemente treten, wie Winkelhebel, schiefe Ebene usw. Ebenfalls auf dem Prinzip der schiefen Ebene beruht die Verwendung der Schrägverzahnung in dem zwischen Antriebsmotor und Luftschraubenwelle meist aus anderen Gründen schon notwendigen Getriebe zur Drehmomentenmessung. Der Zahndruck steht senkrecht zur Zahnflanke; Gleichgewicht zwischen Umfangskraft und resultierendem Zahndruck herrscht nur, wenn eine Längskraft vorhanden ist, deren Größe aus dem Kräfterechteck bestimmt wird. Eine so aufgebaute Versuchsanlage zeigt Abb. 69.

Obwohl im allgemeinen mit den oben beschriebenen Einrichtungen eine hohe Meßgenauigkeit zu erzielen ist, sollte den Ergebnissen der Schub- und Drehmomentenmessung keine übertriebene Bedeutung beigemessen werden, weil sie mit noch anderen

Fehlermöglichkeiten behaftet ist, die mit der Güte der Meßeinrichtung als solcher nichts zu tun haben, nämlich Einfluß der Halle, der Bodennähe und des während der Messung vorhandenen Windes, bei welchem Stärke, Richtung und Gleichmäßigkeit berücksichtigt werden müssen. Wind von vorn oder Wind von hinten bedeutet einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Fortschrittsgrad, und da auch in der Nähe von $\lambda = 0$ die Dreh- und Schubziffern k_d und k_s sich je nach Konstruktion der Schraube mehr oder weniger stark mit dem Fortschrittsgrad ändern, so kann die Wiederholung einer Messung bei anderen Windverhältnissen abweichende Ergebnisse haben. Obendrein bedeutet der Wind eine Ände-

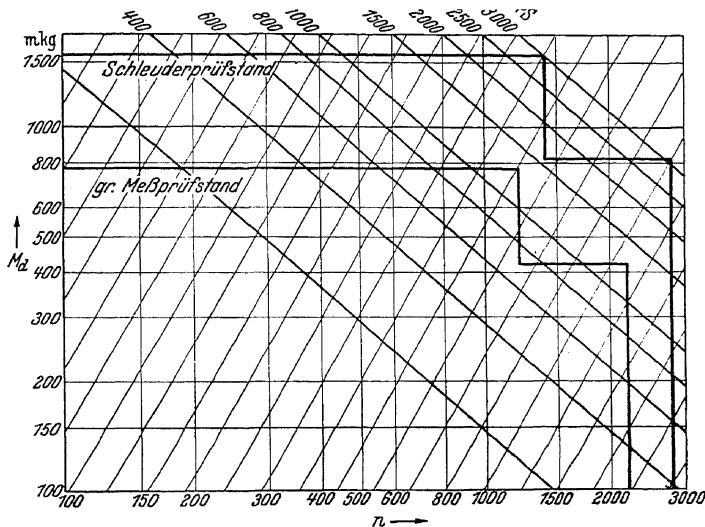



Abb. 70. Betriebsbereiche des Schleuderprüfstandes und des großen Meßprüfstandes der DVL

rung des Turbulenzgrades der von der Luftschraube bei der Standprüfung angesaugten Luft und kann, da je nach Steigung die Luftschraube mehr oder weniger in abgerissenem Zustand arbeitet, so die Ergebnisse erheblich beeinflussen. Berücksichtigt muß auch werden, daß die im Schraubenstrahl liegenden Flugzeugteile einen Einfluß auf die Schubziffer haben, während man sich beim Luftschraubenprüfstand bemüht, dem „Freifahrzustand" möglichst nahezukommen. Was den Einfluß der Halle betrifft, so ist er um so bedeutender, je kleiner der Hallenquerschnitt im Verhältnis zur Schraubenkreisfläche ist, und zwar wirkt er sowohl auf Schub als auch auf Drehmoment verkleinernd.

Vor Durchführung einer Standmessung ist es zweckmäßig, eine Schleuderprüfung vorzunehmen. Der Schleuderprüfstand gestattet eine Erprobung mit Überdrehzahl und ist durch entsprechende Sollbruch-

organe, z. B. eine sog. Bruchkupplung, vor Beschädigungen gesichert, falls die Schraube den mechanischen Beanspruchungen nicht standhält. Abb. 70 zeigt als Beispiel die Betriebsbereiche des Schleuderprüfstandes und des Meßprüfstandes der DVL.

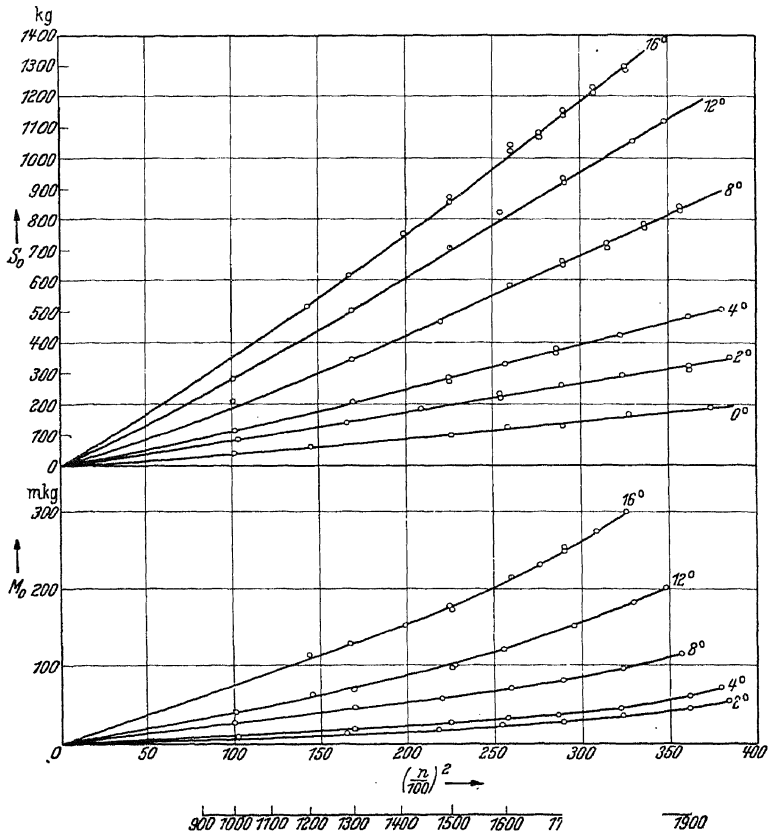



Abb. 71. Standschub und Standdrehmoment einer Verstellschraube.

Die DVL-Schraubenprüfstände dienen im allgemeinen dazu, die von den Herstellerwerken oder den Verbrauchern nach Gutdünken und Notwendigkeit angelieferten Schrauben hinsichtlich Schub und Drehmoment in Abhängigkeit von der Drehzahl zu untersuchen. Den Auftraggebern werden die Ergebnisse auf Normaldichte umgerechnet in Form eines Kurvenblattes, etwa so wie Abb. 71 zeigt, mitgeteilt.

Einem Forschungszweck wurden im großen ganzen die Schraubenprüfstände der DVL bisher nicht dienstbar gemacht. Die Großzahl der durchgeführten Versuche bietet aber die Möglichkeit zu einer Auswertung auf statistischer Grundlage. Zunächst wurde versucht, den

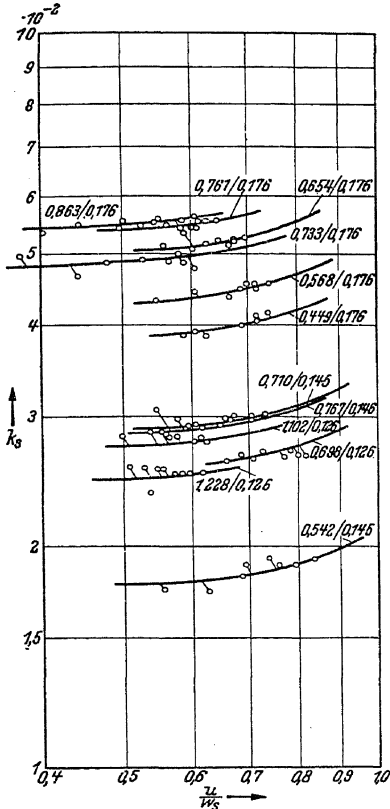
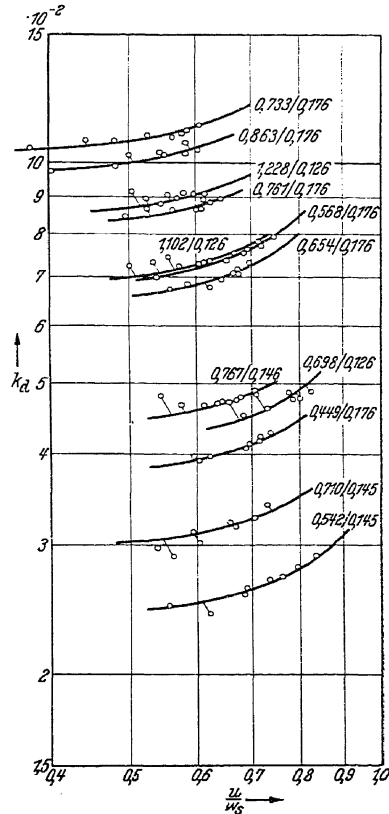
Einfluß der Annäherung der Spitzenumfangsgeschwindigkeit u an die Schallgeschwindigkeit w_s zu erkennen. In Abb. 72 und 73 ist die ermittelte Abhängigkeit der Schub- und der Drehmomentenziffer für dreiflügelige Metallschrauben von der MACHschen Zahl u/w_s dargestellt.

Dreiflügelige Metallschrauben.

Abb. 72. Schubziffer k_s. Abb. 73. Momentenziffer k_d.

Das Ergebnis ließ sich durch die Gleichungen

$$k_s = k_{s_0} \cdot e^{\left(\frac{u}{\alpha_s w_s}\right)^4}, \qquad (\alpha_s = 1{,}400) \qquad (9, 1)$$

$$k_d = k_{d_0} \cdot e^{\left(\frac{u}{\alpha_d w_s}\right)^4}, \qquad (\alpha_d = 1{,}150) \qquad (9, 2)$$

interpolieren.

Auf diese Weise war es möglich, allen untersuchten Schrauben eine reduzierte Schubziffer k_{s_0} und eine reduzierte Drehmomentenziffer k_{d_0} zuzuordnen. Für Schrauben aus den Jahren 1933 bis 1934 sind die

Ergebnisse in Abb. 74 und 75 wiedergeben. Als Abszisse ist das Steigungsverhältnis H/D gewählt. Das Blattbreitenverhältnis $\mathfrak{z} \cdot t/D$ ist als Parameter den einzelnen erhaltenen Punkten beigeschrieben.

Während die Drehmomentenziffer k_d bei gleichem Blattbreitenverhältnis noch stark mit dem Steigungsverhältnis ansteigt, steigt die Schubziffer im untersuchten Bereich offenbar nur noch wenig an.

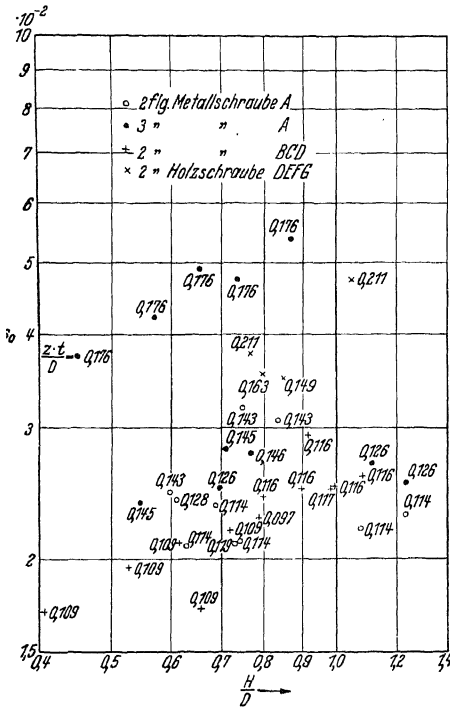



Abb. 74. Schubziffer bei kleiner MACHscher Zahl am Stande k_{s_0} in Abhängigkeit vom Steigungs- und Blattbreitenverhältnis $\mathfrak{z}\, t/D$.

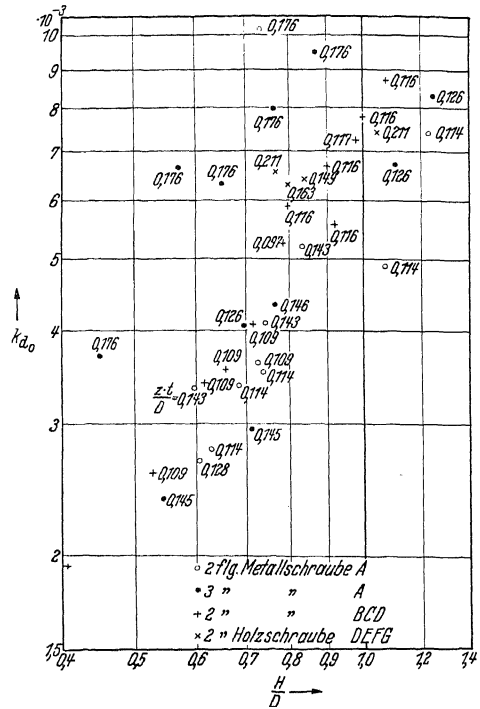



Abb. 75. Momentenziffer bei kleiner MACHscher Zahl am Stande k_{d_0} in Abhängigkeit vom Steigungs- und Blattbreitenverhältnis $\mathfrak{z}\, t/D$.

Eine Vergrößerung des Blattbreitenverhältnisses bringt selbstverständlich eine Vergrößerung von k_s wie von k_d zustande.

Die Folge dieses Verhaltens ist aber, daß sowohl die Schubzahl $\sigma_0 = \frac{k_{s_0}}{k_{d_0}} = \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)_0$ wie auch der Standschubgütegrad $\zeta_{s_0} = 1 \; \frac{k_{s_0}}{k_{d_0}^{2/3}}$ mit zunehmendem Steigungsverhältnis schlechter werden, wenn auch diese Verschlechterung durch Vergrößerung der Blattbreite etwas gemildert wird. Bei weiterer Vergrößerung des Steigungsverhältnisses über den untersuchten Bereich hinaus ist keine Verbesserung der Verhältnisse zu erwarten.

Die starke Abhängigkeit von

$$\eta_u = \frac{k_s / k_{s_0}}{k_d / k_{d_0}} = e^{-\left(\frac{u}{\alpha_\eta w_s}\right)^4} \qquad (\alpha_\eta \sim 1{,}34) \qquad (9,3)$$

von der MACHschen Zahl am Stand, auch im untersuchten unterkritischen Bereich, wie es Abb. 76 entspricht, steht in Gegensatz zu dem Verhalten bei endlichem Fortschrittsgrad, wie es ausländischen Versuchsreihen entnommen wurde. Zu vermuten war, daß hieran die am Stand größeren Auftriebsbeiwerte der Flügelprofile schuld wären [Vers. 29].

Abb. 76. Dreiflügelige Metallschrauben, Verhältnis k_s/k_d.

Aus diesem Grunde wurde erwogen, ob man nicht Schrauben herstellen sollte, welche am Stand angenähert gleichen c_a-Verlauf über dem Halbmesser zeigten, wie Schrauben im Fluge. Dies wäre durch eine „Unterhöhung" der Steigung zu erzielen gewesen. Vorläufig wurden jedoch nur einstellbare Schrauben auf kleinere mittlere Steigung zurückgedreht und auf dem Prüfstand nachgemessen. Das Ergebnis ist in den Abb. 77 und 78 bzw. 80 und 81 dargestellt. Für k_s/k_d ergab sich, wie Abb. 79 und 82 zeigen, grundsätzlich das gleiche, wie es sich aus der statistischen Auswertung ergeben hatte, obwohl jetzt die c_a-Werte der spitzennahen Profile schon recht klein waren. Die Ursachen dieses Verhaltens konnten bisher nicht erklärt werden.

Klärung könnten hier Modellversuche bei praktisch in Frage kommendem Fortschrittsgrad in Hochgeschwindigkeitskanälen und mit naturgroßen Schrauben bei kleineren Fortschrittsgraden in großen Windkanälen bringen.

b) Windkanalversuche an freifliegenden Schrauben. Bei der Untersuchung des Verhaltens einer Luftschraube bei von Null verschiedenen Fortschrittsgraden begnügt man sich meistens mit der Verwendung von Modellen, da die Untersuchung naturgroßer Schrauben im Windkanal recht große Windkanäle verlangt, dennoch muß diese Möglichkeit

Abb. 77. Schubziffer k_s.

Abb. 78. Momentenziffer k_d.

Verstellschraube mit Holzflügeln.

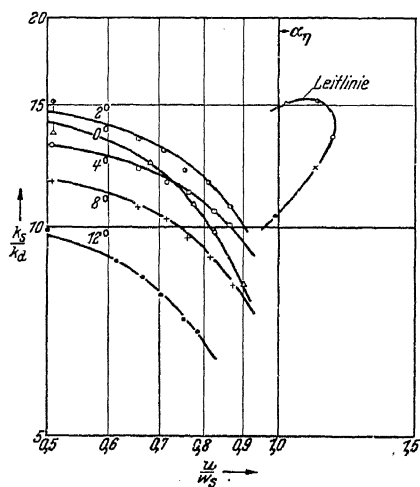



Abb. 79. Verhältnis k_s/k_d.

der Untersuchung bei der Größe der heutigen Windkanäle ernstlich in Betracht gezogen werden. Der Aufbau des Prüfstandes unterscheidet sich dabei im Prinzip nicht von dem beschriebenen des Standversuchs.

Auch bei Modellversuchen erfolgt der Antrieb zweckmäßig durch kleine Elektromotoren. Die Bestimmung des Momentes und des Schubs bei gerader Anblasung geschieht im allgemeinen durch

Abb. 80. Schubziffer k_s.

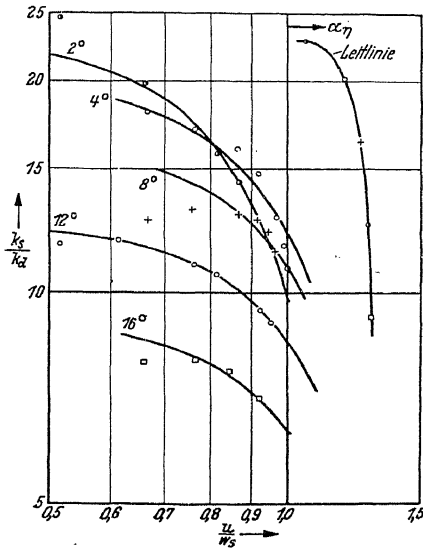
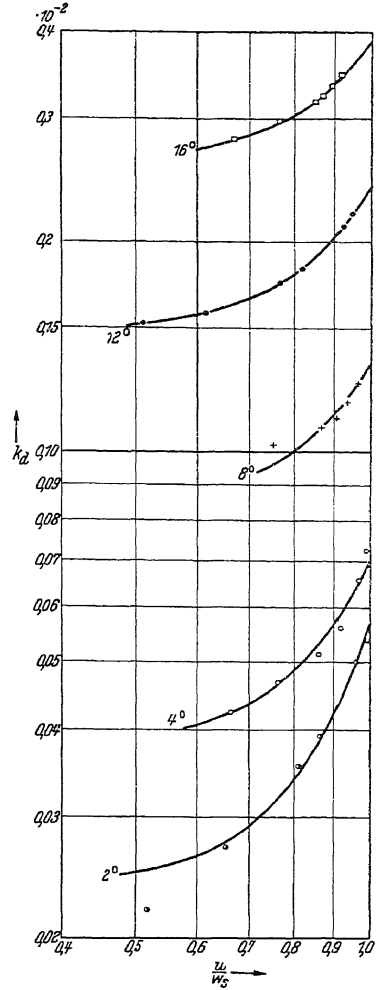
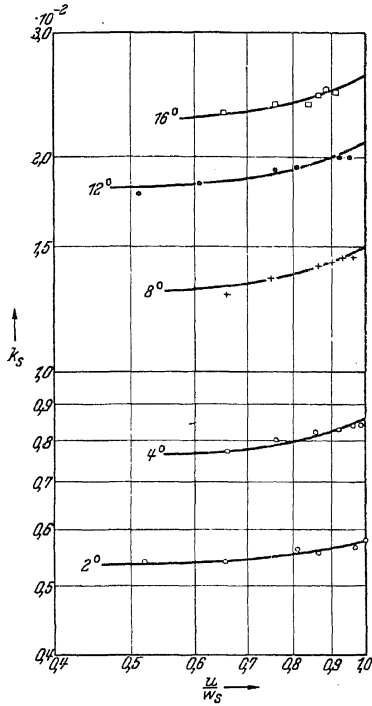
Abb. 81. Momentenziffer k_d.

Verstellschraube mit Metallflügeln.

Abb. 82. Verhältnis k_s/k_d.

eine Zweikomponentenmessung. Bei schräger Anblasung müssen entsprechend mehr Komponenten gemessen werden. Hierzu wird die Luftschraube samt dem Motor an die Waage des Windkanals gehängt. Zur Drehmomentenmessung wird der Motor zweckmäßig auf Kugellager pendelnd gelagert und durch einen Hebelarm mit der Waage verbunden. Neben Drehzahl, Drehmoment, Schub und Windgeschwindigkeit müssen auch Druck und Temperatur der Luft bestimmt werden. Um die Rückwirkung des Motorgehäuses auf die Luftschraube möglichst klein zu machen, entsprechend dem gewünschten Zustand des Freifliegens der Schraube, muß dieses klein sein im Vergleich zum Luftschraubendurchmesser und die Luftschraube durch eine möglichst lange Welle vom Motor entfernt werden.

Benutzt man beim Versuch einen geschlossenen Windkanal, so beeinflussen die festen Wände der Windstrombegrenzung die Meßergebnisse. Über die zur Richtigstellung nötige Windkanalkorrektur soll deshalb später noch einiges ausgeführt werden. Bei Benutzung offener Kanäle ist über die Notwendigkeit einer Korrektur bisher nichts bekanntgeworden, doch dürfte es sich empfehlen, zwischen Schraubenkreis und Windstrombegrenzung mindestens einen Abstand von etwa $0{,}2\,D$ zu lassen [Lit. 36].

Für die Untersuchung des Sturzflugverhaltens, wo also die Schrauben durch den Wind angetrieben werden, bedient man sich zur Aufnahme der dabei von dem Schraubenmodell abgegebenen Leistung einer Wirbelstrombremse.

Der erreichbare Fortschrittsgrad ist durch die Grenze der Windgeschwindigkeit des Windkanals gegeben, wenn man nicht die Umfangsgeschwindigkeit der Modelle in unzulässiger Weise herabsetzen will oder wenn gar zur Untersuchung des Einflusses der Umfangsgeschwindigkeit diese eine bestimmte Größe haben muß. Zur Untersuchung dieses Einflusses dürften sich Windkanäle mit einer Höchstwindgeschwindigkeit von mindestens 150 m/sec und einem kreisförmigen Windstromquerschnitt von mindestens 2,00 m Durchmesser sehr nützlich erweisen. Die Bestimmung der Drehzahl erfolgt bei Modellversuchen am sichersten durch Resonanzzungenfrequenzmesser.

c) Windkanalversuche an eingebauten Schrauben. Versuche an eingebauten Schrauben gehören im Prinzip zu den schwierigsten und umständlichsten Versuchen, welche im allgemeinen im Windkanal durchgeführt werden [Lit. 52].

Während der Begriff des Drehmomentes und der Antriebsleistung der Schraube eindeutig sind, wird der Begriff des Schraubenschubs recht undurchsichtig. Der Spurlagerdruck der freifliegenden Schraube ist zwar wirklich ihr Schub. Bei der eingebauten Schraube besteht jedoch der Spurlagerdruck nicht nur aus dem Schraubenschub, sondern auch aus der zwischen Schraube und Flugzeug wirkenden inneren Kraft,

dem sog. Sog, welcher im allgemeinen den Spurlagerdruck vergrößert und zwar um den gleichen Betrag, um welchen die auf das Flugzeug wirkende Widerstandskraft vergrößert erscheint. Eine Zerlegung des Spurlagerdruckes in diese beiden Anteile ist aber meßtechnisch unmöglich. Durch die Schraube werden nämlich die Strömungsverhältnisse am Flugzeug geändert, so daß auch der Widerstand des Flugzeuges gegenüber den Verhältnissen bei fehlender Schraube geändert ist.

Ohne Einfluß der Schraube sei der Widerstand des Flugzeuges W^+. Unter dem Einfluß der Schraube wirkt auf das Flugzeug der innere Widerstand W_i, der dem Schraubensog S_i entgegengerichtet ist, ferner die Vergrößerung des Widerstandes ΔW infolge der geänderten Strömungsverhältnisse, die in der Hauptsache auf Reibung zurückzuführen ist. Die gesamte in Flugrichtung fallende Komponente der Luftkräfte auf das Flugzeug ist damit

$$\overline{W} = W^+ + W_i + \Delta W. \tag{9, 4}$$

Der Drucklagerschub $\overline{S}$ der Schraube setzt sich zusammen aus der äußeren Kraft $S_a = S$ und der inneren Kraft S_i

$$\overline{S} = S_a + S_i. \tag{9, 5}$$

S_i heißt der Schraubensog. S_a wäre der Nutzschub der Schraube, wenn am Rumpf außer der dem Sog S_i entgegengesetzt gleichen Luftkraft W_i keine anderen Luftkräfte angreifen würden als beim Fehlen der Schraube. Die Änderung der Strömungsverhältnisse bedingt aber den zusätzlichen Widerstand ΔW. Der zum Beschleunigen oder zum Steigen übrigbleibende Schubanteil ist daher

$$\overline{S} - \overline{W} = S' = (S_a + S_i) - (W^+ + W_i + \Delta W) \tag{9, 6}$$

oder wegen

$$W_i = S_i, \tag{9, 7}$$

$$S' = S_a - (W^+ + \Delta W). \tag{9, 8}$$

Im unbeschleunigten Flug ist also

$$S' = 0 \quad \text{und} \quad \overline{S} = \overline{W}. \tag{9, 9}$$

Als Nutzschub kann

$$S_n = S' + W^+, \tag{9, 10}$$

$$S_n = S_a - \Delta W \tag{9, 11}$$

bezeichnet werden. Unter Wirkungsgrad der Schraube wird

$$\eta = \frac{S_a \cdot v}{N} \tag{9, 12}$$

verstanden, unter Vortriebsgütegrad

$$\eta_g = \frac{S_n \cdot v}{N}. \tag{9, 13}$$

Das Verhältnis

$$\frac{\eta_g}{\eta} = \psi = \frac{S_n}{S_a} = 1 - \frac{\Delta W}{S_a} \tag{9, 14}$$

heißt der Einbaugütegrad.

Der Messung zugänglich sind außer N und v der Widerstand des Flugzeuges ohne Schraube W^+ und der Schubanteil $S' = \overline{S} - \overline{W}$, nämlich durch die gebräuchliche Widerstandsbestimmung einmal ohne und einmal mit laufender Schraube. Bei diesen Messungen bestimmt man meist auch den Auftrieb A und das Längsmoment M. Diese Ergebnisse können dimensionslos aufgetragen werden in der Form der Polaren entsprechend Abb. 83. Als Parameter dient dabei der Fortschrittsgrad λ der Luftschraube. Die Ergebnisse für die Schraube beim Fortschrittsgrad λ^* der Schubfreiheit $S = 0$ und der fehlenden Schraube sind dabei als gleichwertig zu betrachten.

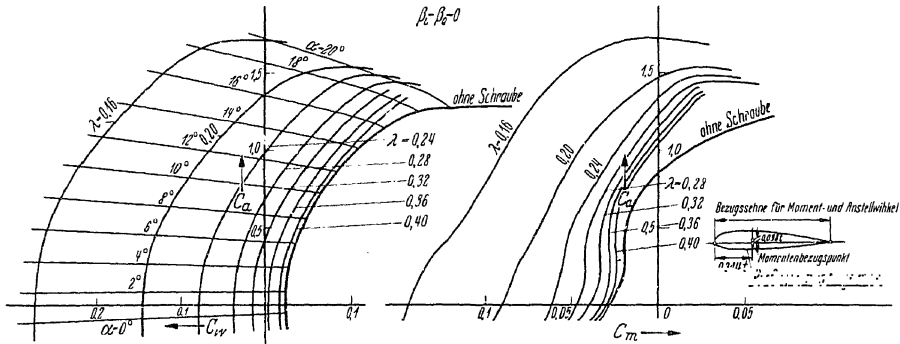



Abb. 83. Polaren eines Tragflügels mit Schraube bei verschiedenem Fortschrittsgrade für Klappenausschlag $\beta_L = 0$ und Querruderausschlag $\beta_Q = 0$.

Die Ergebnisse gestatten auch die Bestimmung von $S_n = S' + W^+$ und von $\eta_g = S_n \cdot v/N$.

Durch getrennte Aufhängung der Schraube nebst Antriebsmotor und des Flugzeuges kann im Windkanal auch der Spurlagerschub $\overline{S}$ gemessen werden.

Die Größen W_i und ΔW sind der Messung nicht zugänglich. Nur ihre Resultierende

$$W_i + \Delta W = S_i + \Delta W = \overline{W} - W^+ \tag{9, 15}$$

ist aus den Meßergebnissen zu berechnen. Die Bestimmung der Größe des Schraubensogs $S_i = W_i$ kann nur unter Zuhilfenahme theoretischer Überlegungen erfolgen, die Gegenstand späterer Ausführungen sein werden.

Da durch das Flugzeug die Strömungsverhältnisse auch an der Schraube geändert werden, ist auch der Schub S der Schraube am Flugzeug ein anderer als der Schub S^+ der freifliegenden Schraube. Zur Beurteilung des Einflusses des Flugzeuges auf den Schraubenschub können für praktische Zwecke folgende Größen dienen:

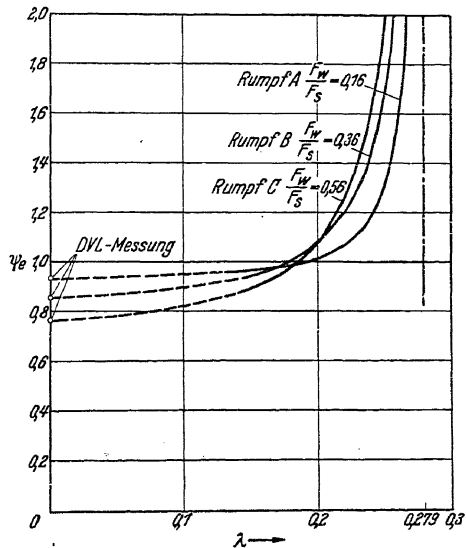
$$\psi_e' = \frac{S'}{S^+} \quad \text{bzw.} \quad \psi_e = \frac{S_n}{S^+}. \tag{9, 16}$$

Wenn S' und S_n noch endlich sind bei jenem Fortschrittsgrad λ^{+*}, für welchen S^+ verschwindet, werden ψ'_e und ψ_e für diesen Fortschrittsgrad unendlich. Ein wesentlicher Parameter für den Einfluß des Flugzeuges auf den Schraubenschub ist das Verhältnis des Querschnitts F_w der im Schraubenstrahl liegenden Teile des Flugzeuges zur Schraubenkreisfläche F_s. Die Abb. 84 und 85 zeigen diese Rumpfeinflußziffern für ein $\lambda^{+*} = 0{,}279$ der freifliegenden Schraube. Für überschlägige Rechnungen genügt es wohl, für Schrauben mit anderem λ^{+*} die Abszissen entsprechend linear zu verzerren.

Abb. 84. Rumpfeinflußziffer ψ'_e in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad der Schraube.

Zur Bestimmung der Leistung ins Modell eingebauter Schrauben gibt es, mindestens wenn es auf äußerste Genauigkeit nicht ankommt, außer der bei der Leistungsmessung freifliegenden Schraubenmodelle beschriebenen Wägung noch zwei Möglichkeiten: Die eine ist die Eichung der Leistungsabgabe des elektrischen Antriebsmotors in Abhängigkeit von seiner Leistungsaufnahme oder seiner Erregung. Die andere ist die Zuordnung der Leistungsziffer zur Schubziffer bei der freifliegenden Schraube und Bestimmung der Schubziffer aus diesem Spurlagerschub der eingebauten Schraube.

Abb. 85. Rumpfeinflußziffer ψ_e in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad der Schraube.

d) Schraubenversuche am Flugzeug. Bei Schraubenversuchen am fliegenden Flugzeug hat man zweierlei Schwierigkeiten zu unterscheiden, und zwar erstens diejenigen, welche bei allen Versuchen am fliegenden Flugzeug auftreten, nämlich die der Bestimmung von Fluggeschwindigkeit, Luftdichte, Anstellwinkel, Bahnneigung, Beschleunigung,

wo zur Erzielung ausreichender Genauigkeit schon recht erhebliche Anstrengungen zu machen sind, und zweitens jene, die dem Schraubenversuch selbst eigentümlich sind, nämlich Bestimmung des Schraubenschubs, des Schraubendrehmomentes und der Schraubendrehzahl. Auf die ersteren einzugehen kann hier nicht Aufgabe sein. Bei den letzteren

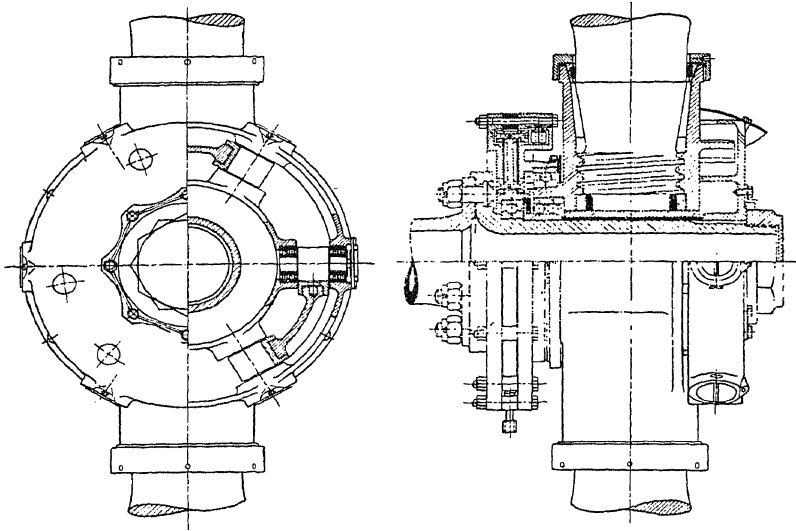



Abb. 86. Doppeltwirkende hydrauliche Schubmeßnabe der DVL. (Entwurfszeichnung).

hat man zu unterscheiden, ob zum Zwecke des Versuches an Triebwerk, Zelle und Luftschraube Eingriffe vorgenommen werden dürfen oder nicht.

Dürfen Änderungen nicht vorgenommen werden, so müssen zur Drehzahlbestimmung die üblichen eingebauten Tachometer unter Umständen nach entsprechender Eichung oder sog. Rotoskope, welche auf dem Stroboskopprinzip beruhen, verwendet werden. Zur Bestimmung der Leistung bleibt nichts übrig als Benutzung der auf dem Motorenprüfstand gewonnenen Ergebnisse als Eichung des Motors. Der Schub ist aus der Leistung und Fluggeschwindigkeit zu bestimmen auf Grund einer Wirkungsgradkurve, welche entweder geschätzt wird oder aus Modellversuchen gewonnen wird. Der Zweck solcher Versuche kann aber wegen der geringen Genauigkeit höchstens die Gewinnung einer angenäherten Flugzeugpolaren oder sonstiger praktischen Bedürfnissen genügender Betriebsangaben sein. Für eigentliche Schraubenuntersuchungen reichen solche Versuche im allgemeinen nicht aus.

Am ehesten genügt noch die Bestimmung der Drehzahl mit Hilfe eines Rotoskops. Besser ist dazu der Einbau besonderer Präzisionstachometer, z. B. Resonanzzungenfrequenzmesser. Die Bestimmung des Schubs kann indirekt erfolgen mit Hilfe eines anzubauenden Staurechens auf Grund des Impulssatzes bei entsprechender Integration über den Schraubenstrahlquerschnitt.

Abb. 87. Doppeltwirkende hydrauliche Schubmeßnabe der DVL. (Ansicht).

Einfacher ist die Benützung einer Schubmeßnabe (vgl. Abb. 86 und 87), welche an Stelle der gewöhnlichen Nabe einzubauen ist. Zur Messung des Drehmomentes im Flug kann eine Drehmomentenmeßnabe benutzt werden. Solche Meßnaben übertragen unter Zwischenschaltung elastischer Glieder Schub und Drehmoment von der Luftschraube auf die Motorwelle bzw. umgekehrt. Eine Beschreibung ihres konstruktiven Aufbaus kann hier nicht erfolgen. Es ist auch möglich, Meßnaben zur gleichzeitigen Messung von Schub und Drehmoment herzustellen. Eine solche Nabe zeigt Abb. 88 [Lit. 162].

Von der prinzipiellen Möglichkeit, durch Zwischenschaltung elastischer Glieder zwischen Motor und Zelle Schub und Drehmoment zu messen und unter Umständen dauernd zu überwachen, wurde bisher kein Gebrauch gemacht. Hierauf müßte sonst schon bei Entwurf der Zelle und des Motorvorbaues Rücksicht genommen werden.

Eine wichtige Aufgabe der Schubmeßnabe ist die Ermöglichung des Fluges mit dem Schube Null. Hierdurch wird das Erfliegen der Nullschubpolare, d. i. der Gleitflugpolare der Zelle ermöglicht. Wie genau ein geschickter Versuchsflugzeugführer mit solchen Schubmeßnaben arbeiten und wie gut Flugmessungen gelingen können, zeigt wohl am besten Abb. 89.

Für die Drehmomentenmessung mit einer Meßnabe bestehen insbesondere Schwierigkeiten durch die Ungleichförmigkeit des Drehmomentes des Flugmotors. Hierauf muß bei Anwendungen geachtet werden. Außer der Nullschubpolare ist in erster Linie noch die Vollgas-

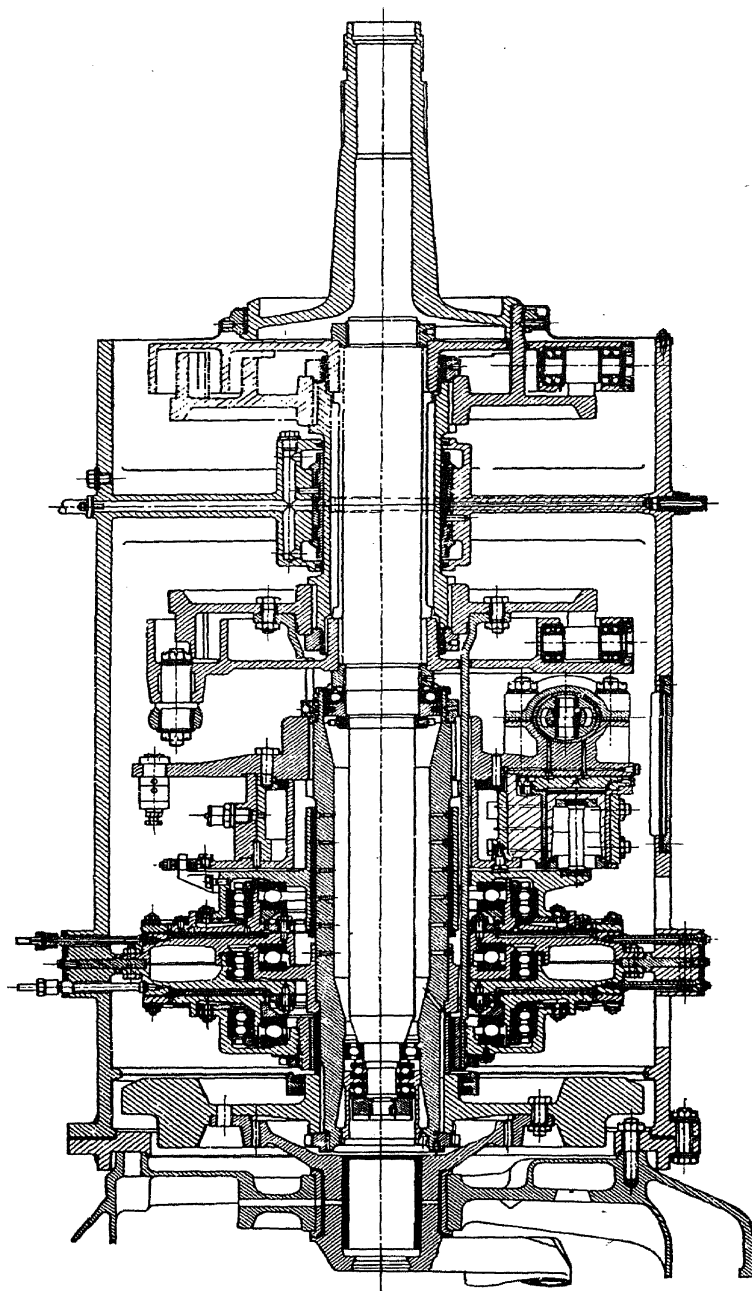



Abb. 88. Meßnabe der DVL zur gleichzeitigen Schub- und Drehmomentenmessung.

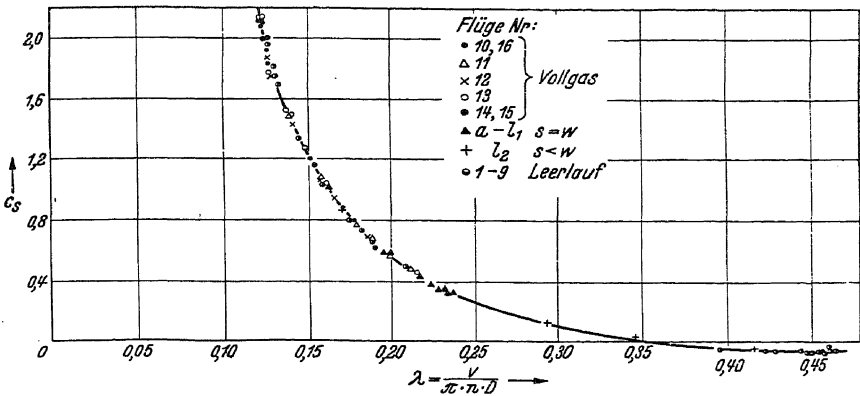



Abb. 89. Schubbelastungsgrad bei veränderlichem Fortschrittsgrad, ermittelt durch Meßflüge.

polare von Bedeutung. Ist S der Meßnabenschub, S_i der Schraubensog und ist Z die Querkraft der Schraube, so gilt im unbeschleunigten Steig- Horizontal- oder Gleitflug

$$c_a = \frac{G}{\frac{\varrho}{2} v^2 F} \cos\nu - \overline{c_s}(1 - \xi)\varphi \sin\alpha - c_z \varphi \cos\alpha \qquad (9, 17)$$

$$c_w = \overline{c_s}(1 - \xi)\varphi\cos\alpha - c_z \varphi \sin\alpha - \frac{G}{\frac{\varrho}{2} v^2 F} \sin\nu . \qquad (9, 18)$$

Hierbei ist ν der Bahnneigungswinkel. Weiter ist α der Anstellwinkel der Luftschraubenachse gegen die Flugbahn, $\overline{c_s} = \frac{\overline{S}}{\frac{\varrho}{2} v^2 F_s}$ der mit Benutzung des Meßnabenschubs gebildete Schubbelastungsgrad, $c_z = \frac{Z}{\frac{\varrho}{2} v^2 F_s}$ der Querkraftbelastungsgrad, $\varphi = F_s/F$ das Kreisflächenverhältnis. $\xi = S_i/S$ ist die Sogziffer. Sie ist für Zugschrauben im wesentlichen für die gleiche

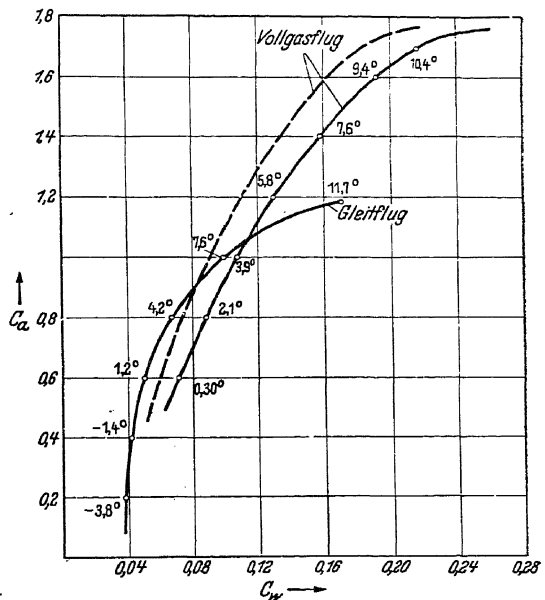



Abb. 90. Gleitflug und Vollgasflugpolare, ermittelt mit Hilfe einer Schubmeßnabe. Gleitflugzustand war dabei durch verschwindenden Schraubenschub gegeben. Die ausgezogene Vollgasflugpolare ist aus dem Meßnabenschub unmittelbar berechnet unter Vernachlässigung des Sogs. Die gestrichelte Vollgasflugpolare berücksichtigt den Sog.

Schraube an der gleichen Zelle als eine Konstante anzusehen, wie sich aus der Theorie ergibt. S_i ist aber der Messung nicht zugänglich. ξ muß deshalb unter Benutzung theoretischer Zusammenhänge geschätzt werden. Ebenso muß im allgemeinen auch die Querkraft Z berechnet oder geschäzt werden.

Eine Nullschub- und Vollgaspolare zeigt Abb. 90. Wie sich letztere aus der ersteren errechnen läßt, ist Gegenstand späterer Ausführungen.

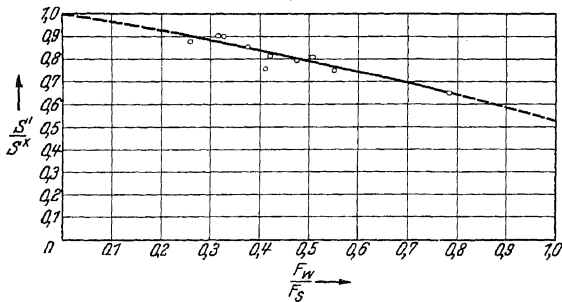



Abb. 91. Verhältnismäßige Verminderung des Schubs S'/S^+ am Stande in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis.

Für das Flugzeug am Stand lassen sich Standschubmessungen durch Festhalten des Flugzeuges am Sporn bei laufender Schraube durchführen. Dazu muß man natürlich windstille Tage benutzen. Dieser Standschub $S = S' = S_n$ ist von dem Schube S^+ der frei angeordneten Schraube verschieden. Der Quotient $\psi_e' = S'/S^+$ ist bei üblichen Verhältnissen in der Hauptsache vom Verhältnis F_w/F_s des im Schraubenstrahl liegenden Flugzeugquerschnittes F_w zur Schraubenkreisfläche F_s abhängig. Für einige Flugzeugmuster sind die Ergebnisse in Zahlentafel 2 zusammengestellt und in Abb. 91 interpoliert.

Die Versuche wurden bis $S = 750$ kg mit Hilfe eines DVL-Seilzugmeßgerätes, darüber mit Hilfe eines DVL-Stoßschreibers durchgeführt. Das Flugzeug stand dabei mit seinen Rädern auf Eisenplatten. Der Reibungswiderstand der Räder war dabei kleiner, als wenn besondere Rollschuhe verwendet worden wären [Vers. 29].

Zahlentafel 2. Verhältnis S'/S^+ und F_w/F_s.

Nr.	Flugzeugmuster	Flächenverhältnis F_w/F_s	Schub am Prüfstand S^+ kg	Schub am Flugzeug S' kg	Schubverhältnis S'/S^+
1	W 34 hi	0,504	925	750	0,81
2	Ju 160	0,474	920	725	0,79
3	Ju 52 Mitte	0,78	830	540	0,65
4	Ju 52 Seite	0,409	830	630	0,76
5	Ju 86 Seite	0,374	830	710	0,585
6	Ju 160 Schraube auf W 34	0,548	920	690	0,75
7	He 45	0,325	1075	975	0,905
8	He 70	0,42	910	740	0,815
9	Ar 68	0,314	920	830	0,905
10	BF 109	0,26	575	505	0,88

10. Darstellungsweisen für Versuchsergebnisse und Beschreibung ihrer Benutzung.

a) Darstellung der Versuchsergebnisse einer einzigen Schraube oder einer Schraubenfamilie. Hat man die Versuchsergebnisse einer einzelnen Schraube darzustellen, so errechnet man aus den Versuchsergebnissen die Dimensionslosen k_s, k_d, λ, η und trägt über dem Fortschrittsgrad λ als Abszisse die Schubziffer k_s, die Drehmomentenziffer k_d und den Wirkungsgrad η in einem Schaubild als Ordinaten auf (Abb. 92). Diese Darstellung eignet sich auch insbesondere für die unmittelbare Auftragung der Versuchspunkte und deren Interpolation und Ausgleich durch glatte Kurven.

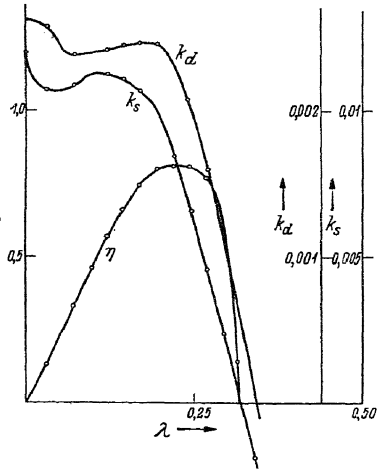



Abb. 92. Wirkungsgrad, Schubziffer und Leistungsziffer (Schraube 4/2, ungeschränkt).

Ähnlich geht man meistens vor bei der Darstellung der an einer Schraubenfamilie oder einer Verstellschraube gewonnenen Ergebnisse.

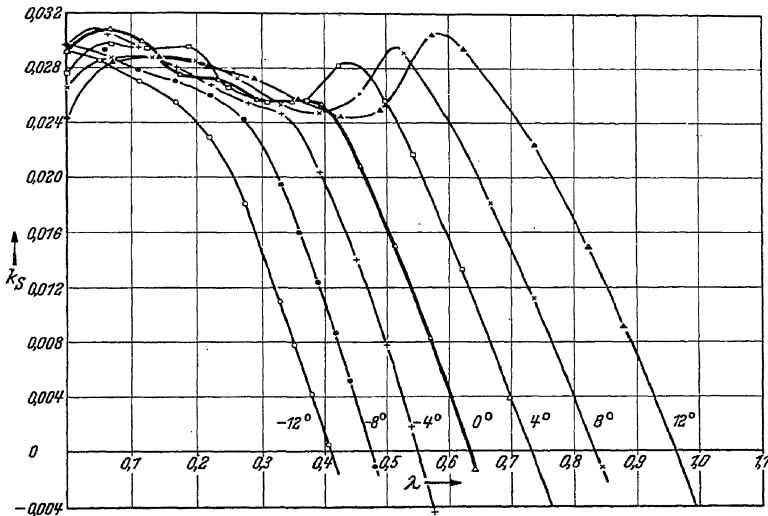



Abb. 93. Schubziffer bei verschiedenen Schränkungen (Schraube 8/2).

Man trägt hierbei aber zweckmäßig die Schar der k_s-, der k_d- und der η-Linien, welche man durch vorheriges Glätten der Versuchswerte erhält, jede für sich in einem besonderen Schaubild auf (Abb. 93, 94 und 95).

Man kann aber auch in dem Bild der Scharen der $k_s(\lambda)$-Linien bzw. der $k_d(\lambda)$-Linien die Punkte gleichen Wirkungsgrades η miteinander verbinden und erhält dann den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von k_s

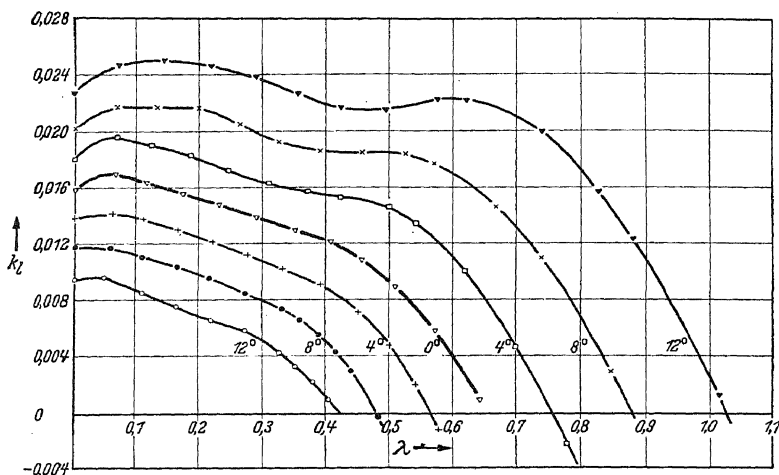



Abb. 94. Leistungsziffer bei verschiedenen Schränkungen (Schraube 8/2).

und λ bzw. k_d und λ. Diese Art der Darstellung ist recht übersichtlich (Abb. 96 bis 100).

Man könnte aber noch einen Schritt weitergehen und in das Bild der $k_d(\lambda)$-Linien und der $\eta(k_d \lambda)$-Linien auch noch die Linien $k_s =$ konst. eintragen. Doch ist diese Darstellung nicht mehr so ganz übersichtlich.

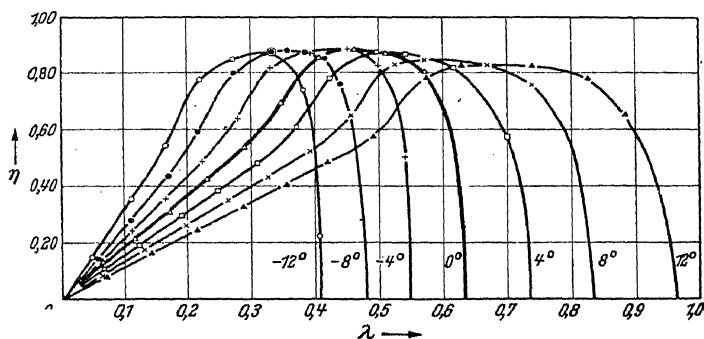



Abb. 95. Wirkungsgrad bei verschiedenen Schränkungen (Schraube 8/2).

Eine andere öfter angewandte Darstellung von Versuchsergebnissen ist folgende: Aus den Versuchsergebnissen werden der Fortschrittsgrad λ, die Geschwindigkeits-Leistungszahl C_S und der Wirkungsgrad η errechnet und λ ebenso wie η als Ordinaten über C_S aufgetragen und

zwar im allgemeinen getrennt übereinander, wie Abb. 101 veranschaulicht. Auch diese Darstellung darf als übersichtlich gelten.

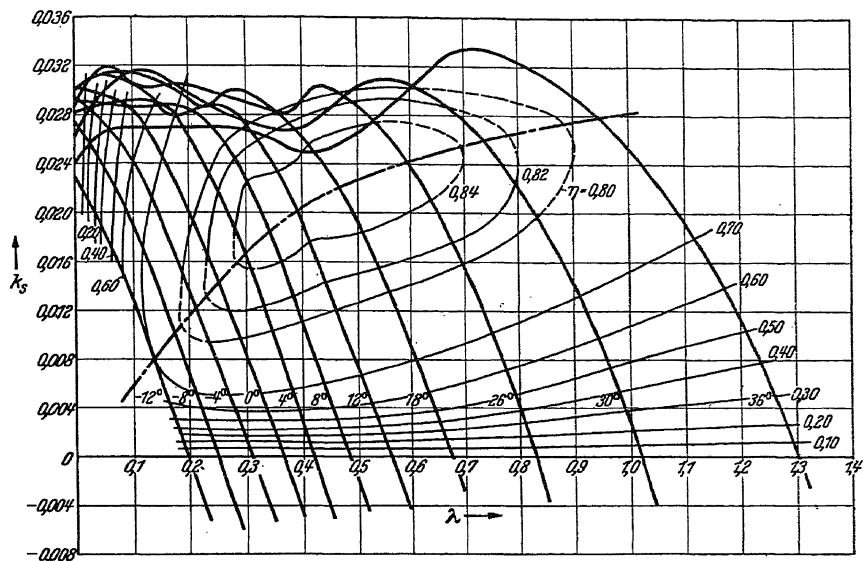



Abb. 96. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Fortschrittsgrad und Schubziffer (Schraube 1 v. F).

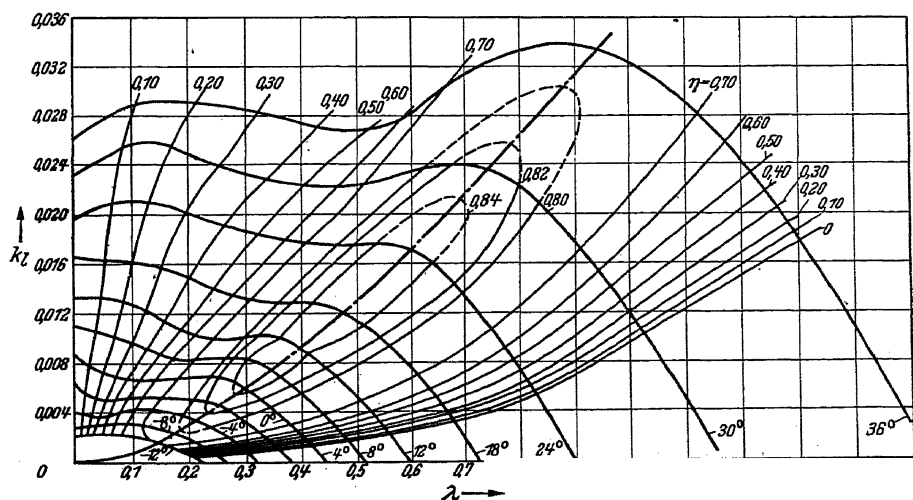



Abb. 97. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Fortschrittsgrad und Leistungsziffer (Schraube 1 v. F).

Es möge noch erläutert werden, was man unter einer Schraubenfamilie zu verstehen hat. Unter einer Schraubenfamilie versteht man

die Gesamtheit von Schrauben, welche nach einem gemeinsamen Prinzip entworfen worden sind und die sich untereinander um die Verschiedenheit eines einzigen Parameters unterscheiden. Während

Abb. 98. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Fortschrittsgrad und Leistungsziffer (Schraube 6/2).

also z. B. Blattform, Flügelzahl, Blattbreite, Blattdickenverteilung und Prinzip des Steigungsverlaufs bei den Schrauben einer Familie die

Abb. 99. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Fortschrittsgrad und Leistungsziffer (Schraube 6/3).

gleichen sind, ist die Steigung bei allen anders. Diese Art des Begriffs einer Schraubenfamilie ist die häufigste. Es kann aber eine Familie statt durch Änderung der Steigung auch durch Änderung der Blattbreite oder der Flügelzahl gebildet werden. In gewissem Sinne bildet also

auch jede Einstell- oder Verstellschraube durch die Veränderung ihrer Blattstellung eine Schraubenfamilie.

Die hier mitgeteilten Wirkungsgradschaubilder sind bei einer systematischen Modellversuchsreihe gewonnen worden. Die dabei untersuchten Schrauben sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt

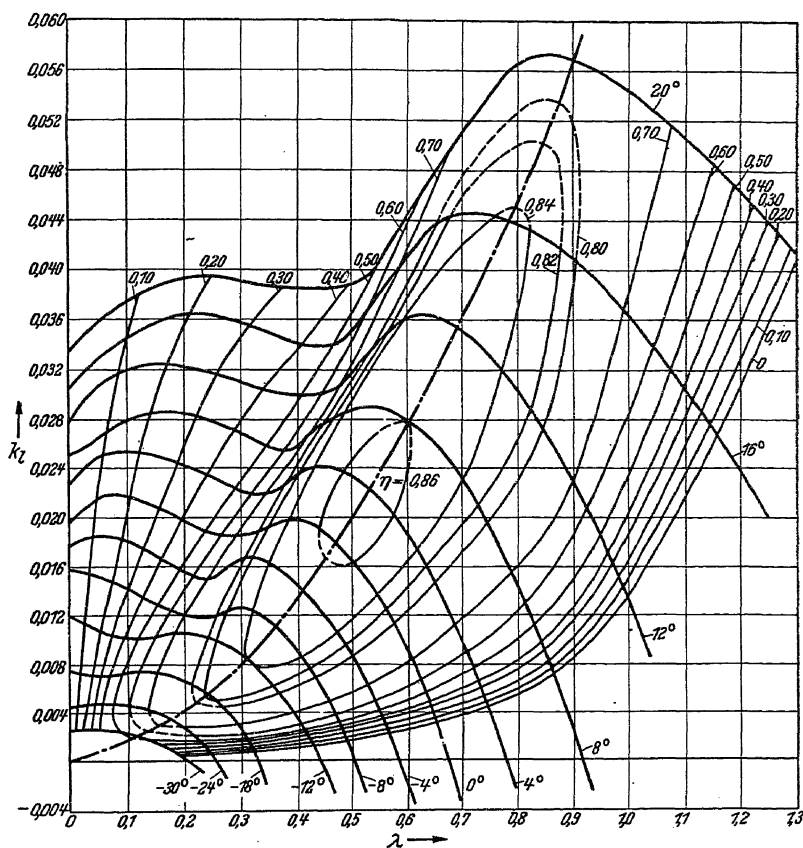



Abb. 100. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Fortschrittsgrad und Leistungsziffer (Schraube 6/4).

und bildlich in Abb. 102 dargestellt. Ihre Aufmaße sind in Zahlentafel 4a—i wiedergegeben. Die dabei jeweils gefundenen besten Wirkungsgrade sind in Abb. 103 veranschaulicht. Die Zähler und Nenner der beigeschriebenen Quotienten bezeichnen Blattform und Flügelzahl [Vers. 30].

b) Die Zweckmäßigkeit logarithmischer Auftragung. Sind λ als Abszisse und k_d als Ordinate gewählt und sind Leistung N, Flughöhe h bzw. Luftdichte ϱ und Fluggeschwindigkeit v gegeben, so sind die

Linien konstanten Durchmessers durch Linien konstanten Leistungsbelastungsgrades (8, 7)

$$c_l = \frac{k_d}{\lambda^3} = \text{konst.}$$

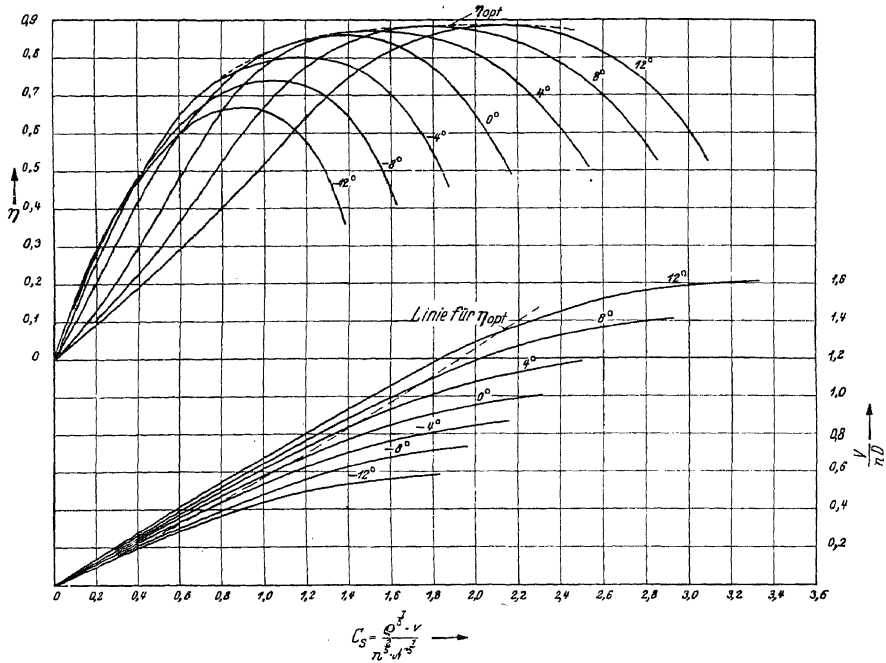



Abb. 101. Fortschrittsgrad und Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsleistungszahl (Schraube 3/3).

Zahlentafel 3. Zusammenstellung der untersuchten Schrauben der DVL-Serie.

Schraube Nr.	Blattzahl $\mathfrak{z}$	H^*/D	t/D bei 0,7 R	h/t bei 0,7 R	Zahl der untersuchten Einstellungen
1	2	1,045	0,07	0,10	7
1 v. F.	2	1,045	0,07	0,10	11 {verstärkte Fußausbildung
3	2	1,045	0,0525	0,10	7
3	3	1,045	0,0525	0,10	7
3	4	1,045	0,0525	0,10	12
4	2	1,045	0,035	0,15	7
5	2	1,045	0,07	0,075	7
6	2	2,09	0,0525	0,10	7
6	3	2,09	0,0525	0,10	7
6	4	2,09	0,0525	0,10	12
8	2	2,09	0,07	0,075	7
9	2	0,523	0,0525	0,10	7
10	2	1,57	0,0525	0,10	7

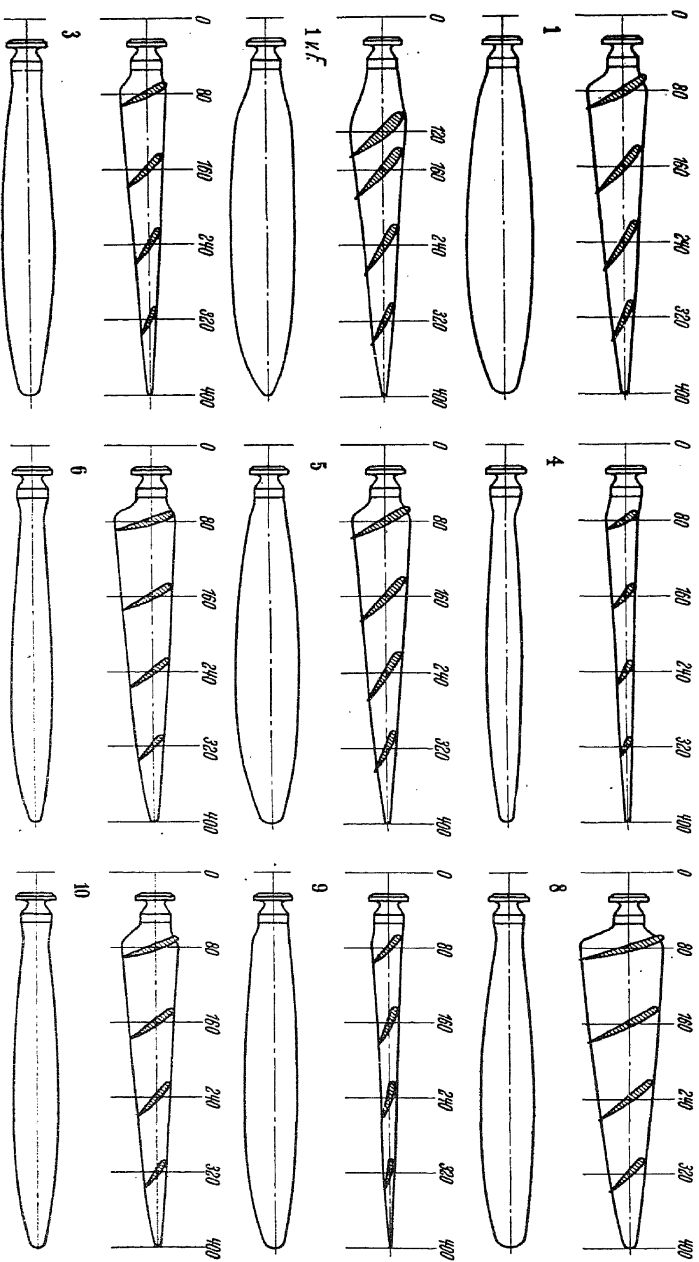



Abb. 102. Die untersuchten Modellschraubenflügel der DVL-Serie (Berechnung F. WEINIG, Untersuchung B. DIRKSEN).

Zahlentafel 4a. Schraube 1.
$H^*/D = 1{,}045$; $t/D = 0{,}07$; $h/t = 0{,}10$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	57,5	8,36	83,47
10	57,9	8,07	67,04
80	59,4	7,76	53,16
120	61,2	7,43	42,54
160	62,0	7,06	34,84
200	62,0	6,64	28,87
240	60,2	6,16	24,48
280	56,0	5,60	20,95
320	49,4	4,89	18,12
360	37,6	3,72	15,82
400	0	0	13,95

Zahlentafel 4b. Schraube 1 v. F.
$H^*/D = 1{,}045$; $t/D = 0{,}07$; $h/t = 0{,}10$

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	—	—	—
40	—	—	—
80	—	19,5	—
120	64,9	11,65	39,94
160	63,1	8,98	33,42
200	62,1	7,8	28,02
240	59,7	6,9	23,85
280	55,6	6,05	20,55
320	49,1	5,07	17,97
360	36,0	3,7	15,68
400	0	0	13,79

Zahlentafel 4c. Schraube 3.
$H^*/D = 1{,}045$; $t/D = 0{,}0525$; $h/t = 0{,}10$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	43,1	6,26	83,47
40	44,2	6,05	67,04
80	44,6	5,81	53,16
120	45,8	5,58	42,54
160	46,4	5,29	34,84
200	46,4	4,98	28,87
240	45,1	4,61	24,48
280	41,9	4,20	20,95
320	37,1	3,67	18,12
360	28,2	2,79	15,82
400	0	0	13,93

Zahlentafel 4d. Schraube 4.
$H^*/D = 1{,}045$; $t/D = 0{,}035$; $h/t = 0{,}15$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	30,8	6,27	80,82
40	30,8	6,06	64,47
80	31,1	5,82	50,61
120	31,6	5,57	40,00
160	31,6	5,29	32,29
200	31,3	4,98	26,53
240	30,2	4,62	22,19
280	28,0	4,20	17,70
320	24,7	3,67	15,96
360	18,7	2,79	13,61
400	0	0	11,68

Zahlentafel 4e. Schraube 5.
$H^*/D = 1{,}045$; $t/D = 0{,}07$; $h/t = 0{,}075$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	55,7	6,27	84,94
40	56,4	6,06	68,47
80	58,1	5,82	54,53
120	60,1	5,57	43,83
160	61,4	5,27	35,80
200	61,6	4,98	30,05
240	59,6	4,62	25,58
280	56,0	4,20	22,07
320	49,4	3,67	19,28
360	37,3	2,79	16,94
400	0	0	15,05

Zahlentafel 4f. Schraube 6.
$H^*/D = 2{,}09$; $t/D = 0{,}0525$; $h/t = 0{,}10$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	55,9	6,27	84,94
40	55,2	6,06	76,53
80	54,1	5,82	68,48
120	53,2	5,58	61,08
160	51,8	5,27	53,8
200	49,5	4,98	48,60
240	46,5	4,62	43,49
280	42,0	4,20	38,10
320	35,7	3,57	35,31
360	27,0	2,70	32,03
400	0	0	29,19

Zahlentafel 4g. Schraube 8.
$H^*/D = 2{,}09$; $t/D = 0{,}070$; $h/t = 0{,}075$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	74,1	6,27	86,19
40	73,1	6,06	77,75
80	71,9	5,82	69,66
120	70,8	5,58	62,22
160	68,3	5,29	55,55
200	66,0	4,98	49,72
240	61,6	4,62	44,63
280	56,0	4,20	40,23
320	47,7	3,57	35,44
360	36,0	2,70	33,16
400	0	0	30,32

Zahlentafel 4h. Schraube 9.
$H^*/D = 0{,}523$; $t/D = 0{,}0525$; $h/t = 0{,}10$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	29,6	6,27	80,55
40	34,6	6,06	51,15
80	38,8	5,82	33,11
120	41,8	5,58	23,09
160	43,8	5,29	17,22
200	44,5	4,98	13,39
240	43,8	4,62	10,79
280	42,0	4,2	8,89
320	37,8	3,57	7,52
360	29,4	2,7	6,35
400	0	0	5,23

Zahlentafel 4i. Schraube 10.
$H^*/D = 1{,}57$; $t/D = 0{,}0525$; $h/t = 0{,}10$.

r mm	t mm	h mm	β_d^0
0	50,4	6,27	84,42
40	50,2	6,06	73,23
80	49,9	5,82	62,94
120	49,4	5,58	53,95
160	48,9	5,29	46,47
200	48,4	4,98	40,32
240	45,8	4,62	35,27
280	42,0	4,20	31,03
320	36,3	3,57	27,50
360	26,1	2,61	24,57
400	0	0	22,06

und die Linien konstanter Drehzahl durch Linien konstanter Geschwindigkeitsleistungszahl (8, 27)

$$C_S = (8\pi)^{1/5} \cdot \frac{\lambda}{k_d^{1/5}} = \text{konst.}$$

gegeben. Sind Abszisse λ und die Ordinate k_d linear geteilt, so sind die Linien $c_l =$ konst. Parabeln dritter Ordnung, die Linien $C_S =$ konst. Parabeln fünfter Ordnung. Wählt man jedoch logarithmische Abszissen- und Ordinatenteilung, so werden die Linien $c_l =$ konst. und die Linien $C_S =$ konst. je parallele Geraden (Abb. 104). Die logarithmische Auftragung bietet also beachtliche Vorteile. Auch die Linien konstanten Drehmomentenbelastungsgrades c_d werden Geraden. Auf die Darstellung der Verhältnisse bei verschwindendem oder gar negativem λ bzw. k_d muß man dabei allerdings verzichten; doch erscheint dies meist unerheblich.

Die Linien für alle Größen, welche den Schub enthalten, also für k_s, c_s, C_{Ss}, σ, η, werden hierbei selbstverständlich keine Geraden. Hat man aber die Linien η = konst. eingetragen, welche im allgemeinen eiförmig geschlossene Kurven sind, so ist es für viele Zwecke nicht nötig, die übrigen krummen Linien für k_s, c_s, C_{Ss}, σ einzutragen. Im

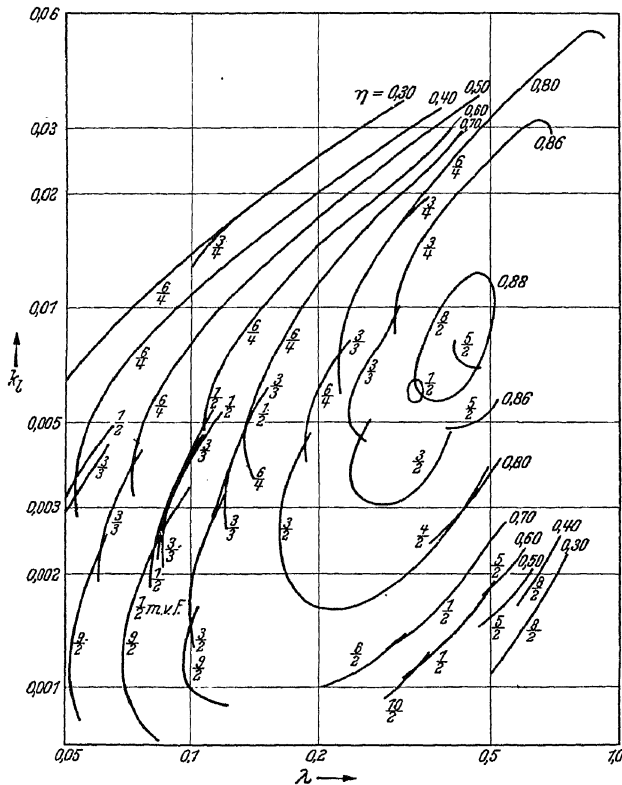



Abb. 103. Die Bestwirkungsgrade innerhalb der untersuchten Modellschrauben.

allgemeinen dürften die Geradenscharen $\frac{k_s}{\eta} = \frac{k_d}{\lambda}$, $\frac{c_s}{\eta} = \frac{k_d}{\lambda^3}$, $C_{Ss} \cdot \eta^{-1/4} = C_S^{5/4}$, $\frac{\sigma}{\eta} = \frac{1}{\lambda}$ genügen. Ihre Berührung mit den η = konst.-Linien gibt jedenfalls immer den jeweils besten Zustand und die Abweichung davon läßt sich immer rasch bestimmen.

Umgekehrt würden bei Wahl von λ und k_s als Abszisse und Ordinate und logarithmischer Auftragung, die Linien c_s und C_{S_s} Geraden und die Linien für alle Größen, welche die Leistung bzw. das Drehmoment enthalten, also für k_d, c_l, c_d, C_S, σ, η würden keine Geraden. Auch hier genügt es aber meist die Linien η = konst. allein als krumme

Linien einzutragen und statt der k_d, c_l, c_d, C_S, σ die Geradenscharen

$$\eta k_d = \lambda k_s, \quad \eta c_l = \frac{k_s}{\lambda^2} = c_s, \quad \eta c_d = \frac{k_s}{\lambda}, \quad \frac{C_S}{\eta^{1/5}} = C_{Ss}^{4/5}, \quad \frac{\sigma}{\eta} = \frac{1}{\lambda}$$

zu benutzen.

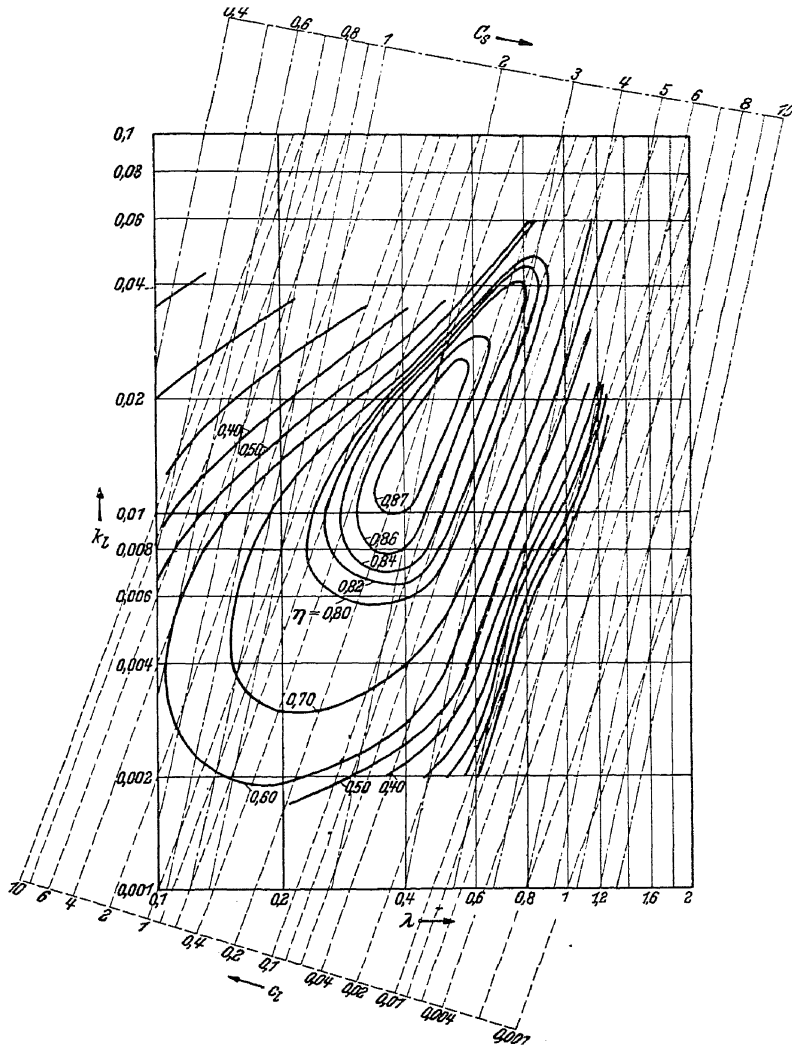



Abb. 104. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Fortschrittsgrad und Leistungsziffer, dargestellt mit Hilfe logarithmisch eingeteilter Koordinaten (Schraube 3/4).

Je nachdem, ob man von der Leistung des Motors oder vom Widerstand des Flugzeugs aus an die Schraubenberechnung herangeht, ist also die erstere oder die letztere Auftragungsart vorzuziehen.

Da parallele Geraden auch bei jeder affinen Abbildung der Ebene parallele Geraden bleiben, so kann man erreichen, daß immer zwei beliebige Parallelenscharen aufeinander senkrecht stehen, auch darf man die Maßstäbe noch beliebig wählen. So zeigt z. B. Abb. 105 c_l und C_s aufeinander senkrecht stehend. Prinzipiell könnte man noch einen Schritt weiter gehen und statt der Größen selbst deren Logarithmen auftragen. Die Teilung der Maßstäbe der Geradenscharen wäre dann

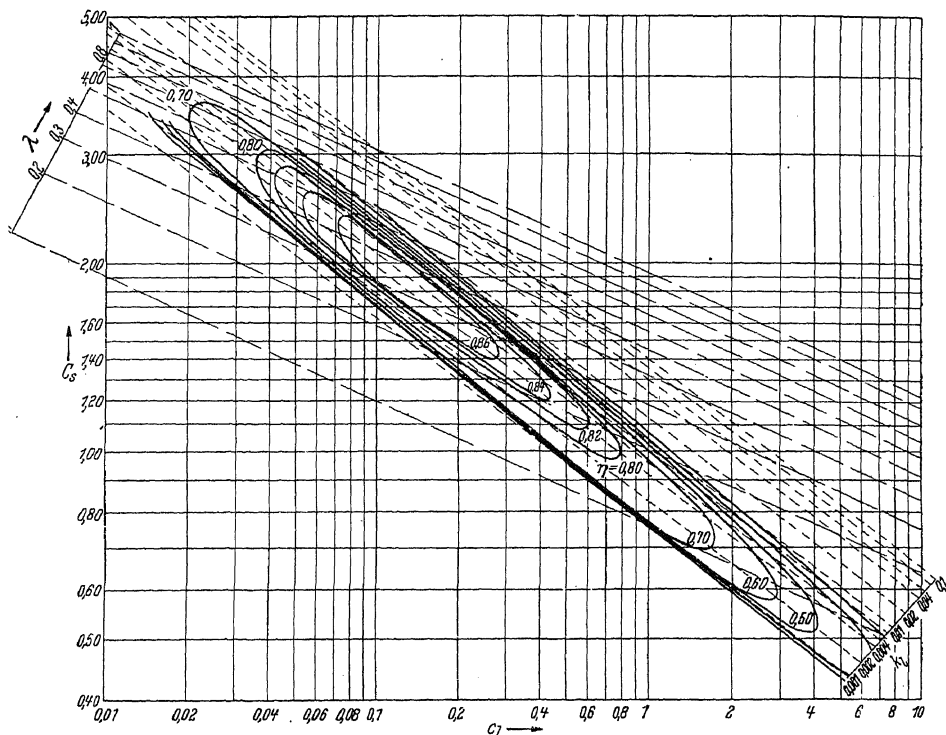



Abb. 105. Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Leistungsbelastungsgrad und Geschwindigkeitsleistungszahl dargestellt mit Hilfe logarithmischer Koordinaten (Schraube 3/2).

wieder linear und man könnte zum Auftragen gewöhnliches Millimeterpapier benutzen. Die Schnittpunkte einer Schar krummer Linien mit der betreffenden Geradenschar würden dann die Linien der Logarithmen jener Größen liefern, welche durch einmaliges Multiplizieren oder Dividieren aus den Ausgangsgrößen folgen. Diese Auftragung würde also die Ermittlung jener Werte außerordentlich erleichtern. Zum Gebrauch würde man aber nach entsprechender Interpolation zweckmäßig wieder auf die obigen logarithmisch geteilten Netze umzeichnen, welche die Größen selbst enthalten.

c) Darstellung des Standes der Technik. Würde man von allen bisher ausgeführten Luftschrauben die soeben beschriebenen $\eta(\lambda, k_d)$-Darstellungen besitzen, so könnte man für jeden Wert von λ und k_d den besten erreichten Wirkungsgrad $\bar{\eta}$ angeben. Man könnte hiermit ein Schaubild $\bar{\eta}(\lambda, k_d)$ aufzeichnen, welches den Stand der Technik darstellen würde. Dieses Schaubild würde nämlich durch die Linien $\bar{\eta}$ = konst. angeben, daß zwar innerhalb des von dieser Linie begrenzten Bereiches auch schlechtere Wirkungsgrade vorkommen bei den zugrunde gelegten ausgeführten Schrauben, außerhalb aber nur schlechtere Wirkungsgrade verwirklicht worden sind [Lit. 8].

Da man leider nur für wenige ausgeführte Schrauben bzw. Schraubenmodelle die erreichten Wirkungsgrade kennt, muß man sich zur Darstellung des Standes der Technik mit den Ergebnissen der bisher durchgeführten systematischen Schraubenversuche begnügen. Solche Versuche erstreckten sich immer auf einige planvoll voneinander verschieden ausgeführte Schraubenfamilien.

Die Ergebnisse von vier systematischen Versuchsreihen sind in Abb. 106 bis 109 dargestellt. Da diese Schrauben nach ganz verschiedenen Gesichtspunkten entworfen worden sind, ist es verständlich, daß diese Ergebnisse in den Einzelheiten noch ziemlich verschieden sind. Aus ihnen wurde ein Bild des entsprechenden Standes der Technik dadurch entworfen, daß sie übereinander gezeichnet wurden und zu den Kurven gleichen Wirkungsgrades Einhüllende gezeichnet wurden. Diese Einhüllenden sind in Abb. 110 als Stand der Technik wiedergegeben. Künftig sind nur noch einige, wenn auch nicht große Fortschritte, insbesondere im Gebiete sehr großer und sehr kleiner k_d-Werte und im Gebiete größerer λ-Werte zu erwarten. Dies ist zu erhoffen teils durch die Verwendung besserer Flügelprofile, welche unter Umständen durch den Fortschritt der Konstruktion und der Verwendung anderen Werkstoffs ermöglicht werden, teils durch Anwendung sehr schmaler Blätter im Gebiete kleiner k_d und sehr breiter Blätter im Gebiete großer k_d, teils durch das Vordringen zu größerem Fortschrittsgrade λ. An den in den letzten Jahren erzielten Fortschritten dürfte auch die zweckmäßigere Blattbreitenverteilung Anteil gehabt haben. Die späteren Darlegungen werden noch zeigen, daß die erreichbaren Wirkungsgrade durchaus den theoretisch errechenbaren entsprechen und Abweichungen zum größten Teil innerhalb der Meßgenauigkeit liegen. Der Stand der Technik deckt sich also heute in dem Bereiche üblicher k_d und λ so sehr mit den Ergebnissen der Rechnung, daß deren Zulässigkeit auch genügend weit über den erprobten Bereich hinaus gesichert erscheint.

d) Benutzung der Versuchsergebnisse. Der wichtigste Zweck planmäßiger Schraubenversuche ist die Vorausbestimmung des Wirkungsgrades einer beabsichtigten Schraube bzw. die Festlegung ihres zweck-

mäßigsten Durchmessers und in dem Falle, daß die Schraubendrehzahl noch frei wählbar ist, auch der Schraubendrehzahl. Wenn weder das Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit noch der Einbau am Flugzeug eine Rolle spielten, könnte man schon nach den Versuchsergebnissen an freifliegenden Schrauben den Durch-

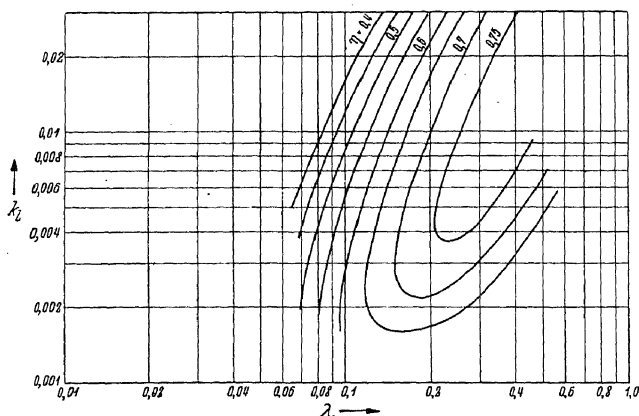



Abb. 106. Wirkungsgradgrenzen nach Versuchen von EIFEL.

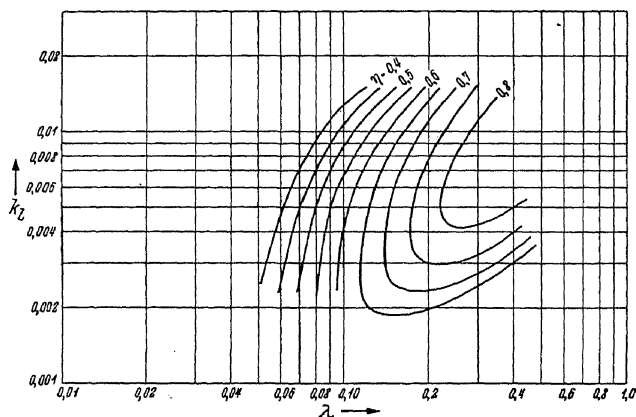



Abb. 107. Wirkungsgradgrenzen nach Versuchen von DURAND und LESLEY.

messer und die Drehzahl bestimmen. Im allgemeinen muß man jedoch diese Umstände wenigstens überschlägig berücksichtigen. Dies tut man entweder von vornherein durch entsprechende Korrektur des Auswahldiagramms oder durch nachträgliche Korrektur der erhaltenen Ergebnisse.

Am einfachsten ist die Auswahl dann, wenn man jenen Flugzustand angeben kann, für welchen ein möglichst hoher Wirkungsgrad erzielt

werden soll, ohne weitere Rücksicht darauf, wie Wirkungsgrad und Leistungsaufnahme in anderen Flugzuständen sind. Dieser Entwurfsbetriebszustand wird im allgemeinen ein zweckmäßiges Mittel zwischen bestem Steigen und schnellstem Horizontalfliegen in einer mittleren Flughöhe sein. Gegeben seien dann ϱ, N, v. Gesucht sind n, D. Im

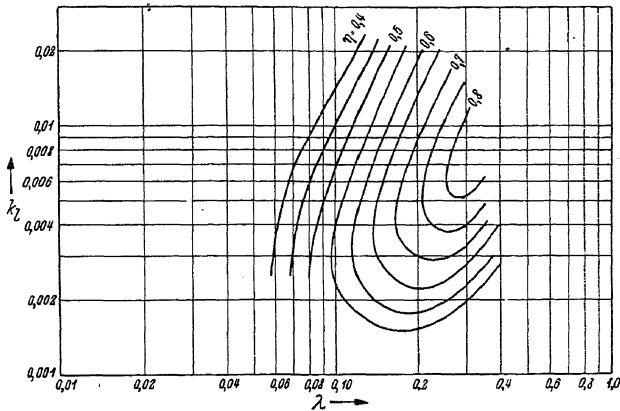



Abb. 108. Wirkungsgradgrenzen nach Versuchen von SCHAFFRAN.

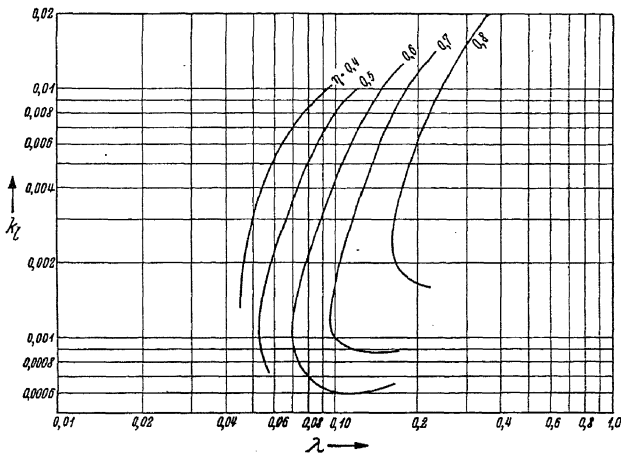



Abb. 109. Wirkungsgradgrenzen nach Versuchen von DIRKSEN.

allgemeinen braucht man aber zur Auswahl nicht den ganzen Bereich der möglichen λ und k_d bzw. c_l und C_S in Betracht zu ziehen. Der Durchmesser der Schraube wird z. B. durch Bodenfreiheit beim Start oder Gewicht nach oben hin beschränkt sein und durch die Notwendigkeit der Startfähigkeit nach unten. Die Drehzahl ist nach oben hin meist beschränkt durch die Motorendrehzahl und nach unten durch

die Größe der Untersetzung durch ein Getriebe, welche dessen Gewicht bedingt. Es gibt damit obere und untere Grenzen für c_l und C_S. Nur in dem davon umschlossenen Viereck ist die Schraube noch wählbar.

Eine weitere Grenze stellt die Spitzengeschwindigkeit w dar, welche $\sim 0{,}90$ der Schallgeschwindigkeit w_s nicht übersteigen sollte. Damit ist eine untere Grenze für den Fortschrittsgrad λ festgelegt, so daß

Abb. 110. Stand der Technik auf Grund systematischer Modellversuche.

$$\overline{\sqrt{1+\lambda^2}} \nearrow \overline{0{,}9\, w_s} \qquad (10,1)$$

sein muß. Wenn die Auswahlaufgabe in dieser Weise lösbar sein soll, muß die dem Werte $\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{v}{0{,}9 \cdot w_s}$ entsprechende λ-Linie das beschriebene Auswahlviereck schneiden oder darunter verlaufen. Aus dem übrigbleibenden oberen Teil des Auswahlvierecks ist die Schraube zu wählen. Kommt man auf diese Weise zu keiner Lösung, so muß entweder eine höhere Spitzengeschwindigkeit, ein größerer Durchmesser oder eine stärkere Untersetzung zugelassen werden. Die beste Schraube des Bereichs kann man nun wählen und auf ihre Brauchbarkeit für andere Flugzustände und den Start näher untersuchen. Ist der Bereich, aus dem die Schraube gewählt werden kann, groß, so kann man, statt sich sofort auf die beste Schraube dieses Bereichs festzulegen, auch benachbarte Schrauben auf ihr Verhalten in den wichtigsten Flugzuständen untersuchen und erst dann die Auswahl treffen.

Muß man bei der Auswahl der Hauptabmessungen einer Schraube auf einen sehr großen Betriebsbereich Rücksicht nehmen, so empfiehlt es sich, unter Annahme etwa der Flügelzahl und der Blattbreite den Wirkungsgrad für verschiedene Durchmesser und Drehzahlen zu bestimmen, und zwar für die wichtigsten Flugzustände. Als Beispiel für eine solche Auswahlrechnung möge Abb. 111 dienen. Berücksichtigt wurde dabei überschlägig die Einbauwirkung, nicht dagegen der

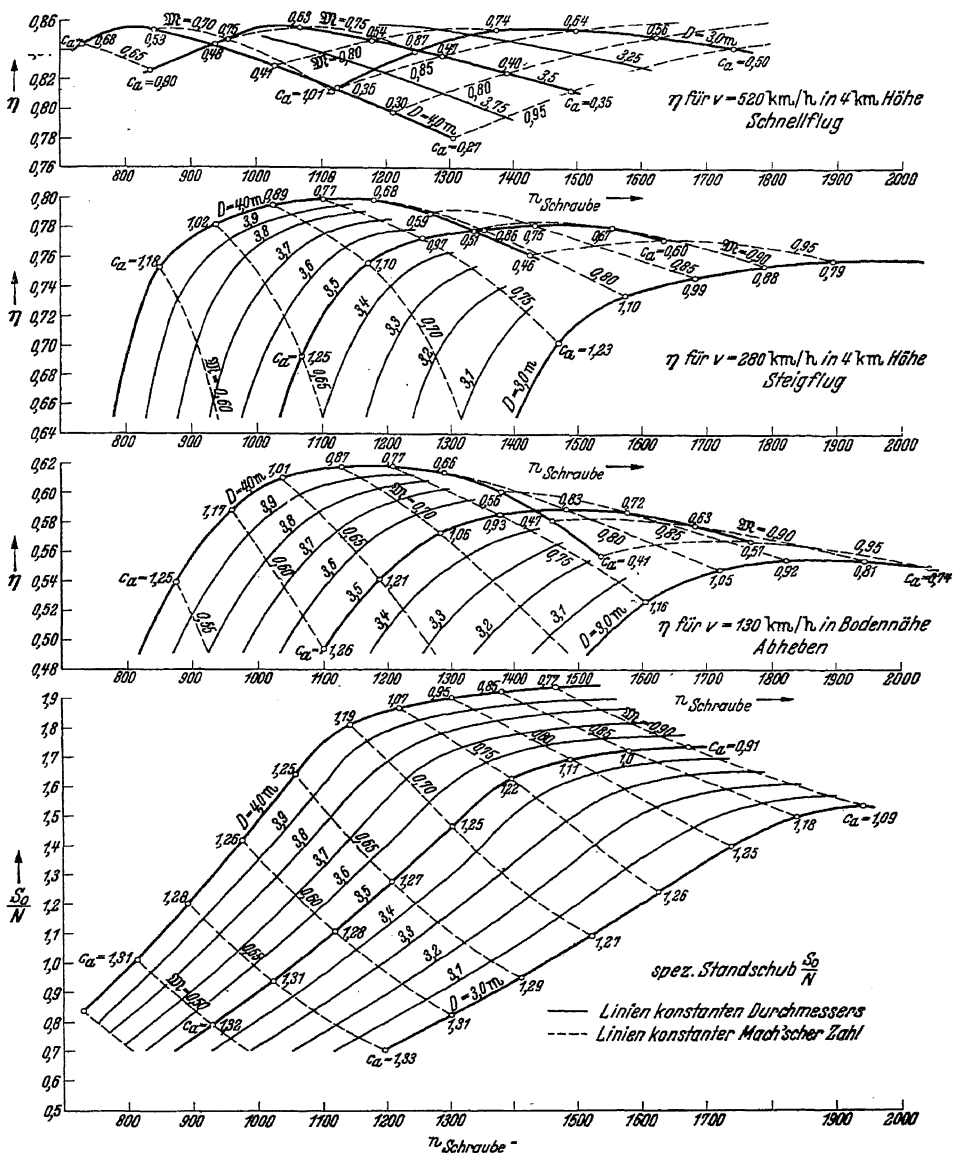



Abb. 111. Standschub und Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Drehzahl und Durchmesser für $N = 1100$ PS, $\mathfrak{z} = 3$, $t/D = 0{,}08$ als Beispiel für eine Schraubenauswahlrechnung.

Einfluß der Kompressibilität. Die beigeschriebenen MACHschen Zahlen lassen erkennen, ob diese dabei berücksichtigt werden müssen. Für

den Stand dürfte die Grenze praktisch bei $\mathfrak{M} = 0{,}8$, für Abheben und Steigen bei $\mathfrak{M} = 0{,}85$, beim Schnellflug bei etwa $\mathfrak{M} = 0{,}9$ liegen. Oberhalb dieser Grenzen wären also entsprechende Abzüge zu machen. Beigeschrieben sind ferner die mittleren Auftriebsbeiwerte c_a der Schraubenflügel.

Wenn man z. B. die Standschübe für $D = 3{,}5$ m verfolgt, so ist zu erkennen, daß sie mit zunehmender Drehzahl zwischen $n = 900$ bis 1400 U/min steigen. Die angeschriebenen c_a-Werte zeigen beim Aufsuchen in der Polaren, daß die Schraube in diesem Bereich im Gebiet stark abgerissener Strömung arbeitet und daß das Motordrehmoment zum Teil nutzlos in Widerstand umgesetzt wird. Die Verringerung des Drehmomentes und die Erhöhung der Drehzahl ergibt ein kaum verringertes c_a, dafür aber einen mit dem Quadrat der Drehzahl ansteigenden Staudruck, so daß der Standschub stark anwächst. Oberhalb von $n = 1400$ U/min verringert sich der Anstieg des Standschubes, denn von jetzt an arbeitet die Schraube bei c_a-Werten mit günstiger Gleitzahl. Bei immer weiterer Steigerung der Drehzahl würde schließlich die Gleitzahl wieder schlechter und der Standschub würde wieder abnehmen. Da jedoch bei $n = 1480$ U/min schon die Machsche Zahl von $\mathfrak{M} = 0{,}8$ erreicht ist, so muß darüber schon ein Abzug gemacht werden, so daß der Standschub sehr bald sinkt. Für diese Schraube wäre also aus Standschubgründen $n = 1400$ bis 1450 etwa die zweckmäßige Drehzahl.

Nach den gleichen Gesichtspunkten verfolgt man jetzt das Verhalten der gewählten Schraube bei den verschiedenen Flugzuständen. Z. B. arbeitet die Schraube mit $D = 3{,}5$ m im Schnellflug am besten bei $n = 1050$ U/min, so daß man eine Drehzahlabminderung von $n = 1450$ auf $n = 1050$ U/min für richtig halten würde. Nun zeigt ein Blick auf den Steigflug, daß bei $n = 1050$ U/min nur ein $\eta = 0{,}67$ vorhanden ist. Die Schraube arbeitet in diesem Flugzustand im abgerissenen Gebiet, so daß man zu einem Kompromiß gezwungen wird und die Drehzahl erhöhen wird, zumal der Schnellflugwirkungsgrad ein flaches Optimum hat. Bei $n = 1250$ ergibt sich ein Verlust von $\eta = 0{,}855$ auf $\eta = 0{,}838$ im Schnellflug und ein Gewinn von $\eta = 0{,}67$ auf $\eta = 0{,}77$ im Steigflug. Wenn man auch noch den Wirkungsgrad beim Abheben betrachtet, so kommt man zu dem Ergebnis, daß eine Drehzahl für den Start von $n = 1400$ U/min und $n = 1250$ U/min für Steig- und Schnellflug den besten Kompromiß darstellt. Es ergibt sich für $n = 1250$ U/min ein $S_0/N = 1{,}36$ kg/PS und für $n = 1400$ U/min 1,64 kg/PS, es entsteht also ein Standschubgewinn von etwa 20%.

Aus diesem Beispiel, das etwa den heutigen Verhältnissen von Motorleistungen und Flugleistungen entspricht, erkennt man, daß eine

Drehzahlsteigerung für den Start von 10 bis 15% einen beträchtlichen Gewinn bedeutet. An diesem Bild ändert sich auch nicht viel, wenn Schrauben von anderem Blattbreitenverhältnis genommen werden. Zu betonen ist noch, daß die Leistung für Start und Volldruckhöhe konstant angenommen ist. Der wünschenswerte Drehzahlunterschied muß noch größer sein, wenn, wie das bei vielen Motoren der Fall ist, die Startleistung höher ist als die Volleistung in Volldruckhöhe. Für die Verwirklichung der Drehzahlsteigerung am Stande und beim Start gibt es zwei Möglichkeiten: die kurzzeitige Überladung des Motors und die Verwendung von Wechselgetrieben.

II. Untersuchungen am Schraubenelement.

C. Zusammenhänge zwischen Wirkungsgrad und Leistung.

11. Allgemeine Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten und Kräften.

a) Der Begriff der Elementarschraube. Bevor wir zur Behandlung wirklich ausführbarer Luftschrauben übergehen, wollen wir die sog. Elementarschraube betrachten. Der weitaus wichtigste Teil aller Erscheinungen an einer wirklichen Schraube kann nämlich an einer solchen Elementarschraube schon untersucht werden, so daß durch deren Untersuchung das Verständnis der Vorgänge an der ganzen Schraube wirksam gefördert wird. Die Untersuchung der Elementarschraube zeigt aber auch, in welchen Fällen es erlaubt ist die Wirkung einer wirklichen Schraube einfach durch die Wirkung aneinandergereihter Elementarschrauben zu ersetzen und in welchen Fällen darüber hinaus zusätzliche Betrachtungen anzustellen sind bei der Berechnung einer Schraube.

Die Elementarschraube besteht aus einem zylindrischen Flügelstückchen von der Spannweite dr im Abstand r von der Schraubenachse. Die Wirkung der übrigen Schraubenteile sei ausgeschaltet gedacht und das Flügelstückchen zu einem Flügel mit über die Spannweite konstantem Auftrieb gemacht durch zwei starre koaxiale, sich gegenseitig den Erfordernissen der Schraubenströmung entsprechend etwas nähernde Rotationsflächen, die das Flügelstückchen begrenzen und sich hinreichend weit vor und hinter die Schraube erstrecken (Abb. 112).

Die Bewegung der Luft erfolgt dann auf entsprechenden Rotationsflächen, bei $dr \to 0$ auf einer Zylinderfläche. Weit vor der Elementarschraube (Index 0) hat die Luft relativ zum Flugzeug die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_{m_0}$. Eine Umfangskomponente ist nicht vorhanden: $\mathfrak{v}_{u_0} = 0$.

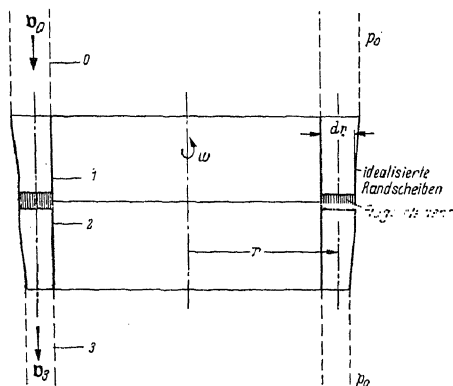



Abb. 112. Zur Erläuterung des Begriffs Elementarschraube.

Weit hinter der Elementarschraube (Index 3) ist die Geschwindigkeit in ihrer achsialen und tangentialen Größe verändert.

Es sei (Abb. 113)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_3 &= \mathfrak{v}_{m_3} + \mathfrak{v}_{u_3}; \\ v_{m_3} &= v_{m_0} + v_a; \\ v_{u_3} &= v_u . \end{aligned}\right\} \qquad (11,1)$$

Während des Durchgangs durch die Schraubenkreisebene kann sich die Geschwindigkeit in achsialer Richtung nicht wesentlich ändern. Wir geben daher den die Elementarschraube begrenzenden Rotationsflächen in Nähe des Flügelstückchens zylindrische Gestalt. Die mittlere Achsialkomponente $v_{m\infty}$ beim Durchtritt (Index ∞) durch dar durch die Flügelstückchen gebildete Profilgitter ist dann gleich des mittleren Achsialkomponente v_{m_1} etwa vor dem Gitter (Index 1) und gleich der mittleren Achsialkomponente v_{m_2} kurz hinter dem Gitter (Index 2). Die Strömung einer Elementarschraube hat also in Nähe der Schraubenkreisebene keine Radialkomponenten und ist daher ebenso wie eine ebene Strömung zu behandeln. Für die Gestalt der die Elementarschraube begrenzenden Rotationsflächen werden wir noch einige Beziehungen darlegen, deren Erfüllung notwendig ist, damit diese Elementarschraube ähnliche Eigenschaften hat wie eine wirkliche Schraube.

Abb. 113. Geschwindigkeitsdiagramm der Elementarschraube.

b) Der Begriff der Leistung und der Nutzarbeit. Die die Elementarschraube begrenzenden Rotationsflächen müssen die wesentlichen Eigenschaften von Strömungsflächen haben. Die auf sie wirkende Gesamtkraft muß verschwinden. Von der Reibung an ihnen muß demnach ebenfalls abgesehen werden. Die von der Strömung ausgeübten Kräfte greifen also an dem Flügelstück der Elementarschraube an. Von einer Kraftkomponente in Richtung des Radius möge abgesehen werden. Die Kraftkomponente in Richtung der Schraubenachse ist der Schub dS, die Kraftkomponente in Richtung des Umfangs die Drehkraft dT der Elementarschraube. Die von der Elementarschraube aufzubringende Leistung dN ist

$$dN = u\,dT . \qquad (11,2)$$

Die von der Schraube geleistete Nutzarbeit ist

$$dN_n = v_0 dS. \qquad (11,3)$$

Hiermit ergibt sich der Wirkungsgrad η der Elementarschraube zu

$$\eta = \frac{v_0 dS}{u\,dT} \quad \text{(Abb. 114)}. \qquad (11,4)$$

Es ist aber $v_0/u = \lambda_0 = \mathrm{tg}\,\beta_0$ der Fortschrittsgrad der Elementarschraube, so daß $\eta = \lambda_0 \frac{dS}{dT}$. Die Normale zu der aus dS und dT resultierenden Kraft dP möge mit der Umfangsrichtung den Winkel β_p einschließen. Damit ergibt sich der Wirkungsgrad allgemein zu

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,\beta_0}{\mathrm{tg}\,\beta_p}. \qquad (11,5)$$

Abb. 114. Kräftediagramm der Elementarschraube.

c) Berechnung von Schub und Drehkraft nach dem Impulssatz. Schub und Drehkraft sind bestimmt durch die durch die Schraube hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderungen. Weit vor und weit hinter der Elementarschraube ist der Druck gleich, so daß Druckunterschiede zwischen dem Eintritt und dem Austritt der Luft bei der Elementarschraube nicht möglich sind und daher auch keinen Schub erzeugen können.

Die Geschwindigkeitsänderung durch die Elementarschraube ist (Abb. 113)

$$\Delta \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_0. \qquad (11,6)$$

Die Änderung der Achsialkomponente ist

$$\Delta v_m = v_{m_3} - v_{m_0} = v_a. \qquad (11,7)$$

Ist $v_{m\infty}$ die Achsialkomponente der mittleren Durchtrittsgeschwindigkeit durch die Schraubenkreisebene, so ist

$$d\dot{m} = \varrho v_{m\infty} \cdot 2\pi r\,dr \qquad (11,8)$$

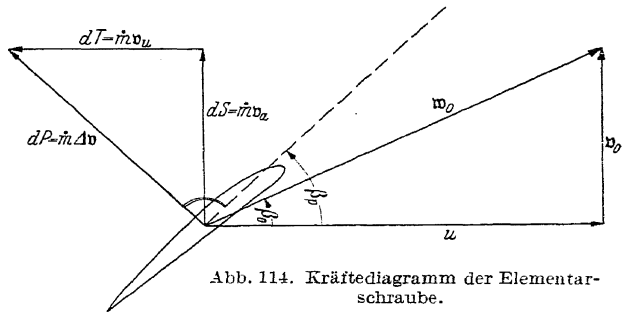
die zeitlich durch die Elementarschraube strömende Masse. Der Schub dS ist also

$$dS = d\dot{m} v_a = \varrho v_{m\infty} v_a \cdot 2\pi r\,dr. \qquad (11,9)$$

Die Tangentialkraft ist entsprechend

$$dT = d\dot{m} v_u = \varrho v_{m\infty} v_u \cdot 2\pi r\,dr. \qquad (11,10)$$

Der Wirkungsgrad kann also auch geschrieben werden (11,4)

$$\eta = \frac{v_0}{u} \cdot \frac{v_a}{v_u}. \qquad (11,11)$$

Die Resultierende $d\mathfrak{P} = d\mathfrak{S} + d\mathfrak{T}$ muß der Größe nach sein $dP = \varrho v_m \Delta v \cdot 2\pi r dr$ und mit der Richtung von $\Delta \mathfrak{v}$ zusammenfallen.

d) Die Kenngrößen der Elementarschraube. Durch einfache Umformung erhält man für dS und dT den Ausdruck (11, 9), (11, 10)

$$dS = \frac{\varrho}{2} v_0^2 \cdot 2\pi r\, dr \cdot 2 \frac{v_a}{v_0} \cdot \frac{v_{m\infty}}{v_0},$$

$$dT = \frac{\varrho}{2} v_0^2 \cdot 2\pi r\, dr \cdot 2 \frac{v_u}{v_0} \cdot \frac{v_{m\infty}}{v_0}$$

und damit für das Drehmoment dM

$$dM = r\, dT = \frac{\varrho}{2} v_0^2 \cdot 2\pi r^2 dr \cdot 2 \frac{v_u}{v_0} \frac{v_{m\infty}}{v_0}.$$

Unter Schubbelastungsgrad der Elementarschraube hat man also zu verstehen mit $dF = 2\pi r\, dr$

$$c_s = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 dF} = 2 \frac{v_a}{v_0} \frac{v_{m\infty}}{v_0}. \tag{11, 12}$$

Entsprechend wird die Schubziffer mit $\lambda_0 = v_0/u$

$$k_s = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2} u^2 dF} = \lambda_0^2 \cdot 2 \frac{v_a}{v_0} \frac{v_{m\infty}}{v_0} = 2 \frac{v_a}{u} \cdot \frac{v_{m\infty}}{u} \tag{11, 13}$$

und die Drehmomentziffer

$$k_d = \frac{dM}{r \frac{\varrho}{2} u^2 dF} = \lambda_0^2 \cdot 2 \frac{v_u}{v_0} \frac{v_{m\infty}}{v_0} = 2 \frac{v_u}{u} \cdot \frac{v_{m\infty}}{u}. \tag{11, 14}$$

Durch Bildung des Quotienten k_s/k_d erhält man

$$\frac{k_s}{k_d} = \frac{v_a}{v_u}. \tag{11, 15}$$

Der Wirkungsgrad der Elementarschraube ist also wie oben:

$$\eta = \lambda_0 \frac{dS}{dT} = \lambda_0 \frac{k_s}{k_d} = \lambda_0 \frac{v_a}{v_u}. \tag{11, 16}$$

Die abgeleiteten Formeln sind unter der Voraussetzung der Druckgleichheit vor und hinter der Elementarschraube allgemein gültig. Zu ihrer Verwendung ist aber neben der Kenntnis von u und v_0 auch die von v_a, v_u und insbesondere auch von $v_{m\infty}$ nötig.

e) Zusammenhang zwischen Austrittsverlust und Wirkungsgrad. Hinter der Schraube ist der Energie-Inhalt der Strömung ein anderer als vor der Schraube. Bei der Elementarschraube ist entsprechend der Voraussetzung ungeänderten Drucks die potentielle Energie ungeändert.

Die Energieänderung besteht dann nur in einer Änderung kinetischer Energie. Vor der Elementarschraube ist der Energiefluß

$$d\dot{E}_0 = \frac{\varrho}{2}\, dF\, v_{m\infty} v_0^2\,,$$

hinter der Schraube ist er

$$d\dot{E}_3 = \frac{\varrho}{2}\, dF\, v_{m\infty} v_3^2 = \frac{\varrho}{2}\, dF\, v_{m\infty}\left((v_0 + v_a)^2 + v_u^2\right).$$

Die der Strömung zeitlich zugeführte Energie ist somit

$$d\dot{E} = d\dot{E}_3 - d\dot{E}_0 = \frac{\varrho}{2}\, dF\, v_{m\infty}(2 v_0 v_a + v_a^2 + v_u^2)\,. \qquad (11,17)$$

Die Vermehrung der achsialen Austrittsenergie ist somit

$$d\dot{E}_a = \frac{\varrho}{2}\, dF\, v_{m\infty}(2 v_0 v_a + v_a^2)\,. \qquad (11,18)$$

Die in Drall umgesetzte Energie ist

$$d\dot{E}_u = \frac{\varrho}{2}\, dF\, v_{m\infty} v_u^2\,. \qquad (11,19)$$

Die geleistete Nutzarbeit ist (11, 3)

$$v_0\, dS = \varrho\, dF\, v_{m\infty} \cdot v_a \cdot v_0\,.$$

Der Wirkungsgrad ist somit gegeben durch

$$\eta = \frac{v_0\, dS}{d\dot{E}} = \frac{2 v_a v_0}{2 v_a v_0 + v_a^2 + v_u^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{v_a^2 + v_u^2}{2 v_a v_0}}\,. \qquad (11,20)$$

Mit

$$\eta_a = \frac{v_0\, dS}{d\dot{E}_a}$$

wird der Achsialwirkungsgrad bezeichnet. Er wird

$$\eta_a = \frac{2 v_a v_0}{2 v_0 v_a + v_a^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{v_a}{2 v_0}}\,. \qquad (11,21)$$

Der Wirkungsgrad η selbst ist

$$\eta = \frac{v_0\, dS}{d\dot{E}}$$

Wir zerlegen ihn in

$$\eta = \eta_a \cdot \eta_d\,.$$

Der Faktor η_d berücksichtigt dann die Drallverluste. Er ist

$$\left.\begin{aligned} \eta_d = \frac{d\dot{E}_a}{d\dot{E}} = \frac{2 v_0 v_a + v_a^2}{2 v_0 v_a + v_a^2 + v_u^2} &= \frac{1}{1 + \dfrac{v_u^2}{2 v_0 v_a + v_a^2}} \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{\left(\dfrac{v_u}{v_0}\right)^2}{2\dfrac{v_a}{v_0}\left(1 + \dfrac{v_a}{2 v_0}\right)}} \end{aligned}\right\} \qquad (11,22)$$

12. Die ideale Elementarschraube.

a) Die Strömung weit vor und weit hinter der Schraube. Nach der Druckgleichung gilt für eine relativ zu einem rotierenden System stationäre Strömung bei Reibungsfreiheit, welche hier nunmehr vorausgesetzt werden soll,

$$p + \frac{\varrho}{2} w^2 - \frac{\varrho}{2} u^2 = \text{konst.} \tag{12,1}$$

Da sich u bei der Durchströmung der Elementarschraube nicht ändern soll und da der Druck vor und hinter der Elementarschraube gleich groß ist, so gilt für die Relativgeschwindigkeiten w_0 und w_3 weit vor der Schraube und weit dahinter

Abb. 115. Geschwindigkeitsdiagramm der Elementarschraube bei Reibungsfreiheit.

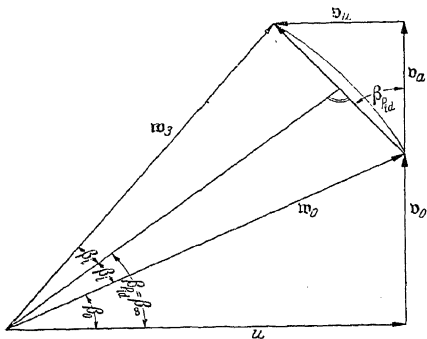
$$w_0^2 = w_3^2 . \tag{12,2}$$

w_0 ergibt sich aus der Umfangsgeschwindigkeit u und der Fortschrittsgeschwindigkeit v_0 zu

$$\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{u}$$

oder

$$w_0^2 = v_0^2 + u^2 . \tag{12,3}$$

Die Gleichheit von w_0 und w_3 besagt zeichnerisch, daß unter den für die Elementarschraube hier gemachten Voraussetzungen des Fehlens von Reibung und Kontraktion der Endpunkt von $\mathfrak{w}_3$ auf einem Kreise liegt mit w_0 als Radius um den Anfangspunkt von $\mathfrak{u}$ (Abb. 115).

Die Änderungsgeschwindigkeit $\Delta \mathfrak{v}$ muß also senkrecht stehen zur Winkelhalbierenden der Richtungen von $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_3$. Die aus dem Schub dS und der Tangentialkraft dT resultierende Kraft dP fällt in die Richtung von $\Delta \mathfrak{v}$ und damit wird der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \beta_{pi\,d}} \tag{12,4}$$

gegeben durch den Quotienten aus dem Fortschrittsgrad $\lambda_0 = \operatorname{tg} \beta_0$ und der Tangente $\operatorname{tg} \beta_{pi\,d}$ des Winkels $\beta_{pi\,d}$, den die Winkelhalbierende der Richtungen von $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_3$ mit der Umfangsrichtung einschließt.

Zwischen v_a und v_u der Elementarschraube besteht also bei Reibungsfreiheit der Zusammenhang

$$\frac{v_u}{v_a} = \operatorname{tg} \beta_{pi\,d} . \tag{12,5}$$

b) Die Strömung kurz vor und kurz hinter der Schraube. Da beim Durchgang durch den Schraubenkreis die Achsialkomponente sich

nicht ändert, so gilt für die mittleren Achsialkomponenten der Relativgeschwindigkeiten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ kurz vor und kurz hinter dem Schraubenkreis (Abb. 116)

$$w_{m_1} = w_{m_2} = w_{m\infty} = v_{m\infty} . \quad (12, 6)$$

Da sich ferner die Zirkulation vor dem Schraubenkreis nicht ändert und danach ebenfalls nicht, muß auch noch sein

$$w_{u_1} = w_{u_0} = u , \qquad w_{u_2} = w_{u_3} = u - v_u , \quad (12, 7)$$

oder

$$v_{u_1} = v_{u_0} = 0 , \qquad v_{u_2} = v_{u_3} = v_u . \quad (12, 8)$$

Die Zirkulation der Strömung ändert sich also beim Durchströmen des Profilgitters der Elementarschraube. Davor ist sie

$$\Gamma_1 = 0 ,$$

dahinter

$$\Gamma_2 = v_u \cdot 2\pi r .$$

Die Zirkulation um die $\mathfrak{z}$ Flügelteilchen der Elementarschraube ist also

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = \Gamma_2 - \Gamma_1 = v_u \cdot 2\pi r , \quad (12, 9)$$

die auf jedes der $\mathfrak{z}$ Flügelteilchen entfallende Zirkulation ist

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}} = \frac{2\pi r}{\mathfrak{z}} v_u .$$

Abb. 116. Die Durchflußverhältnisse in der Schraubenkreisebene bei Reibungsfreiheit.

$\frac{2\pi r}{\mathfrak{z}} = a$ ist die Teilung des Profilgitters der Elementarschraube. Der Zirkulation $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ entspricht nach der darzulegenden Gittertheorie die Drehkraft (11, 10), (14, 7)

$$dT = \varrho\, dr\, \Gamma_{\mathfrak{z}} v_{m\infty} = \varrho\, v_{m\infty} v_u \cdot 2\pi r\, dr , \quad (12, 10)$$

welches Ergebnis mit dem aus den Betrachtungen an den Geschwindigkeiten weit vor und weit hinter der Elementarschraube erhaltenen übereinstimmt.

Den Schub kann man aus der Relativgeschwindigkeit kurz vor und kurz hinter dem Schraubenkreis ebenfalls berechnen. Da eine Zunahme der mittleren Achsialkomponente nicht vorhanden ist, ergibt sich der Schub nur aus dem Druckunterschied der Strömung kurz vor und kurz hinter dem Schraubenkreis. Nach der Gittertheorie ist dieser dem Druckunterschied entsprechende Achsialschub (14, 6)

$$dS = \varrho\, dr\, \Gamma_{\mathfrak{z}} w_{u\infty} = \varrho\, w_{u\infty} v_u \cdot 2\pi r\, dr . \quad (12, 11)$$

Dieser Schub muß aber der gleiche sein wie der sich aus den Betrachtungen über die Geschwindigkeiten weit vor und weit hinter der

Elementarschraube ergebende (11, 9)

$$dS = \varrho v_{m\infty} v_a \cdot 2\pi r\, dr.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich also

$$w_{u\infty} = v_{m\infty} \frac{v_a}{v_u}$$

oder (12, 5)

$$\frac{v_{m\infty}}{w_{u\infty}} = \frac{v_u}{v_a} = \operatorname{tg} \beta_{pid}. \tag{12, 12}$$

Daraus folgt zunächst, daß die Richtung von $\mathfrak{w}_\infty$ mit der Winkelhalbierenden von $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_3$ zusammenfallen muß. Da aber (12, 7)

$$w_{u\infty} = \frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2} = \frac{w_{u_0} + w_{u_3}}{2} = u + \frac{v_u}{2} \tag{12, 13}$$

ist, so ergibt sich, daß $\mathfrak{w}_\infty$ zusammenfällt mit der Höhe in dem gleichschenkligen Dreieck, das aus $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_3$ gebildet wird.

Daraus folgt aber wieder, daß die Achsialkomponente $v_{m\infty}$ der mittleren Durchflußgeschwindigkeit durch die Schraubenkreisebene sein muß

$$v_{m\infty} = \frac{v_{m_0} + v_{m_3}}{2} = v_0 + \frac{v_a}{2}. \tag{12, 14}$$

w_∞ nennen wir die wirksame Anströmgeschwindigkeit. Für sie gilt also

$$\mathfrak{w}_\infty = \frac{\mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_3}{2}. \tag{12, 15}$$

Den Neigungswinkel der Richtung von $\mathfrak{w}_\infty$, den wirksamen Fortschrittswinkel, wollen wir mit β_∞ bezeichnen. Damit wird bei Reibungsfreiheit

$$\beta_p = \beta_\infty = \beta_{pid}. \tag{12, 16}$$

c) Schub und Drehmoment und deren Kenngrößen bei Reibungsfreiheit. Durch die zwischen $v_{m\infty}$ und v_0 bzw. $v_a/2$ gefundene Beziehung ist es möglich im Falle der Reibungsfreiheit aus den Gleichungen für Schub und Drehmoment und deren Kenngrößen $v_{m\infty}$ zu eliminieren. Wir erhalten damit (12, 14), (11, 9), (11, 10)

$$dS = \frac{\varrho}{2} v_0^2 dF\, 2 \frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right),$$

$$dM = \frac{\varrho}{2} v_0^2 r\, dF\, 2 \frac{v_u}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right)$$

und damit (11, 12), (11, 13), (11, 14)

$$c_s = 2 \frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right), \tag{12, 17}$$

$$k_s = 2 \frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right) \lambda_0^2, \tag{12, 18}$$

$$k_d = 2 \frac{v_u}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right) \lambda_0^2. \tag{12, 19}$$

Es ist aber auch (12, 12), (12, 16)

$$v_{m\infty} = w_{u\infty} \operatorname{tg} \beta_\infty, \tag{12, 20}$$

$$v_{m\infty} = \frac{v_u}{v_a}\left(u - \frac{v_u}{2}\right). \tag{12, 21}$$

Hiermit wird (11, 9), 11, 10)

$$dS = \frac{\varrho}{2}\, u^2 dF\, 2\,\frac{v_u}{u}\left(1 - \frac{v_u}{2u}\right),$$

$$dM = \frac{\varrho}{2}\, u^2 r\, dF\, 2\,\frac{v_u^2}{u\, v_a}\left(1 - \frac{v_u}{2u}\right)$$

und damit (11, 12), (11, 13,), (11, 14)

$$c_s = \frac{2}{\lambda_0^2}\,\frac{v_u}{u}\left(1 - \frac{v_u}{2u}\right), \tag{12, 22}$$

$$k_s = 2\,\frac{v_u}{u}\left(1 - \frac{v_u}{2u}\right), \tag{12, 23}$$

$$k_d = 2\,\frac{v_u^2}{u\, v_a}\left(1 - \frac{v_u}{2u}\right). \tag{12, 24}$$

Wir können aber auch v_a/v_0 und v_u/u durch c_s bzw. k_s ausdrücken. Aus Gleichung (12, 17) erhalten wir durch Auflösen

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1 \tag{12, 25}$$

und aus Gleichung (12, 23)

$$\frac{v_u}{u} = 1 \underset{(+)}{-} \sqrt{1 - k_s}. \tag{12, 26}$$

Das positive Vorzeichen der Wurzel ist, wie aus Abschnitt 15 folgen wird, ohne Verwirklichungsmöglichkeit.

d) Der Wirkungsgrad der idealen Elementarschraube. Mit Hilfe der so gewonnenen Beziehungen ist es leicht, den Wirkungsgrad in Abhängigkeit vom Schubbelastungsgrad und dem Fortschrittsgrad darzustellen. Wir fanden (11, 11)

$$\eta = \frac{v_0}{u}\,\frac{v_a}{v_u}.$$

Durch Umformen erhalten wir [Lit. 70]

$$\eta = \left(\frac{v_0}{u}\right)^2 \frac{v_a/v_0}{v_u/u}.$$

Durch Einsetzen der für v_a/v_0 und v_u/u gewonnenen Größen ergibt sich also für die ideale Elementarschraube

$$\eta_{id} = \lambda_0^2\,\frac{\sqrt{1 + c_s} - 1}{1 \underset{(+)}{-} \sqrt{1 - k_s}}.$$

Eine einfache Umformung liefert hieraus

$$\eta_{id} = \lambda_0^2\,\frac{c_s}{k_s}\,\frac{1 \underset{(-)}{+} \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 + c_s}}$$

oder, da $k_s = \lambda_0^2 c_s$
$$\eta_{id} = \frac{1 \underset{(-)}{+} \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 + c_s}} \qquad \text{(Abb. 117).} \qquad (12,27)$$

Für sehr kleine λ_0 wird v_u/v_a bei gegebenem c_s immer kleiner. Dabei werden auch die den Umfangskomponenten entsprechenden Anteile an der kinetischen Energie der Strömung nach Verlassen der Schraube immer kleiner. Damit wird $\eta_{id} = \eta_a$

$$\eta_a = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}}. \qquad (12,28)$$

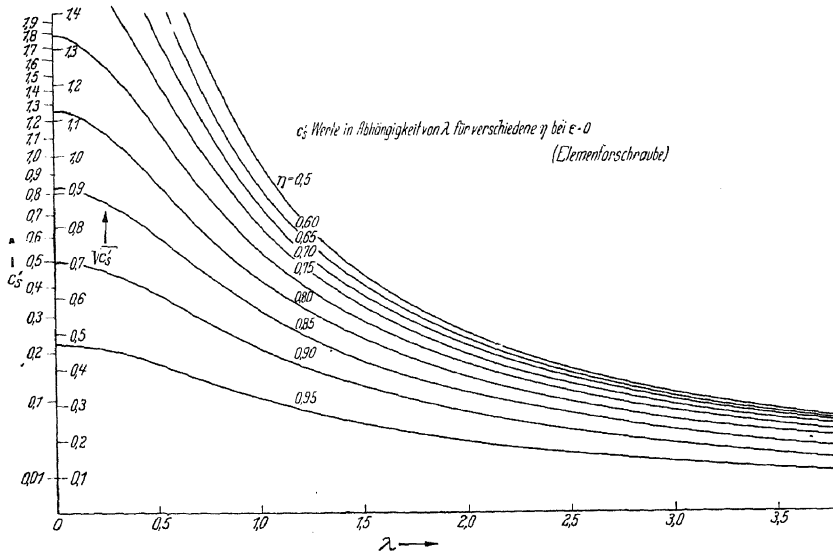



Abb. 117. Der Zusammenhang zwischen dem Wirkungsgrad η, Fortschrittsgrad λ' und Schubbelastungsgrad c_s' der Elementarschraube bei Reibungsfreiheit.

η_a ist also der Wirkungsgrad einer Schraube bei Fehlen von in Umfangskomponenten enthaltener kinetischer Energie. η_a berücksichtigt den dann allein vorhandenen Verlust an kinetischer Energie, welcher durch die achsialen Zusatzgeschwindigkeiten bedingt wird. Schreibt man nun

$$\eta_{id} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}} \cdot \frac{1 \underset{(-)}{+} \sqrt{1 - k_s}}{2},$$

so berücksichtigt der zweite Faktor

$$\eta_d = \frac{1 \underset{(-)}{+} \sqrt{1 - k_s}}{2} \qquad (12,29)$$

den durch die Umfangskomponenten bedingten Anteil am Verlust an kinetischer Energie, den sog. Verlust durch Strahldrehung.

Für kleine k_s kann η_d näherungsweise gesetzt werden:

$$\eta_d = 1 - \frac{k_s}{4} - \frac{k_s^2}{16} \cdots .$$

e) Die Grenze des Belastungsgrades. Aus der Konstruktion von $\mathfrak{w}_3$ geht hervor, daß es zu einem jeden gegebenen v_a geometrisch zwei Lösungen gibt, wenn v_a nicht zu groß ist. Da sich aus v_a/v_0 der Schub errechnet, aus v_u/u die aufzubringende Leistung, leuchtet es ohne weiteres ein, daß die Lösung mit dem größeren v_u/u, vorausgesetzt, daß sie überhaupt möglich wäre, auch die unwirtschaftliche sein muß. Ihr entspräche in den Gleichungen für den Wirkungsgrad das eingeklammerte Vorzeichen. Die Lösung mit dem größeren v_u/u ist also niemals anzustreben. Wird $v_a > w_0 - v_0$, so gibt es keine Lösung (Abb. 118). Durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_{a\,gr}}{v_0} &= \frac{w_0}{v_0} - 1 \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_0^2}} - 1 \end{aligned}\right\} \qquad (12,30)$$

ist also eine geometrische Grenze für die Belastbarkeit einer Schraube gesetzt. Diesem Fall entspräche ein $v_{u\,gr} = u$. Der für diese Belastungsgrenze also mögliche Wirkungsgrad wäre

Abb. 118. Das Geschwindigkeitsdiagramm der Elementarschraube bei Reibungsfreiheit im Grenzfalle.

$$\eta_{gr} = \left(\frac{v_0}{u}\right)^2 \cdot \frac{v_{a\,gr}/v_0}{v_{u\,gr}/u} = \lambda_0^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_0^2}} - 1\right) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_0^2}}} .$$

Aus

$$\frac{v_{a\,gr}}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_0^2}} - 1$$

folgt

$$2\,\frac{v_{a\,gr}}{v_0}\left(1 + \frac{v_{a\,gr}}{2\,v_0}\right) = \frac{1}{\lambda_0^2} = c_{s\,gr} .$$

Somit ist die geometrische Grenze der Belastbarkeit gegeben durch

$$c_{s\,gr} = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad \text{oder} \quad k_{s\,gr} = 1. \qquad (12,31)$$

Diese Grenze wurde hier zunächst aus geometrischen Beziehungen abgeleitet. Es wird aber später noch gezeigt werden, daß die erreichbare Grenze für v_u tatsächlich durch u gegeben ist. Dieser Fall wird aller-

dings nur erreicht für den Steigungswinkel $\beta^* = 90°$ und sehr breite Flügel.

Da in diesem Grenzfall $k_{s\,\mathrm{gr}} = 1$ wird, ist der Wirkungsgrad mit $\sqrt{1 - k_s} = 0$ auch gegeben durch

$$\eta_{\mathrm{gr}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + c_{s\,\mathrm{gr}}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_0^2}}}. \qquad (12,32)$$

In diesem Grenzfall wäre also

$$\eta_a = 2\,\eta_{\mathrm{gr}}\,; \quad \eta_{d\,\mathrm{gr}} = \tfrac{1}{2}\,, \qquad (12,33)$$

d. h. infolge der Strahldrehung wird in diesem Grenzfall der Wirkungsgrad nur die Hälfte von dem, der ohne Strahldrehung erreichbar sein würde.

f) Berechnung des Wirkungsgrades aus dem Austrittsverlust. Der achsiale Austrittsverlust ist (11,18)

$$d\dot{E}_a = \frac{\varrho}{2}\,dF\,v_{m\infty}\,(2\,v_0\,v_a + v_a^2) = \frac{\varrho}{2}\,dF\,v_{m\infty}\cdot 2\,v_0\,v_a\left(1 + \frac{v_a}{2\,v_0}\right).$$

Da aber bei Reibungsfreiheit (12,14)

$$v_{m\infty} = v_0\left(1 + \frac{v_a}{2\,v_0}\right),$$

so wird

$$d\dot{E}_a = \frac{\varrho}{2}\,dF\,v_{m\infty}^2\cdot 2\,v_a = \frac{\varrho}{2}\,dF\,v_0^2\left(1 + \frac{v_a}{2\,v_0}\right)^2\cdot 2\,v_a\,. \qquad (12,34)$$

Der Drallverlust ist (11,19)

$$d\dot{E}_u = \frac{\varrho}{2}\,dF\,v_{m\infty}\cdot v_u^2$$

oder

$$d\dot{E}_u = \frac{\varrho}{2}\,dF\,v_0\left(1 + \frac{v_a}{2\,v_0}\right)v_u^2\,. \qquad (12,35)$$

Hiermit ergibt sich für den Achsialwirkungsgrad wieder (11,21)

$$\eta_a = \frac{v_0\,dS}{d\dot{E}_a} = \frac{1}{1 + \frac{v_a}{2\,v_0}}.$$

Es ist aber bei Reibungsfreiheit (12,25)

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1\,.$$

Hiermit wird wieder (12,28)

$$\eta_a = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}}.$$

Für den Drallwirkungsgrad erhalten wir (11,22)

$$\eta_d = \frac{1}{1 + \dfrac{\left(\frac{v_u}{u}\right)^2\left(\frac{u}{v_0}\right)^2}{2\,\frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2\,v_0}\right)}}$$

und mit (12, 25) (12, 26)

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1; \qquad 2\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right) = \sqrt{1 + c_s} + 1;$$

$$\lambda_0^2 c_s = k_s; \qquad \frac{v_u}{u} = 1 - \sqrt{1 - k_s}; \qquad \frac{u}{v_0} = \frac{1}{\lambda_0}.$$

wieder (12, 29)

$$\eta_d = \frac{1}{1 + \frac{2 - k_s - 2\sqrt{1 - k_s}}{k_s}} = \frac{k_s}{2(1 - \sqrt{1 - k_s})} = \frac{1 + \sqrt{1 - k_s}}{2}.$$

Die oben eingeführte Deutung der Wirkungsgradfaktoren besteht also zu Recht.

g) Zusammenhang zwischen Blattvölligkeit $\frac{\mathfrak{z}\, t}{2\pi r}$, Auftriebsbeiwert c_a, Zirkulation Γ und Strömungsgeschwindigkeiten w_∞ und v_u. Die Zirkulation ist $\Gamma_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}\,\Gamma = 2\pi r v_u$. Sie läßt sich aber auch durch den Auftriebsbeiwert c_a ausdrücken. Es ist nämlich auch (14, 14)

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}\,\Gamma = \frac{c_a}{2}\,\mathfrak{z}\, t\, w_\infty, \tag{12, 36}$$

was mit Hilfe der Blattvölligkeit bzw. des reziproken Teilungsverhältnisses $\chi = \frac{\mathfrak{z}\, t}{2\pi r}$ auch

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = \frac{c_a}{2}\,\chi \cdot 2\pi r\, w_\infty$$

geschrieben werden kann. Damit wird (14, 31)

$$c_a = \frac{2}{\chi}\,\frac{v_u}{w_\infty}, \tag{12, 37}$$

in Übereinstimmung mit dem noch später für die Gitterströmung gefundenen Ergebnis.

Es ist aber (12, 26)

$$\frac{v_u}{u} = 1 - \sqrt{1 - k_s},$$

$$\frac{w_\infty}{u} = \frac{w_\infty}{w_0} \cdot \frac{w_0}{u} = \frac{w_\infty}{w_0}\sqrt{1 + \lambda_0^2},$$

so daß

$$\chi c_a = 2\left(1 - \sqrt{1 - k_s}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \cdot \frac{w_0}{w_\infty}.$$

Für kleine k_s wird aber $\frac{w_\infty}{w_0} \to 1$, $\sqrt{1 - k_s} \to 1 - \frac{1}{2} k_s$, so daß dann in erster Annäherung gilt

$$\chi c_a \approx \frac{k_s}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}}. \tag{12, 38}$$

Ohne diese Vernachlässigungen ergibt sich

$$\frac{\chi}{2} c_a = \frac{v_u}{w_\infty} = \frac{v_u}{u} \frac{1}{1 - \frac{v_u}{2u}} \cdot \frac{u - \frac{v_u}{2}}{w_\infty},$$

$$\frac{\chi}{2} c_a = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 - k_s}} \cos \beta_\infty$$

oder mit

$$\cos \beta_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2}},$$

$$\chi c_a = 4 \frac{1 - \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 - k_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2}}. \tag{12, 39}$$

h) Die bei gegebenen η_{id} erreichbaren Schubbelastungsgrade $c_{s_{id}}$, Schubziffern $k_{s_{id}}$ und Leistungsziffern $k_{d_{id}}$. Für spätere Untersuchungen wird es sich als nützlich erweisen den Schubbelastungsgrad $c_{s_{id}}$ in Abhängigkeit vom Wirkungsgrad η_{id} darzustellen. Hierzu ist die Gleichung (12,27) für den Wirkungsgrad η_{id} nach $c_{s_{id}}$ aufzulösen. Aus (12,27)

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 + c_s}}$$

ergibt sich

$$\eta \sqrt{1 + c_s} = 1 - \eta + \sqrt{1 - k_s},$$

$$\eta^2 + \eta^2 c_s = (1 - \eta)^2 + (1 - k_s) + 2(1 - \eta) \sqrt{1 - k_s} \qquad (k_s = \lambda_0^2 c_s)$$

$$c_s(\eta^2 + \lambda_0^2) = 2(1 - \eta) + 2(1 - \eta) \sqrt{1 - k_s},$$

$$c_s \frac{\eta^2 + \lambda_0^2}{2(1 - \eta)} - 1 = \sqrt{1 - k_s},$$

$$c_s^2 \left(\frac{\eta^2 + \lambda_0^2}{2(1 - \eta)}\right)^2 - 2 c_s \frac{\eta^2 + \lambda_0^2}{2(1 - \eta)} + 1 = 1 - c_s \lambda_0^2,$$

$$c_s \left(\frac{\eta^2 + \lambda_0^2}{2(1 - \eta)}\right)^2 = 2 \frac{\eta^2 + \lambda_0^2}{2(1 - \eta)} - \lambda_0^2,$$

$$c_s \frac{(\eta^2 + \lambda_0^2)^2}{2(1 - \eta)} = 2(\eta^2 + \eta \lambda_0^2),$$

$$c_{s_{id}} = 4 \frac{1 - \eta}{\eta^2} \cdot \frac{\eta^4 \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\eta}\right)}{(\eta^2 + \lambda_0^2)^2} = 4 \frac{1 - \eta}{\eta^2} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda_0^2}{\eta}}{\left(1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2\right)^2}. \tag{12, 40}$$

Hierin bedeutet der erste Faktor den Wert, den $c_{s_{id}}$ annimmt für kleine Fortschrittsgrade, also für den Fall der Vernachlässigbarkeit der Strahldrehung. Der zweite Faktor kann daher als der Einfluß ψ_d der Strahldrehung aufgefaßt werden.

Aus Gleichung (12,40) kann auch die Schubziffer $k_{s_{id}}$ und die Leistungsziffer $k_{d_{id}}$ in Abhängigkeit vom Wirkungsgrad η_{id} berechnet werden. Es ist

$$k_{s_{id}} = \lambda_0^2 c_{s_{id}} = 4\lambda_0^2 \frac{1-\eta}{\eta^2} \cdot \frac{1+\frac{\lambda_0^2}{\eta}}{\left(1+\left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2\right)^2}, \tag{12,41}$$

$$k_{d_{id}} = \frac{\lambda_0}{\eta} k_{s_{id}} = 4\lambda_0^3 \frac{1-\eta}{\eta^3} \cdot \frac{1+\frac{\lambda_0^2}{\eta}}{\left(1+\left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2\right)^2}. \tag{12,42}$$

Vgl. Abb. 125.

i) Die Verhältnisse innerhalb des Strahles der Elementarschraube. Die Elementarschraube erteilt der Luft, von welcher sie durchströmt wird, eine Drehung. Daher ist quer zu dem von der Elementarschraube erzeugten Strahl, der einen kreisringförmigen Querschnitt hat, ein Druckgefälle vorhanden. Während aber außerhalb dieses ringförmigen Strahls der Elementarschraube durch diese Verhältnisse nichts geändert wird, wird innerhalb der Druck erniedrigt. Diese Druckerniedrigung ist

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\frac{\varrho}{2} v_u^2}{r}. \tag{12, 43}$$

Dieser Druckerniedrigung würde nun eine Schubverminderung der Elementarschraube um

$$d_- S = \pi r^2 dp = \frac{1}{2}\left(\frac{v_u}{u}\right)^2 \frac{\varrho}{2} u^2 \cdot 2\pi r\, dr \tag{12, 44}$$

entsprechen, wenn nicht wegen dieser Druckverminderung gleichzeitig eine Vermehrung der Axialgeschwindigkeit von v_0 auf $v_3 = v_0 + dv_0$ innerhalb des ringförmigen Strahles eintreten müßte. Da der hierin strömenden Luft durch die Elementarschraube keine Energie zugeführt wird, gilt die Druckgleichung

$$\frac{\varrho}{2} v_0^2 = \frac{\varrho}{2} v_3^2 - \frac{\varrho}{2} v_u^2 \frac{dr}{r},$$

$$2 dv_0 \left(v_0 + \frac{dv_0}{2}\right) = v_u^2 \frac{dr}{r}. \tag{12, 45}$$

Dieser Vermehrung der Axialgeschwindigkeit v_0 um dv_0 entspräche eine Schubvermehrung um

$$d_+ S = \varrho \pi r^2 v_m\, dv_0. \tag{12, 46}$$

Hierbei darf v_m als Durchflußgeschwindigkeit durch den Schraubenkreis πr^2 gesetzt werden

$$v_m = v_0 + \frac{dv_0}{2}, \tag{12, 47}$$

so daß

$$d_+ S = \varrho \pi r^2 \left(v_0 + \frac{d v_0}{2}\right) d v_0$$

oder wegen (12, 45)

$$d_+ S = \frac{1}{2}\left(\frac{v_u}{u}\right)^2 \cdot \frac{\varrho}{2} u^2 \cdot 2\pi r\, dr. \tag{12, 48}$$

Die durch die Verhältnisse innerhalb des Strahles der Elementarschraube hervorgerufenen Schubeinflüsse $d_- S$ und $d_+ S$ heben sich also gegenseitig auf. Man hätte dies auch von vornherein als sicher ansehen können. Dann hätte sich daraus umgekehrt die Richtigkeit der durch Gleichung (12, 47) eingeführten Annahme beweisen lassen.

Als wichtigstes Ergebnis dieser Überlegung ist aber die Änderung $d v_0$ der Durchflußgeschwindigkeit anzusehen. Solange $d v_0 \ll v_0$ ist, d. h. also bei nicht zu kleinem Fortschrittsgrad und nicht zu großer Belastung, wird (12, 45)

$$\frac{d v_0}{v_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_u}{v_0}\right)^2 \frac{dr}{r}$$

oder mit (12, 26)

$$\frac{v_u}{u} \approx \frac{k_s}{2}, \qquad \frac{v_u}{v_0} \approx \frac{k_s}{2\lambda_0},$$

$$\frac{d v_0}{v_0} \approx \frac{k_s^2}{8\lambda_0^2}\frac{dr}{r} = \frac{c_s k_s}{8}\frac{dr}{r}, \tag{12, 49}$$

andererseits ist (12, 25)

$$\frac{v_a}{v_0} \approx \frac{c_s}{2},$$

so daß

$$\frac{d v_0}{v_a} = \frac{k_s}{4} \cdot \frac{dr}{r}. \tag{12, 50}$$

Man erkennt hieraus, daß die Zusatzgeschwindigkeit $d v_0$ im Strahlinnern infolge des Strahlunterdrucks gegenüber der zur Schuberzeugung nötigen Zusatzgeschwindigkeit v_a nur von untergeordneter Bedeutung ist, solange k_s klein ist. Diese Bedingung ist aber bei der Luftschraube im allgemeinen so weitgehend erfüllt, daß die Ergebnisse der Elementarschraube ohne Berücksichtigung dieses Einflusses durch entsprechende Integration auf die Gesamtschraube übertragen werden können.

13. Berücksichtigung der Reibung.

a) Die Berücksichtigung der Reibung durch einen Gleitwinkel. Während bei Reibungsfreiheit die auf ein Flügelprofil wirkende Kraft senkrecht zur Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty$ steht, tritt bei Vorhandensein von Reibung zu dieser Querkraft dA noch ein Widerstand dW. Die auf das Profil wirkende resultierende Kraft $d\mathfrak{P} = d\mathfrak{A} + d\mathfrak{W}$ ist also um den Winkel ε gegen die Senkrechte zur Anströmrichtung geneigt. Der Wert

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{dW}{dA} \tag{13, 1}$$

heißt das Gleitverhältnis, ε der Gleitwinkel des Profils.

Dem Widerstande dW entspricht eine Verzögerung der Strömung entgegen der Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty$. Diese Verzögerung verhält sich zu der der Querkraft dA entsprechenden Beschleunigung wie

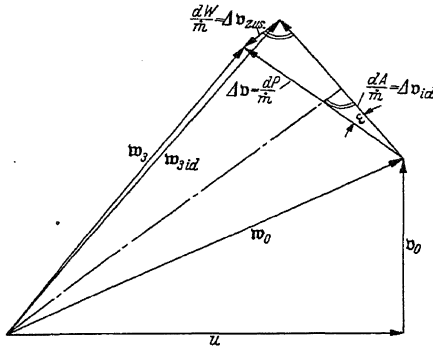



Abb. 119. Der Einfluß der Flügelblattreibung auf die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\,\mathfrak{v}$ durch die Elementarschraube und die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$.

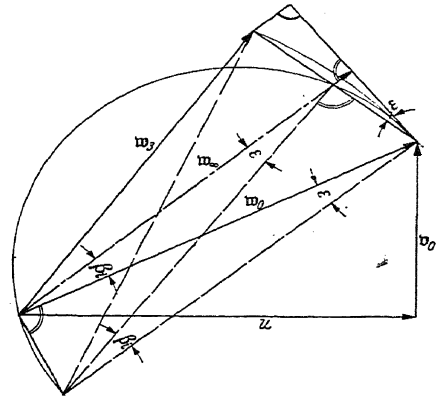



Abb. 120. Der geometrische Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_3$ und von $\mathfrak{w}_\infty$ im Geschwindigkeitsdiagramm unter Einfluß der Flügelblattreibung.

$\operatorname{tg} \varepsilon = dW/dA$. Die resultierende Richtung der Änderungsgeschwindigkeit in der Elementarschraube ist also um ε gegen die bei Reibungsfreiheit geneigt (Abb. 119).

Der Endpunkt von $\mathfrak{w}_3$ liegt daher auf einem Kreise, der durch den Endpunkt von $\mathfrak{w}_0$ geht und dessen Mittelpunkt auf einer Senkrechten zu $\mathfrak{w}_0$ durch den Anfangspunkt von $\mathfrak{u}$ in der Entfernung $w_0 \operatorname{tg} \varepsilon$ von diesem Anfangspunkt liegt (Abb. 120).

Abb. 121. Die Änderung des die Richtung der Luftkraft angebenden Winkels β_p infolge der Flügelblattreibung.

b) Der Einfluß des Gleitverhältnisses auf den Wirkungsgrad. Da die Richtung der Resultierenden $d\mathfrak{P}$ gegenüber der Richtung bei Reibungsfreiheit um ε gedreht ist (Abb. 121), wird der Wirkungsgrad nunmehr (11, 5)

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\beta_p} = \frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\beta_{p_{id}}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_{p_{id}}}{\operatorname{tg}\beta_p} \tag{13,2}$$

wobei

$$\beta_p = \beta_{p_{id}} + \varepsilon, \tag{13,3}$$

also

$$\operatorname{tg}\beta_p = \frac{\operatorname{tg}\beta_{p_{id}} + \operatorname{tg}\varepsilon}{1 - \operatorname{tg}\beta_{p_{id}} \operatorname{tg}\varepsilon},$$

Aus (13, 10) und (13, 11) folgt

$$m = \tfrac{1}{2}. \tag{13, 12}$$

Auch bei Verlusten beim Durchströmen der Schraube ist also die Durchflußgeschwindigkeit $v_m = v_0 + \frac{v_a}{2}$, der Mittelwert zwischen der Geschwindigkeit davor und der Achsialgeschwindigkeit dahinter.
Damit erhält man aber aus (11, 12) das gleiche Ergebnis wie bei Reibungsfreiheit (12, 17)

$$c_s = 2\frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2v_0}\right) \tag{13, 13}$$

und

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1. \tag{13, 14}$$

Hieraus folgt aber sofort, da die Anströmgeschwindigkeit mit der Senkrechten zur Änderungsgeschwindigkeit $\Delta\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_a + \mathfrak{v}_u$, d. h. also der Senkrechten zur Luftkraft den Winkel ε einschließen muß, daß der Endpunkt von $\mathfrak{w}_\infty$ gegeben ist durch den Mittelpunkt von $\Delta\mathfrak{v}$, so daß also

$$\mathfrak{w}_\infty = \mathfrak{w}_0 + \frac{\Delta\mathfrak{v}}{2} = \left(\mathfrak{v}_0 + \frac{\mathfrak{v}_a}{2}\right) + \left(u - \frac{\mathfrak{v}_u}{2}\right) \tag{13, 15}$$

und

$$\beta_\infty = \beta_{p\,i\,d} \tag{13, 16}$$

ist. Während dadurch die Richtung von $\mathfrak{w}_\infty$ gegenüber der reibungsfreien Strömung nicht geändert wird, wird die Größe der Anströmgeschwindigkeit etwas verringert:

$$w_\infty = w_{\infty i\,d} - \frac{\Delta v_{\text{zus}}}{2},$$

$$\frac{w_\infty}{w_{\infty i\,d}} = 1 - \varepsilon\frac{\frac{\Delta v_{i\,d}}{2}}{w_{\infty i\,d}} = 1 - \varepsilon\,\mathrm{tg}\,(\beta_\infty - \beta_0) = 1 - \varepsilon\frac{\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}} - \lambda_0}{1 + \frac{\lambda_0^2}{\eta_{i\,d}}},$$

$$\frac{w_\infty}{w_{\infty i\,d}} = 1 - \varepsilon\lambda_0\frac{1 - \eta_{i\,d}}{\eta_{i\,d} + \lambda_0^2} = 1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\frac{1 - \lambda_0\frac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}} = \frac{v_m}{v_{m\,i\,d}}. \tag{13, 17}$$

d) Der Einfluß des Gleitverhältnisses auf Schub und Drehmoment. Die Verminderung der achsialen Zusatzgeschwindigkeit hat eine Verminderung des Schubs zur Folge, die Vermehrung der tangentialen Zusatzgeschwindigkeit eine Vermehrung des Drehmoments. Der Schubbelastungsgrad ist deshalb (11, 12), (13, 7), (13, 15)

$$c_s = 2\frac{v_a}{v_0}\cdot\frac{v_m}{v_0} = 2\frac{v_{a\,i\,d}}{v_0}\cdot\frac{v_a}{v_{a\,i\,d}}\cdot\frac{v_{m\,i\,d}}{v_0}\cdot\frac{v_m}{v_{m\,i\,d}},$$

$$c_s = c_{s\,i\,d}\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\frac{1 - \lambda_0\frac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}}\right). \tag{13, 18}$$

Entsprechend ist die Schubziffer $k_s = \lambda^2 c_s$

$$k_s = k_{s_{id}}\left(1 - \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_{id}}\right)\left(1 - \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_{id}} \frac{1 - \lambda_0 \frac{\eta_{id}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0 \frac{\lambda_0}{\eta_{id}}}\right). \quad (13, 19)$$

Die Drehmomentziffer wird (11, 14), (13, 8), (13, 17)

$$k_d = 2 \frac{v_u}{u} \frac{v_m}{v_0} = 2 \frac{v_{u_{id}}}{u} \cdot \frac{v_u}{v_{u_{id}}} \cdot \frac{v_{m_{id}}}{v_0} \cdot \frac{v_m}{v_{m_{id}}},$$

$$k_d = k_{d_{id}}\left(1 + \varepsilon \frac{\eta_{id}}{\lambda_0}\right)\left(1 - \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_{id}} \frac{1 - \lambda_0 \frac{\eta_{id}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0 \frac{\lambda_0}{\eta_{id}}}\right). \quad (13, 20)$$

Am Stande $\lambda = 0$ gilt mit (11, 16) $\frac{\lambda_0}{\eta_{id}} = \frac{k_{d_{id}}}{k_{s_{id}}}$

$$k_s = k_{s_{id}}\left(1 - \varepsilon \frac{k_{d_{id}}}{k_{s_{id}}}\right)^2, \qquad k_d = k_{d_{id}}\left(1 + \varepsilon \frac{k_{s_{id}}}{k_{d_{id}}}\right)\left(1 - \varepsilon \frac{k_{d_{id}}}{k_{s_{id}}}\right). \quad (13, 21)$$

Auch aus (13, 19) und (13, 20) ergibt sich als Wirkungsgrad (11, 16), (13, 4)

$$\eta = \lambda_0 \frac{k_s}{k_d} = \eta_{id} \cdot \frac{1 - \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_{id}}}{1 + \varepsilon \frac{\eta_{id}}{\lambda_0}}.$$

Da der Faktor $v_m/v_{m_{id}}$ nur wenig von 1 abweicht, darf er in manchen Fällen durch 1 ersetzt werden, insbesondere da er sich nur auf k_s und k_d, nicht aber auf den Wirkungsgrad auswirkt.

Bei der Ableitung der Gleichungen (13, 18), (13, 19), (13, 20), (13, 21) ist vorausgesetzt, daß der Auftrieb der Flügelelemente durch die Reibung nicht beeinflußt wird. Wie später noch gezeigt wird, wird aber wegen der Verminderung der Anströmgeschwindigkeit bei gegebenem Flügelprofil auch der Auftrieb geändert, so daß deshalb noch eine Verminderung im Verhältnis der Staudruckverminderung eintritt. Darauf wird bei der Untersuchung des Einflusses der Blattbreite auf Schub und Leistung noch eingegangen.

Durch den Einfluß der Reibung wird auch die Grenze für die Belastbarkeit und damit die des wirtschaftlich zulässigen Wirkungsgrades geändert.

Wie aus Abb. 124 zu entnehmen ist, wird die obere Grenze für v_u gegeben durch

$$v_{u_{gr}} = (1 - \operatorname{tg} \varepsilon \, \lambda_0) u \quad (13, 22)$$

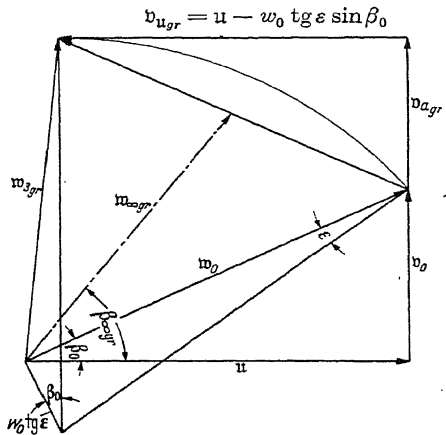



Abb. 124. Das Geschwindigkeitsdiagramm der Elementarschraube unter Berücksichtigung der Flügelblattreibung im Grenzfalle.

und die für v_a durch

$$v_{a_{gr}} = \left(\frac{1}{\sin\beta_0 \cos\varepsilon} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\beta_0} - 1\right) v_0 ,$$

$$v_{a_{gr}} = \left(\frac{\sqrt{1+\lambda_0^2}}{\cos\varepsilon} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\lambda_0} - 1\right) v_0 . \tag{13, 23}$$

Der größte mögliche Schubbelastungsgrad ist also bei Berücksichtigung der Reibung

$$c_{s_{gr}} = 2\frac{v_{a_{gr}}}{v_0}\left(1 + \frac{v_{a_{gr}}}{2\,v_0}\right) = \left(\frac{1}{\sin\beta_0\cos\varepsilon} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\beta_0} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin\beta_0\cos\varepsilon} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\beta_0} + 1\right),$$

$$c_{s_{gr}} = \left(\frac{1 - \sin\varepsilon\cos\beta_0}{\sin\beta_0\cos\varepsilon}\right)^2 - 1 \quad \text{oder mit} \quad \sin\varepsilon \sim \varepsilon \quad \cos\varepsilon \sim 1 ,$$

$$c_{s_{gr}} \sim \left(\frac{\sqrt{1+\lambda_0^2} - \varepsilon}{\lambda_0}\right)^2 - 1 . \tag{13, 24}$$

Der erreichbare Wirkungsgrad ist dabei

$$\eta_{gr} = \left(\frac{v_0^2}{u}\right)\frac{\frac{v_{a_{gr}}}{v_0}}{\frac{v_{u_{gr}}}{u}} = \lambda_0^2\,\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\lambda_0^2}} - \frac{\varepsilon}{\lambda_0} - 1\right)}{1 - \varepsilon\,\lambda_0} . \tag{13, 25}$$

Aus (13,4)

$$\eta = \eta_{id}\,\frac{1 - \varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}}{1 + \varepsilon\frac{\eta_{id}}{\lambda}}$$

kann man auch $\eta_{id}(\eta)$ erhalten.

$$\eta + \varepsilon\,\eta\,\frac{\eta_{id}}{\lambda} = \eta_{id} - \varepsilon\,\lambda ,$$

$$\eta_{id}\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\right) = \eta + \varepsilon\,\lambda ,$$

$$\eta_{id} = \frac{\eta + \varepsilon\lambda}{1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}} = \eta\,\frac{1 + \varepsilon\frac{\lambda}{\eta}}{1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}} . \tag{13, 26}$$

Für den mechanischen Wirkungsgrad gilt also (13,5) (Abb. 122)

$$\eta_m = \frac{\eta}{\eta_{id}} = \frac{1 - \varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}}{1 + \varepsilon\frac{\eta_{id}}{\lambda}} = \frac{1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}}{1 + \varepsilon\frac{\lambda}{\eta}} . \tag{13, 27}$$

Mit (12,41), (12,42)

$$k_{s_{id}} = 4\,\lambda^2\,\frac{1 - \eta_{id}}{\eta_{id}^2}\,\frac{1 + \frac{\lambda^2}{\eta_{id}}}{\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\eta_{id}}\right)^2\right)^2} ,$$

$$k_{d_{id}} = 4\,\lambda^3\,\frac{1 - \eta_{id}}{\eta_{id}^3}\,\frac{1 + \frac{\lambda^2}{\eta_{id}}}{\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\eta_{id}}\right)^2\right)^2}$$

wird (13,19), (13,20)

$$k_s = k_{s\,i\,d}\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\,\frac{1 - \lambda_0\dfrac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0\dfrac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}}\right)$$

$$= 4\lambda_0^2\frac{1 - \eta_{i\,d}}{\eta_{i\,d}^2}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{i\,d}}}{\left(1 + \left(\dfrac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\right)^2\right)^2}\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\,\frac{1 - \lambda_0\dfrac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0\dfrac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}}\right), \quad (13,28)$$

$$k_d = k_{d\,i\,d}\left(1 + \varepsilon\frac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\,\frac{1 - \lambda_0\dfrac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0\dfrac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}}\right)$$

$$= 4\lambda_0^3\frac{1 - \eta_{i\,d}}{\eta_{i\,d}^3}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{i\,d}}}{\left(1 + \left(\dfrac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\right)^2\right)^2}\left(1 + \varepsilon\frac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}\,\frac{1 - \lambda_0\dfrac{\eta_{i\,d}}{\lambda_0}}{1 + \lambda_0\dfrac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}}\right). \quad (13,29)$$

In diese Gleichungen ist $\eta_{i\,d}(\eta)$ (13,26) einzusetzen, wenn man $k_s(\eta, \lambda, \varepsilon)$ und $k_d(\eta, \lambda, \varepsilon)$ bekommen will. Nach etlicher Umformung ergibt sich

$$k_s = 4\lambda^2\frac{1 - \eta}{\eta^2}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{\left(1 + \left(\dfrac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}\cdot\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{1 - \eta}\right), \quad (13,30)$$

$$k_d = 4\lambda^3\frac{1 - \eta}{\eta^3}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{\left(1 + \left(\dfrac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}\cdot\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{1 - \eta}\right) \quad (13,31)$$

(vgl. Abb. 125, 126, 127),

entsprechend wird

$$c_s = 4\frac{1 - \eta}{\eta^2}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{\left(1 + \left(\dfrac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}\cdot\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{1 - \eta}\right). \quad (13,32)$$

Die Bedeutung der ersten Faktoren ist schon bei der Erläuterung der Gleichung für $c_{s\,i\,d}$ (12,40) dargelegt. Der letzte Faktor

$$\psi_r = \left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\right)\left(1 - \varepsilon\frac{\eta}{\lambda}\,\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{1 - \eta}\right) = 1 - \varepsilon k_1' + \varepsilon^2 k_2' \quad (13,33)$$

gibt die Verminderung des Schubs bzw. der Leistung infolge der Reibung bei vorgegebenem Wirkungsgrad η. Die Hilfsgrößen

$$k_1' = \frac{\eta}{\lambda}\left(1 + \frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{1 - \eta}\right), \qquad k_2' = \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2\frac{1 + \dfrac{\lambda^2}{\eta}}{1 - \eta} \quad (13,34)$$

sind in Abb. 128 und Abb. 129 dargestellt.

e) Der Reibungseinfluß η_m in Abhängigkeit vom Profilwiderstandsbeiwert c_w. Mit Hilfe des Profilwiderstandsbeiwertes c_w und der Blattvölligkeit $\chi = \frac{\mathfrak{z} t}{2\pi r}$ kann man eine Reibungszahl

$$\tau = \chi c_w = \frac{\mathfrak{z} t}{2\pi r} c_w \qquad (13,35)$$

definieren. Da nun (12,37) $\chi c_a = 2 \frac{v_{u_i d}}{w_{\infty i d}}$ schon errechnet wurde, so wird

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2 \frac{v_{u_i d}}{w_{\infty i d}}}. \qquad (13,36)$$

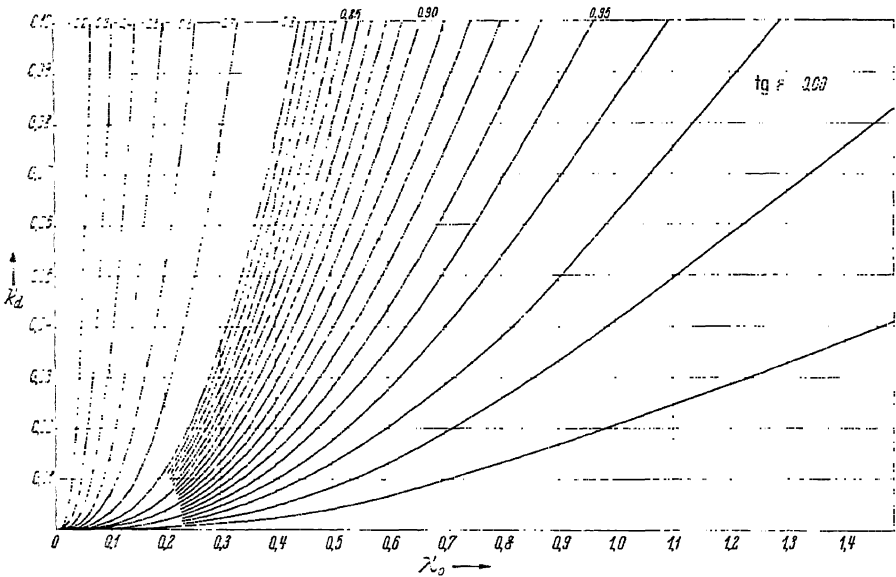



Abb. 125. Die Leistungsziffer der Elementarschraube bei tg $\varepsilon = 0$.

Hiermit läßt sich η_m (13,5) schreiben

$$\eta_m = \frac{1 - \frac{\tau}{2 \frac{v_{u_i d}}{w_{\infty i d}}} \cdot \frac{\lambda}{\eta_{i d}}}{1 + \frac{\tau}{2 \frac{v_{u_i d}}{w_{\infty i d}}} \cdot \frac{\eta_{i d}}{\lambda}}.$$

oder wegen (11,16), (12,37), (12,38)

$$\frac{\eta_{i d}}{\lambda} = \frac{k_{s_i d}}{k_{d_i d}},$$

$$\frac{2 v_{u_i d}}{w_{\infty i d}} \approx \frac{k_{s_i d}}{\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

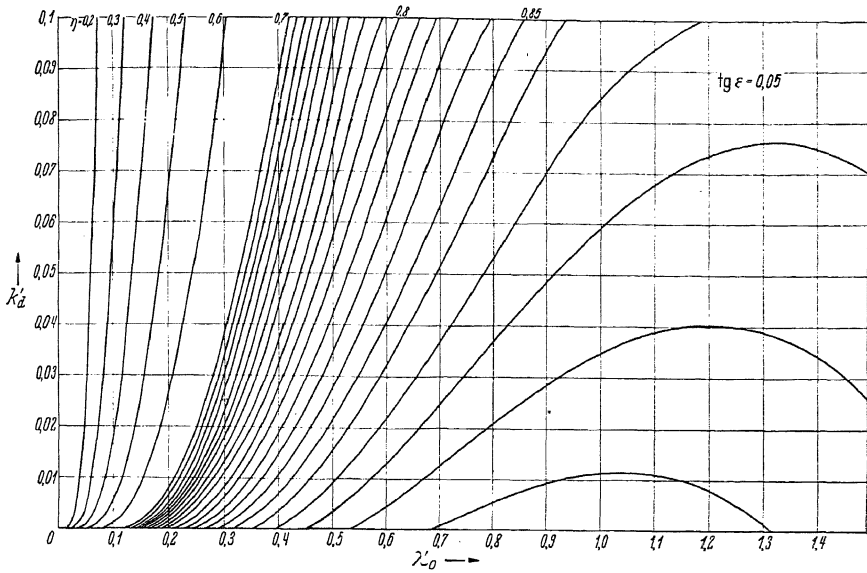



Abb. 126. Die Leistungsziffer der Elementarschraube bei tg ε = 0,05.

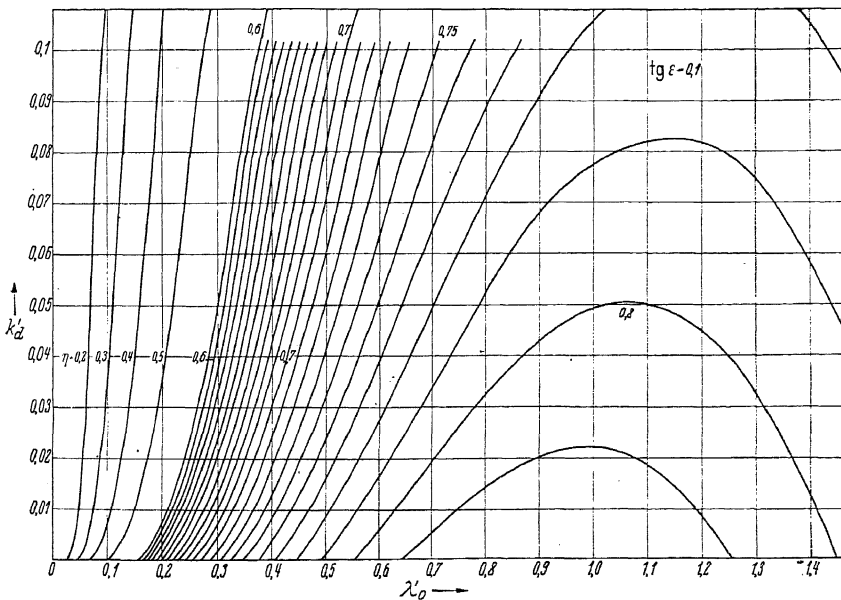



Abb. 127. Die Leistungsziffer der Elementarschraube bei tg ε = 0,10.

in erster Näherung

$$\eta_m \approx \frac{1}{1 + \tau \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{k_{d_{i\,d}}}\left(1 + \frac{\lambda^2}{\eta_{i\,d}^2}\right)} \tag{13,37}$$

oder mit

$\eta_{i\,d} \approx 1$,

$$\eta_m \approx \frac{1}{1 + \tau \frac{(1+\lambda^2)^{3/2}}{k_{d_{i\,d}}}}. \tag{13,38}$$

Die Verminderung der Schubziffer und die Vermehrung der Drehmomentenziffer bekommen wir bei Benutzung von τ in erster Näherung aus (13, 19), (13, 20) $(v_m/v_{m_{i\,d}} \approx 1)$:

$$k_s \approx k_{s_{i\,d}}\left(1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\eta_{i\,d}}\right) = k_{s_{i\,d}}\left(1 - \tau \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{k_{s_{i\,d}}} \cdot \frac{\lambda}{\eta_{i\,d}}\right) = k_{s_{i\,d}} - \tau\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{\lambda}{\eta_{i\,d}}, \tag{13,39}$$

$$k_d \approx k_{d_{i\,d}}\left(1 + \varepsilon \frac{\eta_{i\,d}}{\lambda}\right) = k_{d_{i\,d}}\left(1 + \tau \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{k_{s_{i\,d}}} \cdot \frac{k_{s_{i\,d}}}{k_{d_{i\,d}}}\right) = k_{d_{i\,d}} + \tau\sqrt{1+\lambda^2}. \tag{13,40}$$

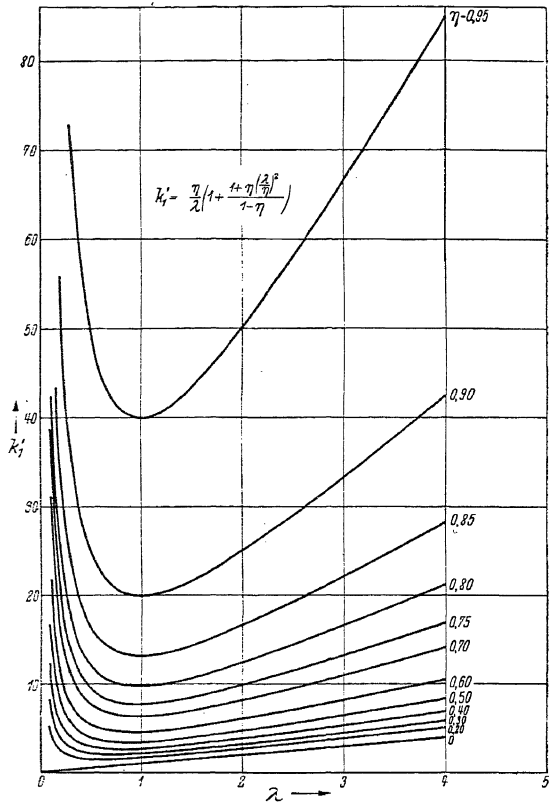



Abb. 128. Der Einflußwert k_1' der Flügelblattreibung bei der Elementarschraube.

Mit der diesem Werte von k_d entsprechenden Leistung dN erzeugt man aber nur den dem Werte $k_s = k_{s_{i\,d}} - \tau\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{\lambda}{\eta_{i\,d}}$ entsprechenden Schub dS. Will man einen dem Werte $k_{s_{i\,d}}$ entsprechenden Schub erzeugen, so muß die Leistungsziffer etwas größer sein. Sie sei $\bar{k}_d$. Es ist

$$\eta = \eta_{i\,d} \cdot \eta_m = \lambda \frac{k_{s_{i\,d}}}{\bar{k}_d},$$

so daß

$$\bar{k}_d = \frac{\lambda}{\eta_{i\,d}} k_{s_{i\,d}} \cdot \frac{1}{\eta_m} = k_{d_{i\,d}} \frac{1}{\eta_m};$$

also muß sein

$$\bar{k}_d = k_{d_{id}} + \tau\sqrt{1+\lambda^2}\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\eta_{id}}\right)^2\right), \tag{13, 41}$$

so daß die wegen der Reibung aufzubringende zusätzliche Leistung

$$dN_r = k_{dr}\frac{\varrho}{2}\omega^3 2\pi r^4 dr$$

Abb. 129. Der Einflußwert k_2' der Flügelblattreibung bei der Elementarschraube.

wird, wobei

$$k_{dr} = \tau\sqrt{1+\lambda^2}\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\eta_{id}}\right)^2\right) \tag{13, 42}$$

ist, oder da im allgemeinen η_{id} nur wenig kleiner als 1 ist,

$$k_{dr} \approx \tau(1+\lambda^2)^{3/2}. \tag{13, 43}$$

Zu diesem Ergebnis kommt man aber auch noch auf andere Weise. Man kann den zur Überwindung der Reibung nötigen Leistungsanteil dN_r nämlich so abschätzen, als wäre er aufzubringen zur Überwindung des Reibungswiderstandes dW_r auf dem mit der Geschwindigkeit w_∞ zurückgelegten Weg der $\mathfrak{z}$ Flügelelemente. Es ist also

$$dN_r = dW_r w_\infty = \mathfrak{z}\frac{\varrho}{2}w_\infty^2 c_w t\, dr\, w_\infty .$$

Entsprechend ist

$$k_{dr} = c_w \frac{\mathfrak{z}t}{2\pi r}\left(\frac{w_\infty}{u}\right)^3 = \tau(1+\lambda^2)^{3/2}$$

Diese Schätzung liefert also bis auf den von 1 praktisch nur wenig verschiedenen Faktor $\frac{1+(\lambda/\eta_{id})^2}{1+\lambda^2}$ das gleiche Ergebnis wie die obige Rechnung.

f) Berechnung der Profilpolaren aus Schub- und Leistungsziffer. Den Winkel zwischen der Richtung von $\mathfrak{w}_0$ und der Richtung von $\mathfrak{w}_\infty$

$$\alpha_i = \beta_\infty - \beta_0 = \beta_i \tag{13, 44}$$

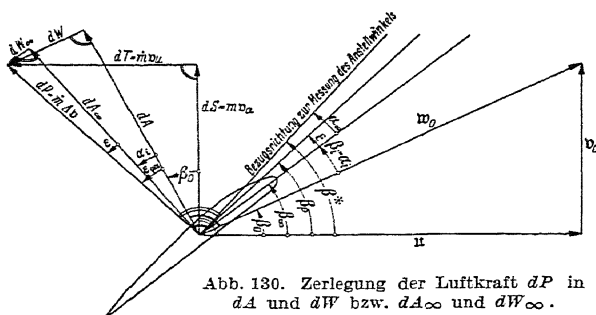



Abb. 130. Zerlegung der Luftkraft dP in dA und dW bzw. dA_∞ und dW_∞.

darf man den induzierten Anstellwinkel nennen. Die resultierende Luftkraft $d\mathfrak{P}$ schließt dann mit der Senkrechten zur Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ den Winkel

$$\varepsilon_{\text{ges}} = \varepsilon + \alpha_i \quad (13,45)$$

ein. Die zu $\mathfrak{w}_0$ senkrechte Auftriebskraft sei $d\mathfrak{A}$, die zu $\mathfrak{w}_0$ parallele Widerstandskraft sei $d\mathfrak{W}$ (Abb. 130). Dann ist

$$dA = dP\cos(\alpha_i + \varepsilon)\,, \quad (13,46)$$

$$dW = dP\sin(\alpha_i + \varepsilon)\,. \quad (13,47)$$

Mit Hilfe des Schubs dS und der Tangentialkraft dT erhält man

$$dP = \sqrt{dS^2 + dT^2}\,, \quad (13,48)$$

$$dA = dS\cos\beta_0 + dT\sin\beta_0\,, \quad (13,49)$$

$$dW = -dS\sin\beta_0 + dT\cos\beta_0\,. \quad (13,50)$$

Hieraus findet man

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \varepsilon) = \frac{dW}{dA} = \frac{-dS\sin\beta_0 + dT\cos\beta_0}{dS\cos\beta_0 + dT\sin\beta_0} \quad (13,51)$$

oder mit Hilfe der Schubziffer k_s (11, 13) und der Drehmomentziffer k_d (11, 14) und wegen

$$\sin\beta_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}\,, \qquad \cos\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}\,, \qquad \lambda_0\frac{k_s}{k_d} = \eta\,,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \varepsilon) = \frac{k_d - \lambda_0 k_s}{k_s + \lambda_0 k_d} = \frac{1-\eta}{\eta/\lambda_0 + \lambda_0} = X_1\,. \quad (13,52)$$

Am Stande gilt

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \varepsilon) = \frac{k_d}{k_s} = X_1\,.$$

Entsprechend Abb. 119 gilt

$$\frac{\Delta v/2}{w_0} = \frac{\sin\alpha_i}{\cos\varepsilon}\,. \quad (13,53)$$

Nach dem Impulssatze ist mit $d\dot m = \varrho\left(v_0 + \frac{v_a}{2}\right)2\pi r\,dr$ als durchströmender Masse und mit (13, 14) $1 + \frac{v_a}{2v_0} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+c_s} + 1\right)$

$$d\mathfrak{P} = d\dot m\,\Delta\mathfrak{v} = \frac{\varrho}{2}v_0\,2\pi r\,dr\left(\sqrt{1+c_s}+1\right)\Delta\mathfrak{v}\,.$$

Ferner ist (13, 48)

$$d\,P = \sqrt{d\,S^2 + d\,T^2} = \frac{\varrho}{2}\,u^2\,2\pi\,r\,d\,r\,\sqrt{k_s^2 + k_d^2}\,.$$

Damit wird also

$$\frac{\sin\alpha_i}{\cos\varepsilon} = \frac{\sqrt{k_s^2 + k_d^2}}{2\sqrt{1+\lambda_0^2}\,(\sqrt{\lambda_0^2 + k_s} + \lambda_0)} = X_2\,. \tag{13, 54}$$

Am Stande gilt

$$\frac{\sin\alpha_i}{\cos\varepsilon} = \frac{\sqrt{k_s^2 + k_d^2}}{2\sqrt{k_s}} = X_2\,.$$

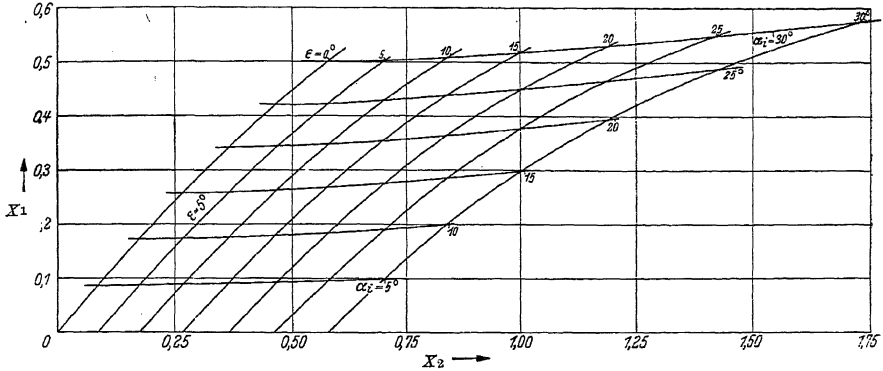



Abb. 131. Diagramm zur Bestimmung von α_i und ε.

Aus (13, 52) und (13, 54) kann α_i und ε bestimmt werden. Für α_i und ε findet man dann folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arc\,tg} X_1 &= \varepsilon + \arcsin(X_2 \cos\varepsilon)\,, \\ \operatorname{arc\,tg} X_2 &= \alpha_i + \arccos\left(\frac{\sin\alpha_i}{X_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13, 55}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ist durch das Diagramm Abb. 131 gegeben. Hat man X_1 und X_2 berechnet, so findet man hieraus α_i und ε. Näherungsweise ist für kleine X_1 und X_2

$$\alpha_i \approx X_2\,,$$

$$\varepsilon \approx X_1 - X_2\,.$$

Der ideale Wirkungsgrad ist (12, 4)

$$\eta_{id} = \frac{\lambda_0}{\lambda_\infty} = \frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_i)}\,. \tag{13, 56}$$

Die zu $\mathfrak{w}_\infty$ senkrechte Auftriebskraft $d\mathfrak{A}_\infty$ und die zu $\mathfrak{w}_\infty$ parallele Widerstandskraft $d\mathfrak{W}_\infty$ erhält man aus

$$d\,A_\infty = d\,S\cos(\beta_0 + \alpha_i) + d\,T\sin(\beta_0 + \alpha_i)\,, \tag{13, 57}$$

$$d\,W_\infty = -d\,S\sin(\beta_0 + \alpha_i) + d\,T\cos(\beta_0 + \alpha_i)\,. \tag{13, 58}$$

Hieraus erhält man als Auftriebsbeiwert c_a und als Widerstandsbeiwert c_w der entsprechenden Profilumströmung, wenn $\mathfrak{z}$ die Flügelzahl und t die Profiltiefe ist:

$$c_a = \frac{d A_\infty}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \mathfrak{z} t d r} = \frac{d S}{\frac{\varrho}{2} u^2 2 \pi r d r} \cdot \frac{\cos(\beta_0 + \alpha_i)}{\left(\frac{w_\infty}{u}\right)^2 \frac{\mathfrak{z} t}{2 \pi r}} + \frac{d T}{\frac{\varrho}{2} u^2 \cdot 2 \pi r d r} \frac{\sin(\beta_0 + \alpha_i)}{\left(\frac{w_\infty}{u}\right)^2 \frac{\mathfrak{z} t}{2 \pi r}},$$

$$c_w = \frac{d W_\infty}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \mathfrak{z} t d r} = \frac{-d S}{\frac{\varrho}{2} u^2 2 \pi r d r} \cdot \frac{\sin(\beta_0 + \alpha_i)}{\left(\frac{w_\infty}{u}\right)^2 \frac{\mathfrak{z} t}{2 \pi r}} + \frac{d T}{\frac{\varrho}{2} u^2 \cdot 2 \pi r d r} \frac{\cos(\beta_0 + \alpha_i)}{\left(\frac{w_\infty}{u}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{z} t}{2 \pi r}}$$

und mit Benutzung der Schubziffer k_s und der Leistungsziffer k_d und mit

$$\operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_i) = \frac{\lambda_0}{\eta_{i d}}, \quad \cos(\beta_0 + \alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta_{i d}}\right)^2}}, \quad \sin(\beta_0 + \alpha_i) = \frac{\lambda_0/\eta_{i d}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta_{i d}}\right)^2}},$$

$$\left(\frac{w_\infty}{u}\right)^2 = \left(\frac{w_0}{u}\right)^2 \cdot \left(\frac{w_\infty}{w_0}\right)^2 = (1 + \lambda_0^2) \frac{\cos^2(\alpha_i + \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon}, \text{ (Abb. 123)}$$

$$\lambda \frac{k_s}{k_d} = \eta, \qquad \frac{\mathfrak{z} t}{2 \pi r} = \chi,$$

$$\chi c_a = \frac{\cos^2 \varepsilon}{(1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta_{i d}}\right)^2} \cos^2(\alpha_i + \varepsilon)} \cdot k_s \left(1 + \frac{\eta}{\eta_{i d}} \left(\frac{k_d}{k_s}\right)^2\right), \qquad (13, 59)$$

$$\chi c_w = \frac{\cos^2 \varepsilon}{(1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta_{i d}}\right)^2} \cos^2(\alpha_i + \varepsilon)} \cdot k_d \left(1 - \frac{\eta}{\eta_{i d}}\right). \qquad (13, 60)$$

Hiermit ergibt sich ebenfalls (13, 27)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{k_d}{k_s} \frac{1 - \frac{\eta}{\eta_{i d}}}{1 + \frac{\eta}{\eta_{i d}} \frac{k_d^2}{k_s^2}},$$

$$\frac{\eta}{\eta_{i d}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varepsilon \frac{k_s}{k_d}}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \frac{k_d}{k_s}}.$$

Zur Berechnung von c_a und c_w führt man zweckmäßig ein

$$\psi = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\cos^2(\alpha_i + \varepsilon)}, \qquad \varphi = \frac{1}{(1 + \lambda_0^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta_{i d}}\right)^2}}, \qquad \frac{\psi \varphi}{\chi} = \mathfrak{C}.$$

Damit sind

$$c_a = \mathfrak{C} k_s \left(1 + \frac{\eta}{\eta_{i d}} \left(\frac{k_d}{k_s}\right)^2\right),$$

$$c_u = \mathfrak{C} k_d \left(1 - \frac{\eta}{\eta_{i d}}\right),$$

Sind χ, λ_0, λ^*, k_s, k_d der Elementarschraube gegeben, so erhält man folgendes durch Beispiel erläuterte Rechenschema zur Bestimmung von α_i, ε, c_a, c_w, α_∞:

Zahlentafel 5. **Rechenschema und Beispiel zur Bestimmung von Auftriebsbeiwert, Widerstandsbeiwert und Anstellwinkel der Profile einer Elementarschraube.**

Gegeben: χ, λ_0, λ^*, k_0, k_d; gesucht: α_i, ε, c_a, c_w, α_∞.

	①	$\chi = \frac{\mathfrak{z}t}{2\pi r} = 0{,}135,$
	②	$\lambda_0 = \operatorname{tg}\beta_0 = 1{,}000,$
	③	$\lambda^* = \operatorname{tg}\beta^* = 1{,}265,$
	④	$k_s = 0{,}0824,$
	⑤	$k_d = 0{,}0946,$
④ : ⑤ =	⑥	$\frac{\eta}{\lambda_0} = \frac{k_s}{k_d} = 0{,}87,$
② · ⑥ =	⑦	$\eta = 0{,}87,$
$\frac{1 - ⑦}{⑥ + ②}$ =	⑧	$X_1 = \frac{1-\eta}{\frac{\eta}{\lambda_0} + \lambda_0} = 0{,}0696,$
aus ②, ④, ⑤	⑨	$X_2 = \frac{\sqrt{k_s^2 + k_d^2}}{2\sqrt{1+\lambda_0^2}\cdot\left(\sqrt{\lambda_0^2 + k_s} + \lambda_0\right)} = 0{,}0218,$
aus ⑧, ⑨ nach Abb. 131	⑩	$\alpha_i \sim X_2 = 0{,}0218 = 1^\circ 15',$
	⑪	$\varepsilon \sim X_1 - X_2 = 0{,}0478 = 2^\circ 45'$
aus ⑥, ⑪	⑫	$\frac{\eta}{\eta_{id}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\varepsilon\,\frac{\eta}{\lambda_0}}{1 + \operatorname{tg}\varepsilon\,\frac{\lambda_0}{\eta}} = 0{,}908,$
⑦ : ⑫ =	⑬	$\eta_{id} = 0{,}958,$
aus ⑩, ⑪	⑭	$\psi = \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2(\alpha_i + \varepsilon)} = 1{,}003,$
aus ②, ⑬	⑮	$\varphi = \frac{1}{(1+\lambda_0^2)\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\eta_{id}}\right)^2}} = 0{,}329$
$\frac{⑭ \cdot ⑮}{①}$ =	⑯	$\mathfrak{C} = \frac{\varphi\cdot\psi}{\chi} = 2{,}44,$
aus ④, ⑤, ⑫	⑰	$\frac{\eta}{\eta_{id}}\cdot\left(\frac{k_d}{k_s}\right)^2 = 1{,}20,$
aus ④, ⑥, ⑫, ⑯	⑱	$c_a = \mathfrak{C}\,k_s\left(1 + \frac{\eta}{\eta_{id}}\left(\frac{k_d}{k_s}\right)^2\right) = 0{,}439.$
aus ⑤, ⑫, ⑯	⑲	$c_w = \mathfrak{C}\,k_d\left(1 - \frac{\eta}{\eta_{id}}\right) = 0{,}021,$
aus ②	⑳	$\beta_0 = \operatorname{arc\,tg}\lambda_0 = 45^\circ,$
aus ③	㉑	$\beta^* = \operatorname{arc\,tg}\lambda^* = 51^\circ 40',$
㉙ — ⑳ — ⑩ =	㉒	$\alpha_\infty = \beta^* - \beta_0 - \alpha_i = 5^\circ 25.$

D. Zusammenhänge zwischen Steigung, Blattbreitenverhältnis und Leistung.

14. Die Strömung durch ein Profilgitter als Grundlage der auf die Schraubenelemente ausgeübten Kräfte.

a) Die Zurückführung der Strömung im Schraubenelement auf eine ebene Gitterströmung. Denkt man sich einen Zylinder von entsprechendem Radius koaxial zur Schraubenachse, so schneidet dieser die Flügel der Luftschraube. Bei Abwicklung dieses Zylinders in die Ebene entsteht aus diesen Flügelschnitten dann ein Gitter aus Profilen. Die Strömung durch ein solches Profilgitter ist hauptsächlich abhängig von der Teilung und der Staffelung dieses Gitters. Für die Strömung in einer Elementarschraube ist es daher belanglos, ob die Flügelzahl groß oder klein ist, wenn nur das Teilungsverhältnis des Profilgitters

$$\frac{a}{t} = \frac{2\pi r}{\mathfrak{z}\, t} \qquad (14, 1)$$

das gleiche ist. Geht man daher unter Beibehaltung des Teilungsverhältnisses entsprechend Abb. 132 zu sehr großer Flügelzahl über, so artet die Zirkulationsströmung um die Gitterprofile in die Strömung einer Wirbelfläche aus. Beim Durchtritt durch die Schraubenkreisebene ändert sich die Axialkomponente nach unseren früheren Überlegungen nicht. Bei genügend großer Flügelzahl können wir daher in dem Bereich, in welchem die Flügelprofile die Strömung nichthomogen machen, die Strömung durch eine ebene Strömung durch ein Profilgitter des entsprechenden Teilungsverhältnisses ersetzt denken.

Abb. 132. Profilgitter mit gleichem Teilungsverhältnis a/t und gleicher Staffelung γ üben gleiche Wirkung auf die Strömung aus. Beim Grenzübergang zu sehr kleiner Teilung wird aus der Zirkulationsströmung um die Gitterprofile die Strömung einer Wirbelfläche konstanter Wirbeldichte Γ/a.

b) Größe und Richtung der auf ein Schraubenflügelprofil wirkenden Kraft. Um festzustellen, welche Kraft durch jedes Profil eines Gitters auf die Strömung ausgeübt wird bzw. welche Reaktion dieses Profil durch die Strömung erfährt, untersuchen wir die Kräfte, die auf die Flüssigkeitsmenge zwischen zwei um die Teilung voneinander entfernten Stromlinien ausgeübt werden, wobei wir, wie immer im folgenden,

wenn nichts anderes bemerkt wird, ideale Strömung, also Reibungsfreiheit voraussetzen wollen.

Hinreichend weit vor dem Gitter habe die Strömung den Druck p_1, hinreichend weit dahinter den Druck p_2. Nach der Druckgleichung muß nun gelten, wenn ϱ die Luftdichte ist:

$$p_1 = p_0 - \frac{\varrho}{2} w_1^2 , \qquad p_2 = p_0 - \frac{\varrho}{2} w_2^2 . \tag{14, 2}$$

Der auf den Enden des Streifens zwischen zwei einander gleichen begrenzenden um die Teilung voneinander entfernten Stromlinien wirkende Druckunterschied ist daher

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2} (w_1^2 - w_2^2) . \tag{14, 3}$$

Es ist aber

$$w_1^2 = w_m^2 + w_{u_1}^2 , \qquad w_2^2 = w_m^2 + w_{u_2}^2 , \tag{14, 4}$$

also

$$\Delta p = \frac{\varrho}{2} (w_{u_1}^2 - w_{u_2}^2) . \tag{14, 5}$$

Weil aus dem Drucke längs der begrenzenden Stromlinien keine Kraft resultiert, da längs beider an entsprechenden Stellen der gleiche Druck vorhanden ist und somit sich die an entsprechenden Elementen der Begrenzung angreifenden Kräfte gegenseitig aufheben, ohne daß natürlich dabei auch die Momente verschwänden, ist die gesamte, aus den Druckunterschieden herrührende Kraftkomponente senkrecht zur Gitterachse gerichtet (Abb. 133) und somit der Axialschub

Abb. 133. Entstehung der auf die Profile eines Gitters wirkenden Strömungskräfte.

$$S = b \cdot a \cdot \frac{\varrho}{2} (w_{u_1}^2 - w_{u_2}^2) . \tag{14, 6}$$

Hierbei bedeutet $b = dr$ den Radienunterschied benachbarter koaxialer Zylinderschnitte, welche die Elementarschraube begrenzen.

Außer der aus den Druckunterschieden herrührenden Kraft ergibt sich noch eine Kraft durch die Änderung der Richtung und Größe der Geschwindigkeiten. Diese Kraft ist nach dem Impulssatz, da

$$\frac{m}{\mathfrak{z}} = \varrho\, b\, a\, w_m$$

die durch den Gitterstreifen des betrachteten Schraubenelementes zeitlich durchströmende Masse ist,

$$J = \varrho \cdot b\, a\, w_m (\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2) .$$

Da aber $\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_{u_2}$ ist, liegt diese Kraft in Richtung der Gitterachse bzw. Umfangsrichtung, somit ist $J = T$ die Tangentialkraft

$$T = \varrho \cdot b\, a\, w_m (w_{u_1} - w_{u_2})\,. \tag{14, 7}$$

Die Richtung der aus S und T resultierenden Kraft P ergibt sich aus

$$\frac{S}{T} = \frac{w_{u_1}^2 - w_{u_2}^2}{2\, w_m (w_{u_1} - w_{u_2})} = \frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2\, w_m}\,, \tag{14, 8}$$

d. h. P steht senkrecht zu einer mittleren Geschwindigkeit (Abb. 134)

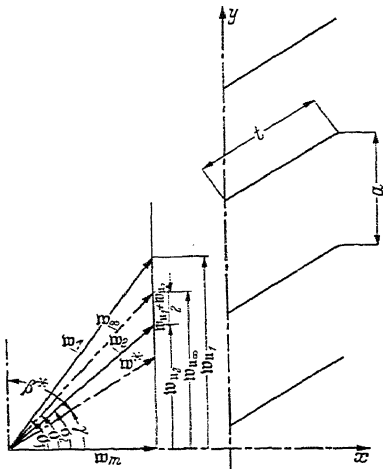



Abb. 134. Die Geschwindigkeiten und ihre Anteile im Ablenkungsdreieck der Gitterströmung.

$$w_\infty = \frac{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2}{2} \tag{14, 9}$$

deren Umfangskomponente

$$w_{u\,\infty} = \frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2}$$

ist.

Die Größe der Resultierenden ergibt sich aus

$$P^2 = S^2 + T^2,$$

$$P^2 = (\varrho\, b\, a)^2 \cdot (w_{u_1} - w_{u_2})^2 \left(\left(\frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2}\right)^2 + w_m^2\right).$$

Der letzte Klammerausdruck stellt aber w_∞^2 dar, so daß

$$P = \varrho\, b\, a\, (w_{u_1} - w_{u_2})\, w_\infty \tag{14, 10}$$

wird.

Die Größe

$$a\,(w_{u_1} - w_{u_2}) = \Gamma \tag{14, 11}$$

ist die auf das einzelne Profil des Gitters entfallende Zirkulation. Legt man nämlich eine beliebige, ein einziges Profil einmal umschließende Linie, so ist der Wert der Zirkulation auf dieser Linie unabhängig von deren besonderen Gestalt. Wählt man nun zwei um die Teilung voneinander entfernte Stromlinien als Umschlingungslinie, indem man sie sich im Unendlichen durch zwei Verbindungslinien von der Länge a in Richtung der Gitterachse geschlossen denkt, so wird tatsächlich der obige Wert der Zirkulation erhalten. Die Anteile, die die Stromlinien ergeben, sind nämlich völlig gleich und haben entgegengesetzte Vorzeichen.

Wir erhalten somit den Satz: Die auf ein einzelnes Profil eines Gitters wirkende Kraft ist proportional der auf dieses Profil entfallenden Zirkulation Γ und der mittleren Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty = \frac{\mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_1}{2}$ und steht senkrecht zur Richtung dieser mittleren Geschwindigkeit:

$$P = \varrho\, b\, \Gamma\, w_\infty\,; \qquad \mathfrak{P} \perp \mathfrak{w}_\infty\,. \tag{14, 12}$$

Denkt man sich a immer größer werdend und $\Gamma =$ konst., wobei dann $w_{u_1} - w_{u_2} \to 0$ sein muß, so ist $w_1 = w_2 = w_\infty$ und man erhält den KUTTA-JOUKOWSKIschen Satz für Tragflächenprofile in seiner bekannten Fassung. Dieser ist also nur ein Spezialfall des entsprechenden Satzes für Gitter.

Es ist üblich die Auftriebskraft P noch in einer anderen Form zu schreiben:

$$P = c_a \cdot \frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \cdot b \cdot t. \tag{14,13}$$

Hierbei ist t die passend definierte Länge des Profils. c_a heißt der Auftriebs- oder Quertriebsbeiwert. Unter Benutzung des Teilungsverhältnisses a/t und der Größen des Ablenkungsdreiecks schreibt sich der Auftriebsbeiwert

$$c_a = 2\frac{a}{t} \cdot \frac{w_{u_1} - w_{u_2}}{w_\infty} = \frac{2\Gamma}{t\,w_\infty}. \tag{14, 14}$$

c) Zusammenhang zwischen Zirkulation und Leistung. Das gesamte Drehmoment der Elementarschraube erhält man aus der auf die einzelne Schaufel ausgeübten Umfangskraft T zu

$$M = \mathfrak{z}\, r\, T, \tag{14, 15}$$

wenn $\mathfrak{z}$ die Schaufelzahl, r der Radius der Elementarschraube ist. Die Teilung a ist hierbei (14, 1)

$$a = \frac{2\pi r}{\mathfrak{z}}.$$

Die durch die Elementarschraube in der Zeiteinheit durchfließende Masse ist $\mathfrak{z} \cdot \dot{m} = \varrho \cdot \dot{Q}$, wobei $\dot{Q}$ die in der Zeiteinheit durchströmende Menge ist

$$\dot{Q} = 2\pi r\, d r\, w_m,$$

und damit

$$M = \varrho \cdot \dot{Q}\, r (w_{u_1} - w_{u_2}).$$

Mit $r \cdot \omega = u$ erhält man hieraus die Leistung $N = M \cdot \omega$

$$N = \varrho\, \dot{Q}\, u (w_{u_1} - w_{u_2}).$$

Mit Einführung der Zirkulation um alle $\mathfrak{z}$ Schaufeln $\Gamma_\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \cdot \Gamma$

$$\Gamma_\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\, a (w_{u_1} - w_{u_2}) = 2\pi r (w_{u_1} - w_{u_2})$$

erhält man

$$N = \varrho \frac{\dot{Q}}{2\pi} \omega\, \Gamma_\mathfrak{z} = \dot{m} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \cdot \Gamma_\mathfrak{z}, \tag{14, 16}$$

welche Gleichung von FÖTTINGER abgeleitet wurde [Lit. 61].

d) Der Begriff des zu einem beliebigen Profilgitter gleichwertigen Gitters aus Streckenprofilen. Für ein beliebiges, in einer Strömung allein vorhandenes Profil gibt es immer eine Anstellung gegen die im

Unendlichen ungestörte Parallelströmung, bei der das Profil keinen Auftrieb erfährt. Von dieser Richtung der auftriebsfreien Anströmung aus sei der Anstellwinkel α_∞ zu messen. Eine Stromlinie, die Verzweigungsstromlinie, trifft hierbei auf das Profil in einem vorderen Verzweigungspunkt E_0, verzweigt sich dann in das Profil selbst und trifft in der Hinterkante des Profils A wieder zusammen, um von dort als gewöhnliche Stromlinie weiter zu verlaufen (Abb. 135). Bildet man nun zwischen diesen beiden Verzweigungspunkten die Potentialdifferenz

$$\Phi_{E_0} - \Phi_A = \int_{E_0}^{A} w\,ds$$

durch Integration der Geschwindigkeiten w längs der Profiloberfläche, so ist diese bekanntlich bei der auftriebfreien Anströmung auf beiden Seiten des Profils gleich.

Ergäbe sich zwischen diesen Differenzen auf Druck- und Saugseite ein Unterschied, so wäre dieser, wie man leicht einsieht, die Zirkulation um das Profil. Dann erführe aber das Profil einen Auftrieb. Dieser soll jedoch voraussetzungsgemäß verschwinden. Dann müssen aber auch die Potentialunterschiede zwischen den Verzweigungspunkten auf beiden Seiten des Profils die gleichen sein.

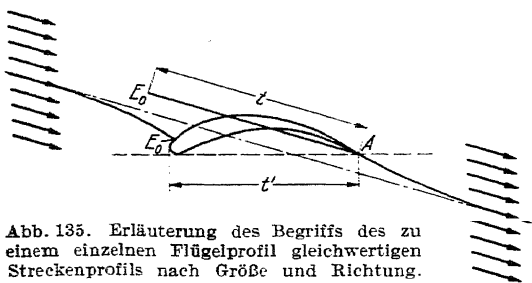



Abb. 135. Erläuterung des Begriffs des zu einem einzelnen Flügelprofil gleichwertigen Streckenprofils nach Größe und Richtung.

Es sei nun die passend definierte Profiltiefe t^*, die Geschwindigkeit der Anströmung w_∞, dann kann man eine Größe k_{p_F} einführen durch die Beziehung

$$\Phi_{E_0} - \Phi_A = \int w\,ds = k_{p_F}\, w_\infty\, t^* . \tag{14, 17}$$

Für andere Anstellwinkel $\alpha_\infty \neq 0$ wird nun bekanntlich der Auftrieb des Profils bei unendlicher Spannweite für ein Stück von der Breite b wiedergegeben durch

$$A = c_a^* \cdot \frac{\varrho}{2}\, w_\infty^2 \cdot b \cdot t^* \tag{14, 18}$$

wobei

$$c_a^* = 2\pi\, k_{p_F} \sin\alpha_\infty \tag{14, 19}$$

ist. Diese Beziehungen werden auch durch Spezialisierung der späteren Ausführungen wieder bestätigt.

In idealer Strömung würde sich nun der gleiche Auftrieb erzeugen lassen durch ein Streckenprofil von der Tiefe $t = k_{p_F} \cdot t^*$. Hierfür wäre ja bei auftriebfreier Anströmung, da dann an der Oberfläche die Geschwindigkeit $w = w_\infty$ konstant ist, die Potentialdifferenz zwischen E_0 und A

$$\Phi_{E_0} - \Phi_A = \int_{E_0} w\,ds = w_\infty\, t = k_{p_F}\, w_\infty t^* . \tag{14,20}$$

Dieses Streckenprofil wäre somit bezüglich seines Auftriebs gleichwertig mit dem anderen Profil.

Es entsteht nun die Frage, ob es auch zu einem beliebigen Profilgitter ein gleichwertiges Gitter aus Streckenprofilen bei gleicher Teilung a gibt.

Jedenfalls gibt es zunächst zu jedem Gitter eine Richtung der Anströmung, bei welcher auf das Gitter von der Strömung keine resultierende Kraft ausgeübt wird (Abb. 136). Für diese muß dann natürlich

$$\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_\infty$$

sein. Mit der Senkrechten zur Gitterachse möge diese Geschwindigkeit den Winkel γ einschließen.

Abb. 136. Erläuterung des Begriffs des zu einem beliebigen Profilgitter gleichwertigen Streckenprofilgitters.

Das gesuchte gleichwertige Gitter aus Streckenprofilen muß also mit seinen einzelnen Profilen in diese Richtung fallen.

Auf dem gegebenen Profilgitter herrsche bei auftriebfreier Anströmung auf beiden Seiten des Profils wieder die Potentialdifferenz

$$\Phi_{E_0} - \Phi_A = \int w\,ds = k_{p_G} \cdot w_\infty \cdot t^* . \tag{14,21}$$

Es leuchtet ein, daß auch das gleichwertige Streckenprofilgitter die gleiche Potentialdifferenz zwischen E_0 und A haben muß wie das Profilgitter. Daraus bestimmt sich die Länge $t = k_{p_G} \cdot t^*$ der Streckenprofile des gleichwertigen Streckenprofilgitters.

Die Größen γ und a/t kennzeichnen die Gitterstellung, d. h. die Anordnung der Profile im Gitterverband. γ ist, wie schon angegeben, der Winkel zwischen dem Streckenprofil des gleichwertigen Gitters und der Senkrechten zur Gitterachse und werde mit Gitterwinkel oder Staffelung bezeichnet. γ ist also das Komplement zum sonst in der Schraubentheorie üblichen aerodynamischen Steigungswinkel β^*. a/t heißt das Teilungsverhältnis des gleichwertigen Streckenprofilgitters.

Schließt die Richtung von w_∞ einen Winkel α_∞ mit den gleichwertigen Streckenprofilen des Gitters ein, so nennt man diesen Winkel den Anstellwinkel des Gitters gegen die Anströmrichtung. Von dieser Anströmrichtung ist wohl zu unterscheiden die Zuströmrichtung, also die Richtung von $\mathfrak{w}_1$, und die *Abströmrichtung*, die Richtung von $\mathfrak{w}_2$.

Für ein gegebenes Profil sind natürlich k_{p_G} und γ von der jeweiligen Anordnung im Gitter wegen der gegenseitigen Beeinflussung abhängig. Ist jedoch das Teilungsverhältnis nicht allzu klein oder das Profil nicht zu sehr gewölbt, so ist k_{p_G} und die Richtung der auftriebsfreien Anströmung nur vernachlässigbar wenig von der Gitterstellung abhängig und fast gleich mit den Verhältnissen am einzelnen Profil [Lit. 24].

Das hängt damit zusammen, daß bei auftriebfreier Anströmung die Geschwindigkeit der Strömung im Felde eines einzelnen Flügelprofils sehr rasch, nämlich in größerer Entfernung mit deren Quadrate abnimmt, so daß in geringem Abstande vom Profil die Strömung als ungestört, d. h. also als die ursprüngliche Parallelströmung betrachtet werden kann.

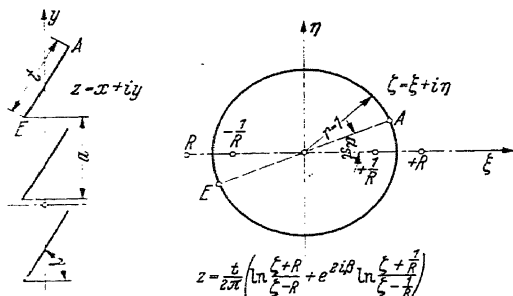



Abb. 137. Abbildung des Streckenprofilgitters auf einen Kreis.

Man kennt also häufig mit hinreichender Genauigkeit das zu einem gegebenen Profilgitter gleichwertige Streckenprofilgitter, wenn man die Verhältnisse des einzelnen Profils kennt. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, sich zunächst mit den Strömungsverhältnissen eines Streckenprofilgitters vertraut zu machen.

e) Der Auftriebsbeiwert eines Streckenprofils in Gitterstellung. Um den Auftriebsbeiwert eines Streckenprofils in Gitterstellung zu bestimmen, ist es zweckmäßig, einen Streifen der Gitterebene z auf das Äußere des Einheitskreises in der ζ-Ebene abzubilden. Die Gitterachse werde die y-Achse, die Normale dazu die x-Achse der z-Ebene.

Die einfachste durch ein solches Profilgitter mögliche Strömung ist die Parallelströmung in Richtung der Streckenprofile, wobei diese als Stücke von Stromlinien erscheinen. Der Ausdruck dieser Strömung ist

$$\chi = \varphi + i\psi = -z e^{-i\gamma} w_0 , \qquad (14,22)$$

wobei wie üblich φ und ψ das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion bedeuten. Ein Streifen dieser Strömung, der der Teilung a entspricht, werde nun auf das Äußere eines Einheitskreises der ζ-Ebene mit dem Mittelpunkt in $\zeta = 0$ abgebildet (Abb. 137).

Dieser Einheitskreis sei das Bild der Ober- und Unterseite der Streckenprofile des Gitters. Ursprung und Abfluß der Strömung liegen dadurch noch nicht fest. Von den Möglichkeiten, welche für die Abbildung nun offenstehen, sei jene ausgewählt, bei welcher Ursprung und Abfluß in symmetrisch zum Bildkreis auf der ξ-Achse gelegene Punkte fallen. Das Bild des Ursprungs falle also nach $\zeta = -R$, das des Abflusses nach $\zeta = +R$.

Geht man in der z-Ebene parallel zur Gitterachse y um die Teilung a weiter, so ändert sich die Stromfunktion um

$$E = a\,w_0 \cos\gamma$$

und das Potential um

$$\Gamma = -a\,w_0 \sin\gamma\,.$$

Demnach muß die Bildströmung in $-R$ eine Wirbelquelle

$$\mathfrak{E} = (\cos\gamma - i\sin\gamma)\,a\,w_0 = +e^{-i\gamma}\,a\,w_0$$

und in $+R$ eine Wirbelsenke

$$-\mathfrak{E} = -(\cos\gamma - i\sin\gamma)\,a\,w_0 = -e^{-i\gamma}\,a\,w_0$$

enthalten. Damit der Einheitskreis, wie verlangt, Verzweigungsstromlinie wird, müssen diese Wirbelquelle und Wirbelsenke an ihm gespiegelt werden. Man hat somit in $-\frac{1}{R}$ eine Wirbelquelle $\mathfrak{E}$ und in $+\frac{1}{R}$ eine Wirbelsenke $-\overline{\mathfrak{E}}$ anzubringen. Als Ausdruck der Bildströmung in der ζ-Ebene erhält man damit

$$\chi = \varphi + i\psi = \frac{a}{2\pi}\,w_0 \left(e^{-i\gamma} \ln \frac{\zeta - R}{\zeta + R} + e^{i\gamma} \ln \frac{\zeta - \frac{1}{R}}{\zeta + \frac{1}{R}} \right). \qquad (14,23)$$

Die Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene ist somit gegeben durch

$$z = \frac{a}{2\pi} \left(\ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} + e^{2i\gamma} \ln \frac{\zeta + \frac{1}{R}}{\zeta - \frac{1}{R}} \right). \qquad (14,24)$$

Die Verzweigungspunkte E_0 und A auf dem Bildkreis liegen aus Symmetriegründen um 180° gegeneinander versetzt. Der Bildkreiswinkel des hinteren Verzweigungspunktes A sei α_{st}.

Man findet folgende Beziehungen zwischen den Gitterparametern $(a/t, \gamma)$ und den Bildparametern (R, α_{st})

$$\operatorname{tg} \alpha_{st} = \operatorname{tg} \gamma \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \qquad \text{(Abb. 138)}, \qquad (14,25)$$

$$\frac{t}{a} = \frac{1}{\pi} \left\{ \cos\gamma \ln \frac{R^2 + 2R\cos\alpha_{st} + 1}{R^2 - 2R\cos\alpha_{st} + 1} + 2\sin\gamma \operatorname{arc\,tg} \frac{2R\sin\alpha_{st}}{R^2 - 1} \right\} \qquad (14,26)$$

(Abb. 139).

Zwei Grenzfälle gibt es nun. Der eine ist $a/t \to \infty$, der andere $t/a \to \infty$. Im einen Fall erhält man $R \to \infty$. Durch Grenzübergang kann man also die Abbildung des alleinstehenden Streckenprofils auf einen Kreis erhalten. Im anderen Falle wird $R \to 1$. Man verläßt dann zweckmäßig diese Art der Abbildung und bildet die gegenüber der Teilung sehr langen Streckenprofile auf eine Gerade und nicht auf einen Kreis ab. Die Durchführung dieser Abbildung ist zwar leicht, doch sei hier nicht näher darauf eingegangen.

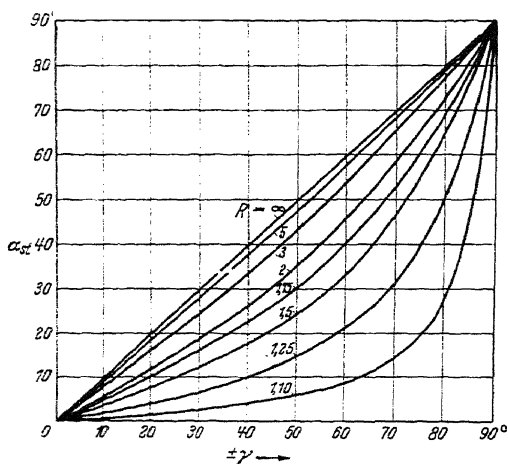



Abb. 138. Beziehung zwischen den Abbildungsparametern α_{st} und R und der Gitterstaffelung γ.

Eine beliebige Strömung durch das Streckenprofilgitter läßt sich immer zusammensetzen aus zwei Anteilen. Die Geschwindigkeit weit vor dem Gitter sei $\mathfrak{w}_1$, weit hinter dem Gitter $\mathfrak{w}_2$. Unter $\mathfrak{w}_\infty$ wird dann

$$\mathfrak{w}_\infty = \frac{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2}{2} \qquad (14,27)$$

verstanden. $\mathfrak{w}_\infty$ schließt mit $\mathfrak{w}_0$ den Winkel α_∞ ein. Wir zerlegen nun die Strömung so, daß $\mathfrak{w}_\infty$ aus einer Komponente $\mathfrak{w}_0 \cos \alpha_\infty$ und einer dazu senkrechten $\mathfrak{w}_{\pi/2} \sin \alpha_\infty$ zusammengesetzt erscheint. Damit die Gesamtströmung glatt abfließt, muß dies auch bei dem Strömungsanteil $\mathfrak{w}_{\pi/2} \sin \alpha_\infty$ der Fall sein. Die dazugehörige Zirkulation und damit der Quertrieb bzw. der Quertriebsbeiwert sind also proportional $\sin \alpha_\infty$.

Abb. 139. Beziehung zwischen dem Abbildungsparameter R und der Gitterstaffelung γ und dem Teilungsverhältnis a/t.

Bei einem einzelnen Streckenprofil ist der Quertriebsbeiwert bekanntlich

$$c_a = 2\pi \sin \alpha_\infty, \qquad (14,28)$$

wenn c_a durch $c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 b t}$ definiert wird. Beim Streckenprofil im Gitterverbande ist aber auch c_a proportional $\sin\alpha_\infty$. Es ist also dann bei gleicher Anstellung der Quertriebsbeiwert für ein Streckenprofil im Gitterverbande das k-fache des Quertriebsbeiwertes des alleinstehenden Streckenprofils

$$c_a = 2\pi k \sin\alpha_\infty, \tag{14,29}$$

Hierbei ist die Konstante k, wie die nähere Durchführung zeigt (Abb. 140)

$$k = \frac{4a}{\pi t} \frac{R}{R^2 + 1} \frac{\cos a_{st}}{\cos\gamma} \tag{14,30}$$

Für $\gamma = 0°$ wird

$$k_{(\gamma=0)} = \frac{2a}{\pi t} \mathfrak{Tg} \frac{\pi t}{2a}.$$

Für $\gamma = 90°$ wird

$$k_{(\gamma=90°)} = \frac{2a}{\pi t} \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2a}.$$

Für kleine Werte a/t findet man

$$k_{(a/t \to 0)} \sim \frac{2a}{\pi t} \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Abb. 140. Beiwert k des Gittereinflusses auf den Auftriebsbeiwert.

f) Die Bestimmung eines Streckenprofilgitters zu einem vorgeschriebenen Ablenkungsdreieck und vorgeschriebenen Auftriebsbeiwert. Mit Hilfe der Kenntnis von k $(a/t, \gamma)$ läßt sich z. B. folgende Aufgabe lösen:

Gegeben ist ein aus $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1$ gebildetes Ablenkungsdreieck und ein Quertriebsbeiwert (Abb. 134). Gesucht wird ein Streckenprofilgitter, das diesen Daten entspricht. Das Teilungsverhältnis ist schnell gefunden, wenn c_a gegeben ist. Es ist

$$P = \varrho b a (w_{u_1} - w_{u_2}) w_\infty \text{ (Kutta-Joukowski-Satz)},$$

$$P = \frac{\varrho}{2} w_\infty^2 b t c_a \text{ (Definition für } c_a),$$

somit

$$\frac{a}{t} = c_a \frac{w_\infty}{2(w_{u_1} - w_{u_2})}. \tag{14,31}$$

Nicht so einfach ist die Festlegung von γ. Es läßt sich nur durch entsprechende Approximation aus $k(a/t, \gamma)$ und $\gamma = \sigma_\infty - \alpha_\infty$ finden, was aber weder schwierig noch langwierig ist.

g) Das zwei vorgeschriebene Ablenkungsdreiecke befriedigende Streckenprofilgitter und die Veränderung der Abströmrichtung bei Verände-

rung der Zuströmrichtung. Von großer Bedeutung ist die Änderung, der die Abströmrichtung bei einem Gitter unterliegt, wenn die Zuströmrichtung geändert wird. Sie festzustellen ist recht einfach. Es war (14, 31), (14, 29):

$$\frac{a}{t} = c_l \frac{w_\infty}{2(w_{u_1} - w_{u_2})} = 2\pi k \sin\alpha_\infty \frac{w_\infty}{2(w_{u_1} - w_{u_2})}. \qquad (14,32)$$

Hieraus folgt mit

$$w_\infty = \frac{w_m}{\cos\sigma_\infty} = \frac{w_m}{\cos(\gamma + \alpha_\infty)},$$

$$w_{u_1} - w_{u_2} = \pi \frac{k}{\frac{a}{t}} \sin\alpha_\infty \frac{w_m}{\cos(\gamma + \alpha_\infty)},$$

$$w_{u_1} - w_{u_2} = \frac{k}{\frac{2a}{\pi t}\,\frac{1}{\cos\gamma}}\, 2\, w_m \frac{\sin\alpha_\infty}{\cos\gamma\cos(\gamma + \alpha_\infty)}.$$

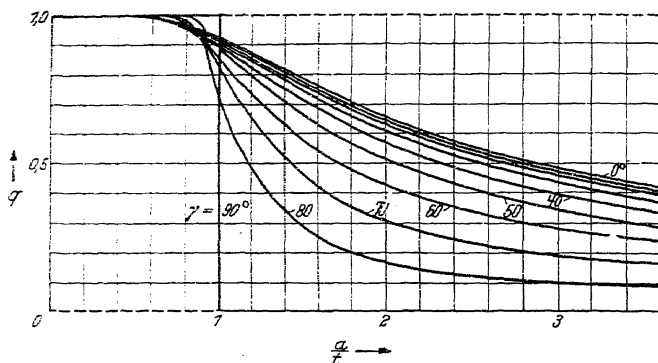



Abb. 141. Beiwert q für den Zusammenhang zwischen Zuströmrichtung und Abströmrichtung einer Gitterströmung.

Durch weitere Umformung ergibt sich mit $\cos^2\gamma = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\gamma}$

$$w_{u_1} - w_{u_2} = \frac{k}{\frac{2a}{\pi t}\,\frac{1}{\cos\gamma}}\, 2\, w_m \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_\infty(\mathrm{tg}^2\gamma + 1)}{1 - \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha_\infty}$$

und durch Division

$$w_{u_1} - w_{u_2} = \frac{k}{\frac{2a}{\pi t}\,\frac{1}{\cos\gamma}}\, 2\, w_m \left(\frac{\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}\,\alpha_\infty}{1 - \mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha_\infty} - \mathrm{tg}\,\gamma\right),$$

woraus dann folgt

$$w_{u_1} - w_{u_2} = \frac{k}{\frac{2a}{\pi t}\,\frac{1}{\cos\gamma}}\, 2\, w_m \left(\mathrm{tg}(\gamma + \alpha_\infty) - \mathrm{tg}\,\gamma\right). \qquad (14,33)$$

Man sieht, daß der Quotient $q = \frac{k}{\frac{2a}{\pi t}\,\frac{1}{\cos\gamma}}$ (vgl. Abb. 141) immer kleiner als 1 ist, da k kleiner ist als der Nenner (14, 30). Der Nenner ist der Wert, dem k zustrebt für kleine Werte a/t.

Für kleine a/t ist also

$$w_{u_1} - w_{u_2} = 2 w_m (\operatorname{tg}(\gamma + \alpha_\infty) - \operatorname{tg}\gamma)\,. \qquad (14,34)$$

Da nun $\operatorname{tg}\gamma = \frac{w_u^*}{w_m}$ und $\operatorname{tg}(\gamma + \alpha_\infty) = \frac{w_{u\infty}}{w_m} = \frac{\frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2}}{w_m}$ ist, folgt hieraus für kleine a/t

$$w_{u_2} = w_u^*\,.$$

Der Abströmwinkel ist also bei enger Gitterteilung vom Zuströmwinkel unabhängig.

Bei ablenkungsfreier Strömung $\alpha_\infty = 0$ ist diese Richtung mit der Staffelung des Streckenprofilgitters identisch. Dieses Resultat gilt natürlich für beliebige Profilformen ebenfalls.

Für größere Teilungsverhältnisse ist $q < 1$. Dann wird mit $\operatorname{tg}\gamma = \frac{w_u^*}{w_m}$

$$\operatorname{tg}(\gamma + \alpha_\infty) = \frac{\frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2}}{w_m}\,,$$

$$w_{u_1} - w_{u_2} = q(w_{u_1} + w_{u_2} - 2 w_u^*)\,,$$

$$w_{u_2}(1 + q) - w_{u_1}(1 - q) = 2 q w_u^*\,, \qquad (14,35)$$

somit

$$w_{u_2} = \frac{2 q w_u^* + (1 - q) w_{u_1}}{1 + q}\,. \qquad (14,36)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich also w_{u_2} und damit der Abströmwinkel für ein gegebenes Gitter berechnen, wenn w_{u_1} bzw. der Zuströmwinkel vorgeschrieben wird.

Ist aber zu einem Gitter schon ein Geschwindigkeitsdreieck gezeichnet, so ist es wegen des linearen Zusammenhangs zwischen w_u^*, w_{u_1}, w_{u_2} sehr einfach, andere Geschwindigkeitsdreiecke für das gleiche Gitter zu zeichnen:

Diese Konstruktion ergibt sich aus folgender Umformung

$$w_{u_1} - w_{u_2} = 2 q \left(\frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2} - w_u^*\right)$$

Es ist

$$w_{u_1} - w_u^* = \left(\frac{w_{u_1} + w_{u_2}}{2} - w_u^*\right) + \frac{w_{u_1} - w_{u_2}}{2}\,,$$

$$w_{u_1} - w_u^* = \frac{w_{u_1} - w_{u_2}}{2q} + \frac{w_{u_1} - w_{u_2}}{2}\,.$$

oder

$$\frac{w_{u_1} - w_{u_2}}{w_{u_1} - w_u^*} = \frac{2q}{1 + q}\,. \qquad (14,37)$$

Aus letzterer Gleichung werden später noch weitere Folgerungen zu ziehen sein. Hier folgt zunächst als graphische Konstruktion weiterer Ablenkungsdreiecke zu einem Gitter, wenn eines schon gezeichnet vorliegt:

Man ziehe durch die Endpunkte von w_1, w_∞, w_2 des gegebenen Dreiecks Geraden durch einen beliebigen Punkt P der Geraden, die durch w^* bestimmt ist (Abb. 142). Jede Parallele zu w_u gibt neue Ablenkungsdreiecke, zunächst allerdings mit anderen w_m. Entsprechende Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen liefern selbstverständlich auch die Dreiecke mit gewünschtem w_m.

Hiermit ist aber auch die Lösung einer anderen interessanten Aufgabe erledigt, nämlich ein Streckenprofilgitter zu suchen, das zwei vorgeschriebene Ablenkungsdreiecke besitzt. Hierfür ist dann w_u^* bzw. der Gitterwinkel γ zunächst unbekannt.

w_{u_1}, w_{u_2}, w'_{u_1}, w'_{u_2} seien die Umfangskomponenten der gegebenen Geschwindigkeiten, alle auf das gleiche w_m bezogen. Dann findet man aus (14, 35)

Abb. 142. Konstruktion der Größe und Richtung der Abströmgeschwindigkeit für eine neue Zuströmgeschwindigkeit, wenn die Staffelung γ und ein Ablenkungsdreieck gegeben sind. Die Umkehrung der Konstruktion erlaubt die Bestimmung eines zu zwei vorgeschriebenen Ablenkungsdreiecken passenden Gitters.

$$(w_{u_2} - w'_{u_2})(1+q) = (w_{u_1} - w'_{u_1})(1-q)$$

zunächst

$$\frac{1+q}{1-q} = \frac{w_{u_1} - w'_{u_1}}{w_{u_2} - w'_{u_2}} \tag{14, 38}$$

$$q = \frac{(w_{u_1} - w'_{u_1}) - (w_{u_2} - w'_{u_2})}{(w_{u_1} - w'_{u_1}) + (w_{u_2} - w'_{u_2})}. \tag{14, 39}$$

Die Aufgabe hat natürlich nur eine Lösung, wenn $0 < q < 1$ ist.

Aus q findet man (14, 35)

$$w_u^* = \frac{w_{u_1}(1+q) - w_{u_2}(1-q)}{2q}$$

und hiermit $\operatorname{tg}\gamma = \frac{w_u}{w_m}$. Aus γ und q wiederum ergibt sich a/t.

Auch diese Aufgabe läßt sich leicht zeichnerisch lösen, wenigstens soweit es sich darum handelt γ zu finden:

Die Konstruktion ist leicht der Abb. 142 zu entnehmen. Man denkt sich zunächst eines der Ablenkungsdreiecke verkleinert. Dann verbindet man den neuen Endpunkt w'_2 mit dem alten w_2, und w'_1 mit w_1. Die Verlängerung gibt den Punkt P als Schnittpunkt. Hiermit ist w^* und damit der Gitterwinkel γ gefunden. Nun kann man $\frac{w_{u\infty} - w_{u_2}}{w_{u\infty} - w_u^*} = q$ bestimmen und dann mit Hilfe des Diagramms (Abb. 141) auch a/t festlegen.

Weitere zu dem gleichen Gitter passende Ablenkungsdreiecke sind dann wieder leicht zu finden.

Es sei bemerkt, daß die Größe q die Beziehungen zwischen der Gitterströmung und der Stromfadentheorie der Turbinenlehre herstellt, während die Größe k die Beziehungen zwischen Gitterströmung und Tragflügeltheorie liefert.

15. Änderung der Anströmgeschwindigkeit und der Abströmgeschwindigkeit mit dem Fortschrittsgrad bei Reibungsfreiheit.

a) Der Endpunkt der Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty$. Wir hatten gefunden, daß die Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty$ die Mittellinie des aus $\mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}_3$ gebildeten gleichschenkligen Dreiecks ist (12, 15)

$$\mathfrak{w}_\infty = \frac{\mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_3}{2};$$

ähnlich wie auch (14, 9)

$$\mathfrak{w}_\infty = \frac{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2}{2}$$

als Mittellinie des aus $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gebildeten Dreiecks sich bei der entsprechenden Gitterströmung ergeben hat. Aus ersterer Beziehung erhält man bei gegebenem u und v_0 als geometrischen Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_\infty$ den über $\mathfrak{w}_0$ zu schlagenden orthoptischen Kreis (Abb. 143). Um ihn endgültig zu bestimmen, muß man noch einen zweiten geometrischen Ort kennen. Diesen haben wir aber schon bei der Untersuchung der Frage nach der Änderung der Abströmgeschwindigkeit der ebenen Gitterströmung gefunden. Bezeichnet $\beta^* = 90° - \gamma$ den Steigungswinkel der Nullauftriebsrichtung, also den aerodynamischen Steigungswinkel, so schneidet der Ort der Endpunkte von $\mathfrak{w}_0$, der mit dem Orte von $\mathfrak{v}_0$ zusammenfällt, die Nullauftriebsgerade in einem Punkte, welcher der Fortschrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$ entsprechen würde. Der Endpunkt von $\mathfrak{w}_\infty$ wie auch der von $\mathfrak{w}_2$ müssen also je auf einer Geraden durch den Endpunkt von $\mathfrak{v}^*$ liegen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit in Richtung der aerodynamischen Steigung mit der Axialkomponente $v_{m\infty} = v_0 + \frac{v_a}{2}$ mit $\mathfrak{w}^*$, so gilt (14, 37)

Abb. 143. Die geometrischen Örter für den Endpunkt der wirksamen Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty$ bei Reibungsfreiheit.

$$\frac{\mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_{u_2}}{\mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_u^*} = \frac{2q}{1+q}, \quad \frac{\mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_{u\infty}}{\mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_u^*} = \frac{q}{1+q}. \tag{15, 1}$$

Es ist aber (14, 33)

$$q = \frac{k\pi t}{2a}\cos\gamma.$$

Hierbei ist
$$a = \frac{2\pi r}{\mathfrak{z}}, \qquad k = \frac{1}{2\pi}\frac{d c_a}{d \alpha_\infty}.$$

Führen wir die reduzierte Blattbreite
$$t_{\text{red}} = k t \tag{15,2}$$
ein, so wird dann
$$q = \frac{\pi}{2}\frac{\mathfrak{z}\, t_{\text{red}}}{2\pi r}\cos\gamma \tag{15,3}$$

oder mit der reduzierten Blattvölligkeit
$$\chi_{\text{red}} = \frac{\mathfrak{z}\, t_{\text{red}}}{2\pi r}, \tag{15,4}$$

wenn zur Abkürzung im folgenden an Stelle von χ_{red} wieder χ geschrieben wird, und mit $\cos\gamma = \sin\beta^*$
$$q = \frac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*. \tag{15,5}$$

Der Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_\infty$ schneidet von der Geschwindigkeit u die Größe $v_u^*/2$ ab. Mit Hilfe dieser Größe ist (15, 1)
$$\frac{\mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_{u\infty}}{\mathfrak{w}_{u_1} - \mathfrak{w}_u^*} = \frac{v_u^*/2}{u} = \frac{q}{1+q}. \tag{15,6}$$

Der gesuchte Ort ist also gegeben durch
$$\frac{v_u^*}{2} = u\frac{q}{1+q} = u\frac{\frac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*}{1+\frac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*} = u\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*}}. \tag{15,7}$$

Er ist gegen die Richtung von $\mathfrak{v}_0$ geneigt um den Winkel ϑ.
$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{v^*}{\frac{v_u^*}{2}} = \frac{v^*}{u}\left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*}\right)$$

oder mit $\frac{v^*}{u} = \operatorname{tg}\beta^* = \lambda^*$, $\sin\beta^* = \frac{\lambda^*}{\sqrt{1+\lambda^{*2}}}$:
$$\lambda^*\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{1+\lambda^{*2}}}{\frac{\pi}{2}\chi\lambda^*}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\mathfrak{z}\, t_{\text{red}}}{4r}\sin\beta^*}}. \tag{15,8}$$

Hiermit ist auch der zweite geometrische Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_\infty$ festgelegt. Die Bestimmung des Endpunktes von $\mathfrak{w}_2$ dürfte damit ebenfalls keinerlei Schwierigkeiten machen.

b) Der Endpunkt der Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$. Es möge χ und λ_0 gegeben sein. Zu einem gegebenen $v_0/u = \lambda_0$ soll nunmehr die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ bestimmt werden.

Mit Hilfe der für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_\infty$ gefundenen geometrischen Örter ist $\mathfrak{w}_3$ entsprechend der in Abb. 144 dargestellten Konstruktion dann leicht zu finden.

Es läßt sich nun zeigen, daß der Ort des Endpunktes von $\mathfrak{w}_3$ ein Kegelschnitt, und zwar eine Hyperbel ist [Lit. 71]. Wird λ negativ, so fällt schließlich $\mathfrak{w}_\infty$ mit der Richtung von u zusammen. Der entsprechende Endpunkt der Austrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ fällt dann ins Unendliche. Hiermit findet man dann eine Asymptote der Hyperbel. Sie fällt mit

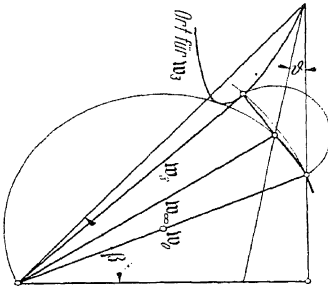



Abb. 144. Der geometrische Ort für den Endpunkt der Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$.

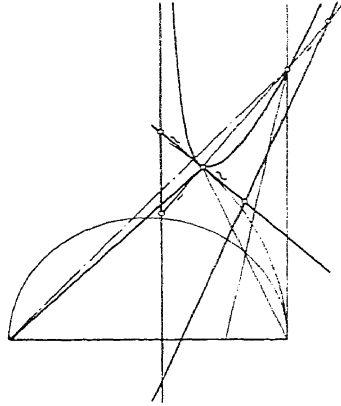



Abb. 145. Konstruktion des geometrischen Ortes für $\mathfrak{w}_3$.

$$v_u = v_u^* = u \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\chi \sin \beta^*}}$$

zusammen, ist also zu $\mathfrak{v}$ parallel. Für $\lambda = 0$, die Standverhältnisse, findet man leicht nicht nur einen Punkt der $\mathfrak{w}_3$-Hyperbel, sondern auch die Tangente in diesem Punkt, wie Abb. 145 veranschaulicht. Durch Umkehrung der bekannten Konstruktion von Hyperbelpunkten aus den Asymptoten und einem Hyperbelpunkt findet man dann aus diesem Berührungspunkt und aus dem durch $v^* = u \operatorname{tg} \beta^*$ gegebenen anderen Hyperbelpunkt sehr leicht die zweite Asymptote und weitere Hyperbelpunkte. Man kann dann von der durch Abb. 144 veranschaulichten direkten Konstruktion absehen.

Abb. 146. Der Einfluß des Teilungsverhältnisses $a/t = 2\pi r/\mathfrak{z} t$ auf die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ bei konstantem Steigungswinkel $\beta^* = 30°$.

Aus der Konstruktion dieser Hyperbel ersieht man, wie sehr das Verhalten einer Elementarschraube bei Änderung des Fortschrittsgrades λ_0 vom Werte (15,4)

$$\frac{\pi}{2}\chi = \frac{\mathfrak{z}\, t_{\mathrm{red}}}{4r} = \frac{\mathfrak{z}\, t}{4r} k \tag{15,9}$$

abhängig ist (Abb. 146). Hierbei bedeutet t die Tiefe der Profile des gleichwertigen Streckenprofilgitters. Für sehr große Teilung ist $k = 1$, somit

$$\frac{\pi}{2}\chi = \frac{\pi/2}{a/t} \qquad (a/t \to \infty)\,. \tag{15,10}$$

Für sehr enge Teilung ist (14,30)

$$k = \frac{a/t}{\pi/2} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} - \frac{a/t}{\pi/2} \cdot \frac{1}{\sin\beta^*}\,,$$

also

$$\frac{\pi}{2}\chi = \frac{1}{\sin\beta^*} \qquad (a/t \to 0)\,. \tag{15,11}$$

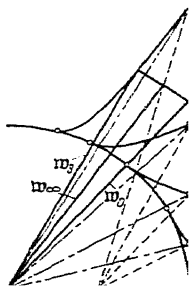



Abb. 147. Der Einfluß des Steigungswinkels β^* auf die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ bei konstantem Teilungsverhältnis $a/t = 2\pi r/\mathfrak{z}t \leqq 0{,}7$.

Abb. 148. Der Einfluß des Steigungswinkels β^* auf die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ bei konstantem Teilungsverhältnis $a/t = 2\pi r/\mathfrak{z}t = 1{,}5$.

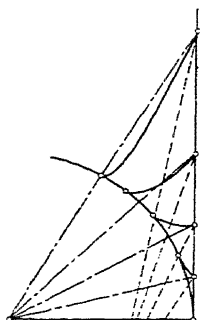



Abb. 149. Der Einfluß des Steigungswinkels β^* auf die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ bei konstantem Teilungsverhältnis $a/t = 2\pi r/\mathfrak{z}t = 2{,}5$.

Abb. 150. Der Einfluß des Steigungswinkels β^* auf die Abströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_3$ bei konstantem Teilungsverhältnis $a/t = 2\pi r/\mathfrak{z}t = 5$.

Für $a/t \to 0$ wird also

$$\frac{v_u^*}{2} = \frac{u}{2}\,. \tag{15,12}$$

Praktisch gilt dies bis etwa $a/t \approx 0{,}7$.

Für $a/t \to \infty$ wird

$$\frac{v_u^*}{2} = u\,\frac{1}{1 + \dfrac{a/t}{\pi/2\,\sin\beta^*}} \tag{15,13}$$

Praktisch gilt dies Ergebnis für $a/t > 2\pi$, $\mathfrak{z}\,t < r$, bei den üblichen Verhältnissen bei Luftschrauben also bis dicht an die Nabe heran.

c) Der Einfluß der Steigungsänderung auf Anström- und Abströmgeschwindigkeit. Die Kenntnis der k-Werte der gleichwertigen Streckenprofilgitter gestattet auch die Untersuchung des Verhaltens einer Elementarschraube bei Änderung der Steigung und damit auch einer Verstellschraube.

Man sieht sofort ein, daß die zu verschiedenen β^* gehörigen $\mathfrak{w}_3$-Hyperbeln bei konstant gehaltenem u für $\lambda = 0$ den Kreis mit dem Radius u berühren. Mit wachsendem Steigungswinkel β^* werden die Werte (15,7)

$$\frac{v_u^*/2}{u} = \frac{1}{1 + \frac{a/kt}{\pi/2 \sin\beta^*}}$$

je nach dem Teilungsverhältnis kleiner oder größer. Für $a/t > 1$ werden sie immer kleiner. Für $a/t < 0{,}7$ bleibt $\frac{v_u^*/2}{u}$ praktisch konstant. Dementsprechend ändern sich auch die $\mathfrak{w}_3$-Hyperbeln.

Als Beispiel zeigt Abb. 147 das Verhalten für $a/t < 0{,}7$, Abb. 148 für $a/t = 1{,}5$, Abb. 149 für $a/t = 2{,}5$, Abb. 150 für $a/t = 5{,}0$. Man erkennt daraus, daß das Verhalten einer Verstellschraube wesentlich vom Blattbreitenverhältnis abhängt. Die dargestellten Verhältnisse entsprechen aber noch ziemlich breitblättrigen Luftschrauben und dem Verhalten der inneren Schraubenflügelteile.

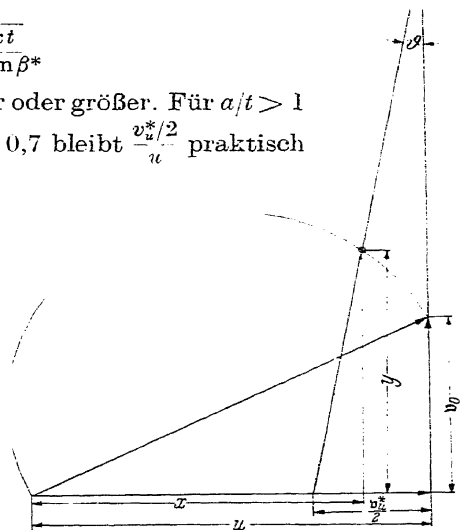



Abb. 151. Berechnung des Endpunktes von $\mathfrak{w}_\infty$.

d) Die Gleichungen zur Bestimmung von $v_u/2$ und $v_a/2$. Wir wollen ϑ, u, $v_u^*/2$, v_0 als gegeben betrachten und zunächst die dazugehörigen Größen $v_u/2$, $v_a/2$, $\mathfrak{w}_\infty$ berechnen.

Wir setzen (Abb. 151)

$$x = u - \frac{v_u}{2} = w_{u_\infty}, \qquad y = v_0 + \frac{v_a}{2} = v_{m_\infty}.$$

Mit den Koordinaten x und y schreibt sich die $\mathfrak{w}_\infty$-Gerade

$$x = u - \frac{v_u^*}{2} + y \operatorname{tg}\vartheta \tag{15,14}$$

und der $\mathfrak{w}_\infty$-Kreis

$$\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{v_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)^2. \tag{15,15}$$

Setzt man x aus (15, 14) in (15, 15) ein, so wird

$$\left(\frac{u}{2} - \frac{v_u^*}{2} + y\,\mathrm{tg}\,\vartheta\right)^2 + \left(y - \frac{v_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

und nach Ausquadrieren und Streichen der auf beiden Seiten gleichen Größen

$$y^2(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta) - y\,(v_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(u - v_u^*)) - \frac{v_u^* u}{2} + \frac{v_u^{*\,2}}{4} = 0. \quad (15,16)$$

Setzt man

$$1 + \mathrm{tg}^2\vartheta = A, \qquad \frac{v_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(u - v_u^*)}{2} = B, \qquad \frac{v_u^* u}{2} - \frac{v_u^{*\,2}}{4} = C,$$

so ergibt sich mit

$$A\,y^2 - 2B\,y = C$$

$$y = \frac{B}{A} \underset{(-)}{+} \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A}} = 2\frac{B}{A}\left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{CA}{B^2}}\right),$$

also

$$y = \frac{v_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(u - v_u^*)}{1 + \mathrm{tg}^2\vartheta}\left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{(2v_u^* u - v_u^{*\,2})\,(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta)}{(v_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(u - v_u^*))^2}}\right). \quad (15,17)$$

Das Vorzeichen — der Wurzel ist ohne Bedeutung. Für $v_0 = v^* = \frac{v_u^*}{2\,\mathrm{tg}\,\vartheta}$ muß $y = v^*$ werden, was durch obigen Ausdruck tatsächlich erfüllt wird, wenn das Vorzeichen + der Wurzel gewählt wird. Für x erhalten wir also

$$x = u - \frac{v_u^*}{2} + \mathrm{tg}\,\vartheta\,\frac{v_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(u - v_u^*)}{1 + \mathrm{tg}^2\vartheta}\left(\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{(2v_u^* u - v_u^{*2})\,(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta)}{(v_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(u - v_u^*))^2}}\right). \quad (15,18)$$

Für das weitere erweisen sich mit $\frac{v_u^*}{u} = 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*$ folgende Abkürzungen als zweckmäßig

$$\frac{y}{u} = \Lambda = \frac{\lambda_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(1 - 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*)}{1 + \mathrm{tg}^2\vartheta}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*(1 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*)\,(1 + \mathrm{tg}^2\vartheta)}{(\lambda_0 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,(1 - 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*))^2}}\right), \quad (15,19)$$

$$\frac{x}{u} = \mathsf{K} = 1 - \mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^* + \mathrm{tg}\,\vartheta\,\Lambda. \quad (15,20)$$

Hiermit sind

$$\frac{v_u/2}{u} = \mathrm{tg}\,\vartheta\,(\lambda^* - \Lambda), \quad (15,21)$$

$$\frac{v_a/2}{u} = \Lambda - \lambda_0. \quad (15,22)$$

Die Größe $\Lambda = \frac{v_0 + v_a/2}{u}$ ist in Abhängigkeit von λ_0 und λ^* für $\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5$ in den Abb. 152—156 dargestellt.

e) Die Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_\infty$ und der Anstellwinkel α_∞. Es ist

$$\mathfrak{w}_\infty = x + i\,y.$$

Also

$$w_\infty^2 = x^2 + y^2 .$$

Mit (15, 14)

$$x = u - \frac{v_u^*}{2} + y \operatorname{tg} \vartheta$$

wird

$$w_\infty^2 = y^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) + u^2 + \frac{v_u^{*\,2}}{4} + 2\,u\,y \operatorname{tg} \vartheta - u\,v_u^* - y\,v_u^* \operatorname{tg} \vartheta .$$

Wegen (15, 16)

$$y^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) = v_0\, y - u\, y \operatorname{tg} \vartheta + y\, v_u^* \operatorname{tg} \vartheta + \frac{v_u^*\, u}{2} - \frac{v_u^{*\,2}}{4}$$

wird also

$$w_\infty^2 = u^2 + u y \operatorname{tg} \vartheta - \frac{u\, v_u^*}{2} + v_0\, y$$

oder mit $y/u = \Lambda$

$$\frac{w_\infty}{u} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} \vartheta\, \lambda^* + \Lambda\, (\operatorname{tg} \vartheta + \lambda_0)} . \qquad (15, 23)$$

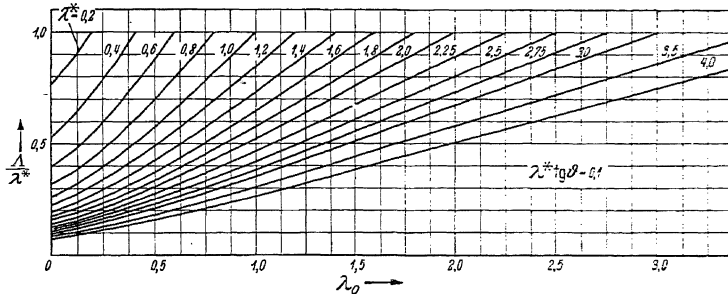



Abb. 152. Das Verhältnis der Durchflußgeschwindigkeit v_m durch die Schraubenkreisebene zur Nullschubfortschrittsgeschwindigkeit v^* $\Lambda/\lambda^* = v_m/v^*$ für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}1$.

Die in Abb. 152—156 dargestellten Ergebnisse gelten auch für die Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40) $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{\mathfrak{z}\, t_0}{4 R} \dfrac{\lambda^*}{1 + \lambda^{*2}}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 23) erläutert.

Die Richtung von $\mathfrak{w}_\infty$ ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \beta_\infty = \frac{y}{x} = \frac{\Lambda}{1 - \operatorname{tg} \vartheta\, \lambda^* + \operatorname{tg} \vartheta\, \Lambda} = \frac{1}{\dfrac{1 - \operatorname{tg} \vartheta\, \lambda^*}{\Lambda} + \operatorname{tg} \vartheta} \qquad (15, 24)$$

Mit β^* als aerodynamischer Steigung ergibt sich der Anstellwinkel α_∞ der Flügelprofile der Elementarschraube zu

$$\alpha_\infty = \beta^* - \beta_\infty ; \qquad {}^{*} = \frac{v}{u} = \lambda^* , \qquad (15, 25)$$

so daß

$$\operatorname{tg} \alpha_\infty = \frac{\operatorname{tg} \beta^* - \operatorname{tg} \beta_\infty}{1 + \operatorname{tg} \beta^* \operatorname{tg} \beta_\infty} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} \beta^*}{\operatorname{tg} \beta_\infty} - 1}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} \beta_\infty} + \operatorname{tg} \beta^*} = \frac{\dfrac{\lambda^*}{\Lambda} (1 - \operatorname{tg} \vartheta\, \lambda^* + \operatorname{tg} \vartheta\, \Lambda) - 1}{\dfrac{1}{\Lambda} (1 - \operatorname{tg} \vartheta\, \lambda^* + \operatorname{tg} \vartheta\, \Lambda) + \lambda^*} . \qquad (15, 26)$$

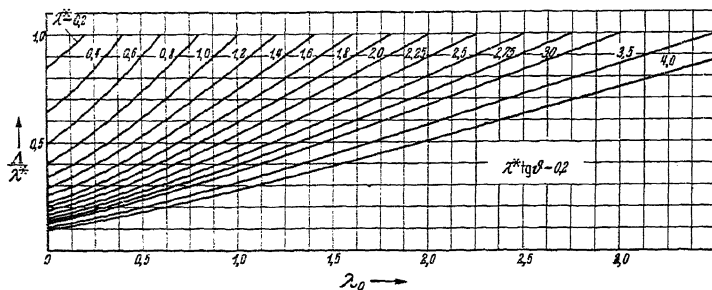



Abb. 153. Das Verhältnis der Durchflußgeschwindigkeit v_m durch die Schraubenkreisebene zur Nullschubfortschrittsgeschwindigkeit v^* $\Lambda/\lambda^* = v_m/v^*$ für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}2$.

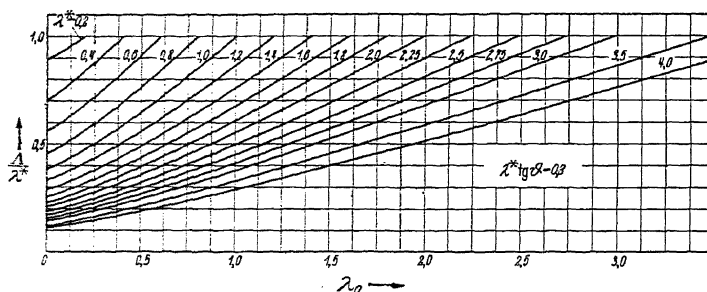



Abb. 154. Das Verhältnis der Durchflußgeschwindigkeit v_m durch die Schraubenkreisebene zur Nullschubfortschrittsgeschwindigkeit v^* $\Lambda/\lambda^* = v_m/v^*$ für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}3$.

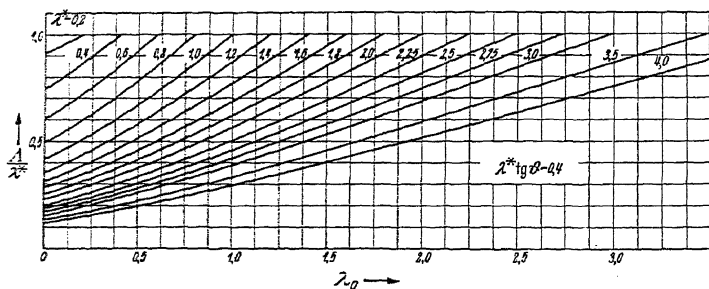



Abb. 155. Das Verhältnis der Durchflußgeschwindigkeit v_m durch die Schraubenkreisebene zur Nullschubfortschrittsgeschwindigkeit v^* $\Lambda/\lambda^* = v_m/v^*$ für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}4$.

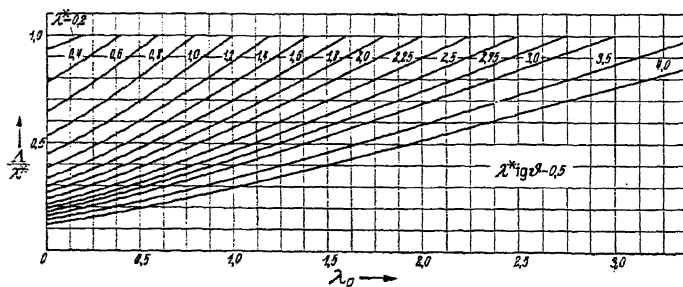



Abb. 156. Das Verhältnis der Durchflußgeschwindigkeit v_m durch die Schraubenkreisebene zur Nullschubfortschrittsgeschwindigkeit v^* $\Lambda/\lambda^* = v_m/v^*$ für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}5$.

16. Änderung von Wirkungsgrad, Schub und Leistung mit dem Fortschrittsgrad.

a) Der Wirkungsgrad in Abhängigkeit von λ, λ^*, ϑ. Der Wirkungsgrad ist gegeben durch (13, 2)

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\beta_\infty} = \frac{v_0}{u} \cdot \frac{x}{y} = \lambda_0 \frac{K}{\Lambda}. \tag{16, 1}$$

Wir erhalten also (15, 24)

$$\eta = \lambda_0 \left(\frac{1 - \lambda^* \operatorname{tg}\vartheta}{\Lambda} + \operatorname{tg}\vartheta\right). \tag{16, 2}$$

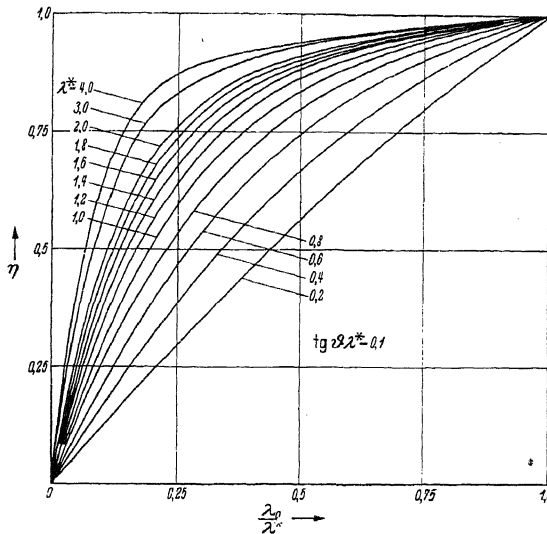



Abb. 157. Die Änderung des Wirkungsgrades mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta = 0{,}1$.

Die in Abb. 157—161 dargestellten Ergebnisse gelten auch für die Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40) $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{\mathfrak{z}\, t_0}{4R}\,\dfrac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 23) erläutert.

Für $\operatorname{tg}\vartheta = 0$ wird $\Lambda = \lambda_0$ und damit $\eta = 1$, da verschwindendem ϑ auch verschwindende Blattbreite und Leistung entsprechen. Für $\lambda = \lambda^*$ wird $\Lambda = \lambda^*$ und damit ebenfalls $\eta = 1$, da hierbei die Anstellung und damit die Leistungsaufnahme verschwindet. Für $\lambda = 0$ wird $\eta = 0$.

Es ist zweckmäßig, diese Beziehung in Schaubildern darzustellen. Als Abszisse wählen wir λ_0/λ^*. Für einige $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta$ wird nun eine Schar von Wirkungsgradkurven berechnet mit dem Parameter λ^* (Abb. 157—161).

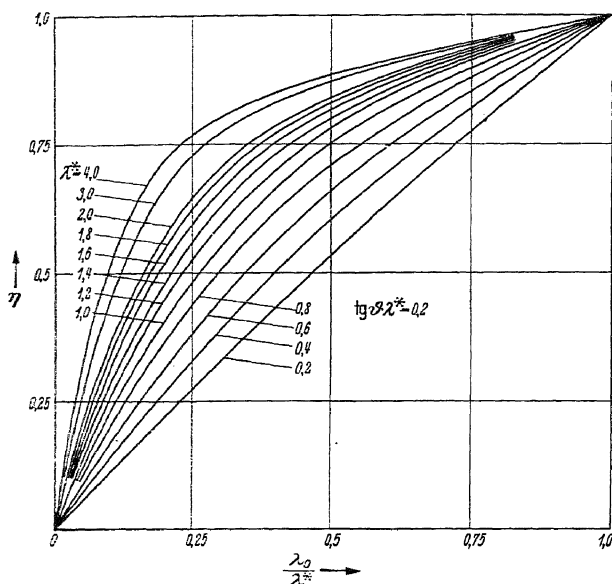



Abb. 158. Die Änderung des Wirkungsgrades mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}2$.

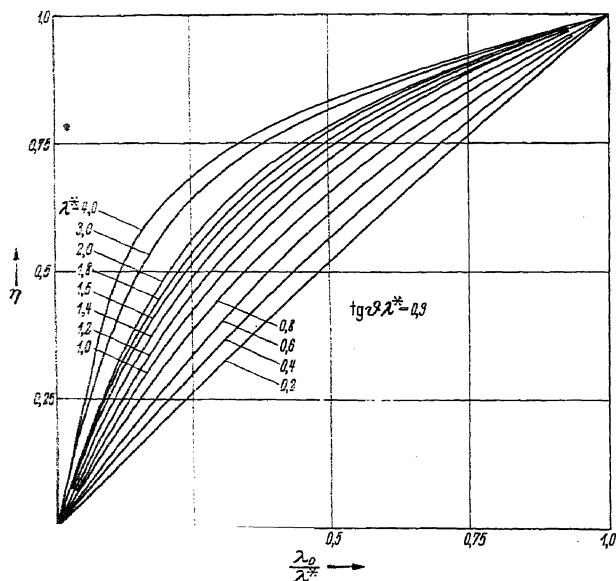



Abb. 159. Die Änderung des Wirkungsgrades mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}3$.

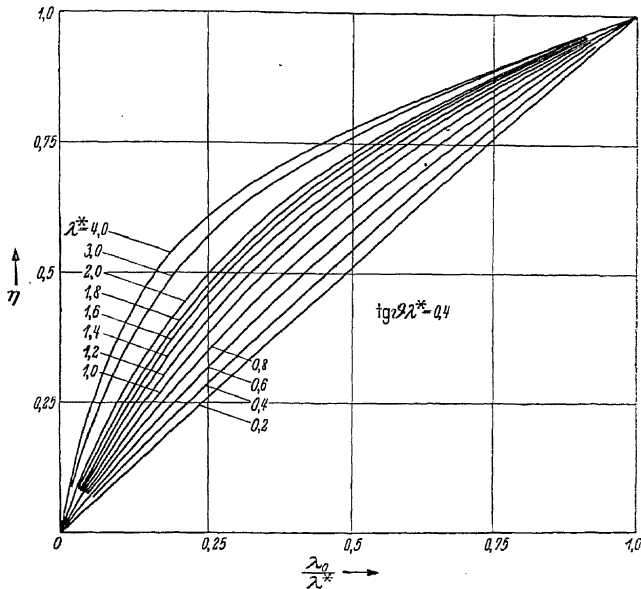



Abb. 160. Die Änderung des Wirkungsgrades mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}4$.

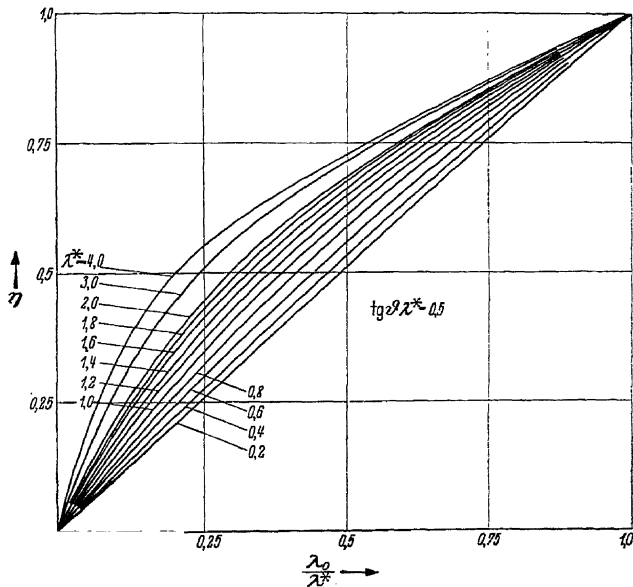



Abb. 161. Die Änderung des Wirkungsgrades mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda g \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}5$.

b) Die Schubziffer k_s in Abhängigkeit von λ, λ^*, ϑ. Es ist (11, 13)

$$k_s = 2\frac{v_a}{u}\cdot\frac{v_{m\infty}}{u}. \tag{16, 3}$$

Da

$$\frac{v_{m\infty}}{u} = \Lambda, \qquad \frac{v_a}{u} = 2\left(\frac{v_{m\infty}}{u} - \frac{v_0}{u}\right) = 2(\Lambda - \lambda_0),$$

so wird

$$k_s = 4(\Lambda - \lambda_0)\Lambda. \tag{16, 4}$$

Für $\operatorname{tg}\vartheta = 0$ wird $\Lambda = \lambda_0$ und damit $k_s = 0$; ebenso für $\lambda_0 = \lambda^*$. Auch diese Beziehung für k_s stellt man zweckmäßig für verschiedene $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta$ in Schaubildern dar, wobei als Abszisse λ_0/λ^* und als Parameter λ^* gewählt wird (Abb. 162—166).

c) Die Momentenziffer in Abhängigkeit von λ, λ^*, ϑ. Es ist (11, 14)

$$k_d = 2\frac{v_u}{u}\cdot\frac{v_{m\infty}}{u}.$$

Da

$$\frac{v_u}{u} = 2\frac{u-x}{u} = 2(1-\mathrm{K}) = 2\operatorname{tg}\vartheta(\lambda^* - \Lambda), \qquad \frac{v_{m\infty}}{u} = \Lambda,$$

so wird

$$k_d = 4\operatorname{tg}\vartheta(\lambda^* - \Lambda)\Lambda. \tag{16, 5}$$

Für $\operatorname{tg}\vartheta = 0$ wird $k_d = 0$, ebenso für $\lambda = \lambda^*$. Man kann η auch aus λ, k_s, k_d errechnen:

$$\eta = \lambda_0\frac{\Lambda - \lambda_0}{\operatorname{tg}\vartheta(\lambda^* - \Lambda)}. \tag{16, 6}$$

Diese Gleichung führt aber durch Vergleich mit der obigen Gleichung für η auf eine Bestimmungsgleichung für Λ, welche der Gleichung (15, 16) völlig entspricht. Beide Gleichungen für η führen also, wie dies sein muß, zum gleichen Ergebnis.

Auch k_d stellt man zweckmäßig für verschiedene $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta$ in Schaubildern dar, wobei als Abszisse λ_0/λ^* und als Parameter λ^* gewählt wird (Abb. 167—171).

d) Verhalten bei kleinem Schlupf. Da die für k_s, k_d und η gefundenen Beziehungen etwas mühsam auszuwerten sind und manchmal besonders das Verhalten bei kleinem Schlupf $\lambda^* - \lambda_0$ interessiert, so soll dieses besonders untersucht werden.

Wir setzen wieder zur Abkürzung (15, 19)

$$\Lambda = \frac{\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1 - 2\operatorname{tg}\vartheta\lambda^*)}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\operatorname{tg}\vartheta\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\lambda^*))^2}}\right).$$

Für $\lambda = \lambda^*$ wird $\Lambda = \lambda^*$.

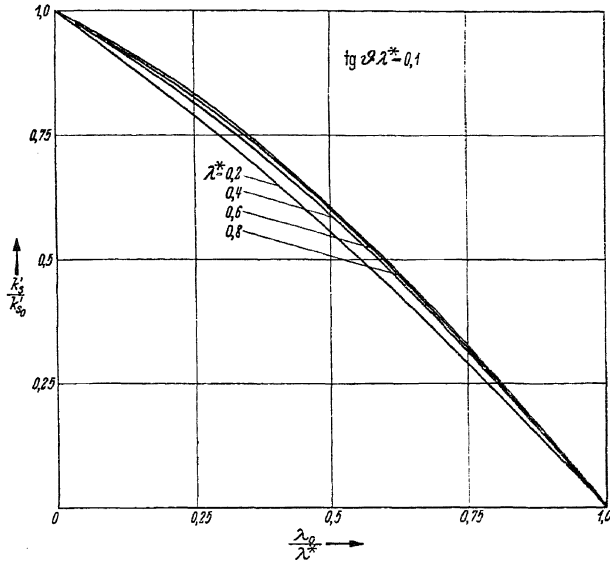



Abb. 162. Die Änderung der Schubziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta = 0{,}1$.

Die in Abb. 162—166 dargestellten Ergebnisse gelten auch für die Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40) $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{1 + \frac{\mathfrak{z}\, t_0}{4R}\,\frac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 23) erläutert.

Dann gilt

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^2}}\right)$$

$$- \frac{\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{4\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^2}\right)^{-1/2}$$

$$\cdot\frac{4\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^3}.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}\Bigg\{&\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^2}}\right)\\ &- \frac{2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^2}}}\Bigg\}.\end{aligned}\right\}(16,7)$$

Für $\lambda = \lambda^*$ wird

$$\sqrt{1 + \frac{4\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*(1-\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*))^2}} = \frac{\lambda^* + \operatorname{tg}\vartheta}{\lambda^* - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^* + \operatorname{tg}\vartheta}{\lambda^* - \operatorname{tg}\vartheta(1-2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)} = \frac{\lambda^*(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}{\lambda^* - \operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}^2\vartheta\,\lambda^*},$$

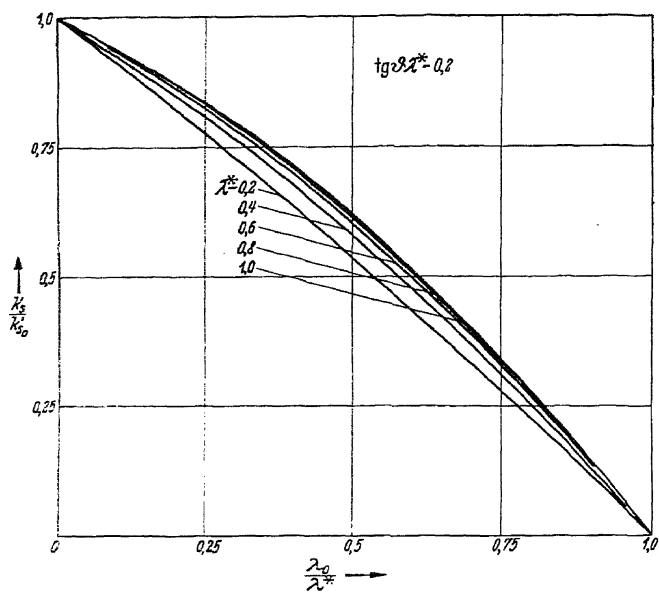



Abb. 163. Die Änderung der Schubziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}2$.

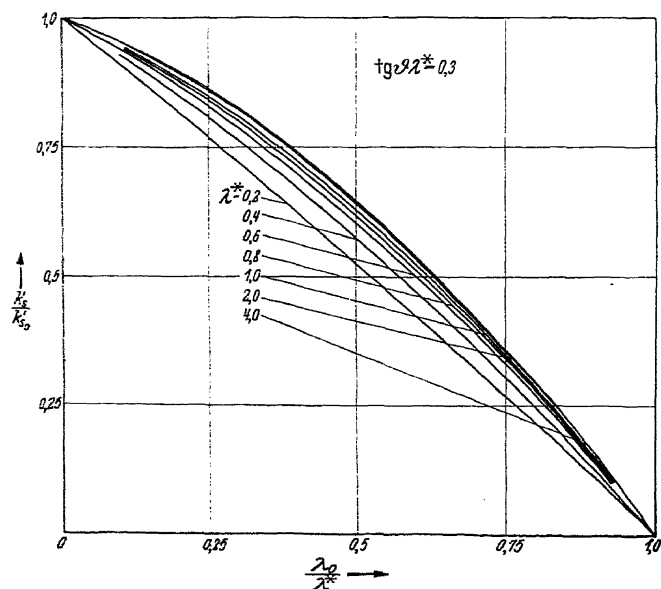



Abb. 164. Die Änderung der Schubziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}3$.

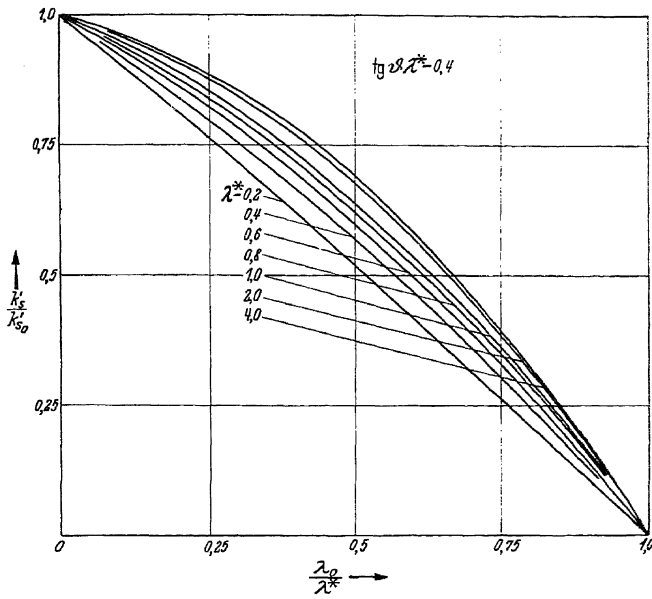



Abb. 165. Die Änderung der Schubziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}4$.

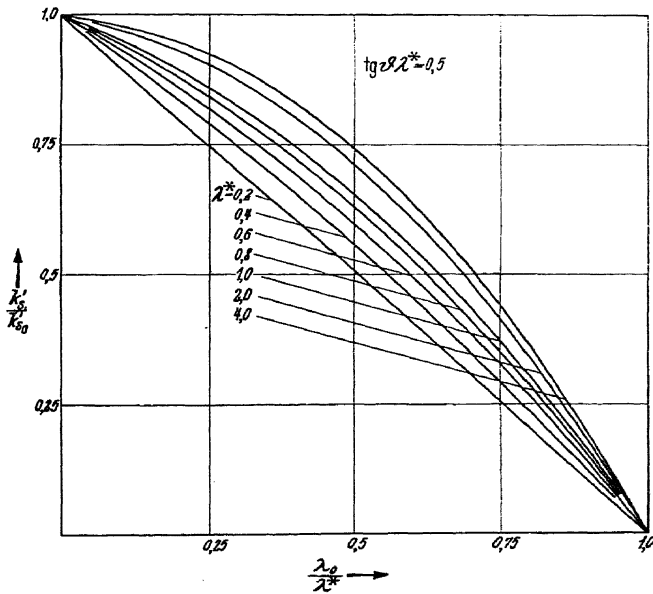



Abb. 166. Die Änderung der Schubziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}5$.

so daß

$$\frac{d\varLambda}{d\lambda}_{\lambda=\lambda^*} = \frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\vartheta}\left(\frac{\lambda^*(1-\mathrm{tg}^2\vartheta)}{\lambda^*-\mathrm{tg}\,\vartheta(1-2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*)} - \frac{2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*(1-\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*)(1+\mathrm{tg}^2\vartheta)}{(\lambda^*-\mathrm{tg}\,\vartheta(1-2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*))(\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta)}\right),$$

$$\frac{d\varLambda}{d\lambda}_{\lambda=\lambda^*} = \frac{\lambda^*\{(\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta)-2\,\mathrm{tg}\,\vartheta(1-\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*)\}}{(\lambda^*-\mathrm{tg}\,\vartheta(1-2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\lambda^*))(\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta)} = \frac{\lambda^*}{\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta}. \tag{16, 8}$$

Mit Hilfe von $\varLambda$ läßt sich schreiben (16, 4)

$$k_s = 4(\varLambda-\lambda)\varLambda = 4(\varLambda^2-\varLambda\lambda).$$

Somit wird

$$\frac{dk_s}{d\lambda} = 4\left(2\varLambda\frac{d\varLambda}{d\lambda} - \varLambda - \lambda\frac{d\varLambda}{d\lambda}\right)$$

und für $\lambda = \lambda^*$

$$\frac{dk_s}{d\lambda} = -4\lambda^*\left(1-\frac{d\varLambda}{d\lambda}\right) = -4\lambda^*\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta} \tag{16, 9}$$

und damit

$$k_s = -\frac{dk_s}{d\lambda}(\lambda^*-\lambda) = 4\lambda^*\frac{1}{1+\frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}}(\lambda^*-\lambda) = 4\lambda^{*2}\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}}. \tag{16, 10}$$

Die hiermit erzielte Annäherung ist von $\lambda/\lambda^* = 1$ bis herab zu mittleren λ/λ^* recht befriedigend, und zwar um so mehr, je kleiner λ^* und je größer $\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ ist (vgl. Abb. 162—166).

Der Wirkungsgrad ist (16, 2)

$$\eta = \lambda\left(\frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\varLambda} + \mathrm{tg}\,\vartheta\right).$$

Somit ist

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \left(\frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\varLambda} + \mathrm{tg}\,\vartheta\right) - \lambda\,\frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\varLambda^2}\cdot\frac{d\varLambda}{d\lambda}$$

oder für

$$\lambda = \lambda^*, \qquad \varLambda = \lambda^*, \qquad \frac{d\varLambda}{d\lambda} = \frac{\lambda^*}{\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta}.$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*} + \mathrm{tg}\,\vartheta - \frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta} = \mathrm{tg}\,\vartheta\left(1+\frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*(\lambda^*+\mathrm{tg}\,\vartheta)}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^{*2}}\,\frac{1+\lambda^{*2}}{1+\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*}} = \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda\lambda^*}\,\frac{1+\lambda^{*2}}{1+\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*}}.$$

Da aber für $\lambda = \lambda^*$ $\eta = 1$, wird

$$\eta = 1 - \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda\lambda^*}\,\frac{1+\lambda^{*2}}{1+\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*}}(\lambda^*-\lambda) = 1 - \frac{1+\lambda^{*2}}{1+\frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}}\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}-1\right).$$

Im späteren wird es sich als zweckmäßiger erweisen $\dfrac{d\frac{1}{\eta}}{d\lambda}$ zu berechnen.

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\lambda\left(\frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\varLambda} + \mathrm{tg}\,\vartheta\right)}.$$

Somit

$$\frac{d\frac{1}{\eta}}{d\lambda} = \frac{\lambda \frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\Lambda^2}\frac{d\Lambda}{d\lambda} - \frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\Lambda} - \mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^2\left(\frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\Lambda} + \mathrm{tg}\,\vartheta\right)^2}$$

Für $\lambda \to \lambda^*$ wird

$$\frac{d\frac{1}{\eta}}{d\lambda} = \frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^* + \mathrm{tg}\,\vartheta} - \frac{1-\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{\lambda^*} \cdot \mathrm{tg}\,\vartheta = -\frac{1}{\lambda^*}\,\frac{1+\lambda^{*2}}{1+\frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}} \qquad \frac{1}{\lambda}\,\frac{1+\lambda^{*2}}{1+\frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}}$$

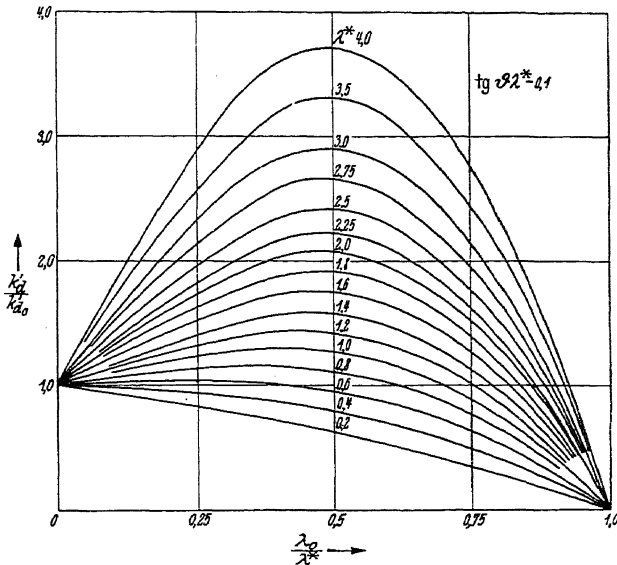



Abb. 167. Die Änderung der Leistungsziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta = 0,1$.

Die in Abb. 167—171 dargestellten Ergebnisse gelten auch für die Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40) $\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{}{1+\frac{\mathfrak{z}\,t_0}{4R}\,\frac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 23) erläutert.

und damit wegen $\eta \to 1$ für $\lambda \to \lambda^*$

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{}{1+\frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}}\left(\frac{\lambda^*}{\lambda} - 1\right).$$

Hierin wurde die Klammer $\left(\frac{\lambda^*}{\lambda} - 1\right)$ statt $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)$ geschrieben, weil damit für $\lambda \to 0$ $\eta \to 0$ wird und für $\lambda \to \lambda^*$ nichts wesentlich geändert wird. Man erreicht so, daß die Annäherung an das exakte Ergebnis

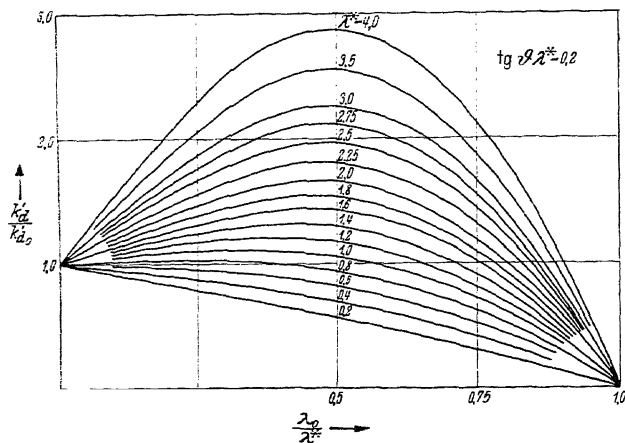



Abb. 168. Die Änderung der Leistungsziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta = 0{,}2$.

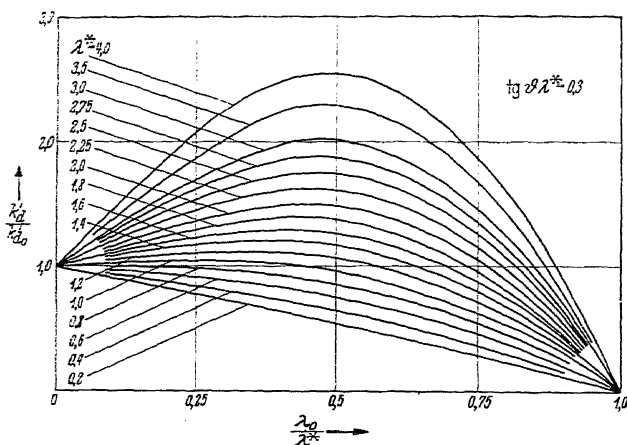



Abb. 169. Die Änderung der Leistungsziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta = 0{,}3$.

im ganzen Bereiche von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \lambda^*$ recht gut wird, und zwar um so mehr, je kleiner λ^* und je größer $\lambda^*\mathrm{tg}\,\vartheta$ ist (vgl. Abb. 157—161). Man kann also schreiben

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{1 + \lambda^{*2}}{1 + \frac{\lambda^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} - 1\right)} \qquad (16, 11)$$

Nunmehr können wir auch eine Näherungsgleichung für k_d aufstellen (11, 15)

$$k_d = \frac{\lambda}{\eta} k_s\,.$$

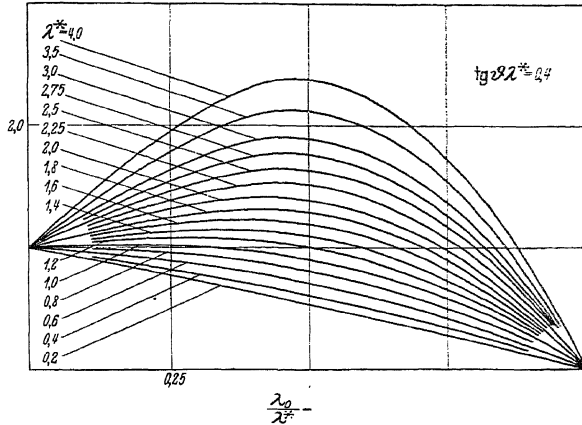



Abb. 170. Die Änderung der Leistungsziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0{,}4$.

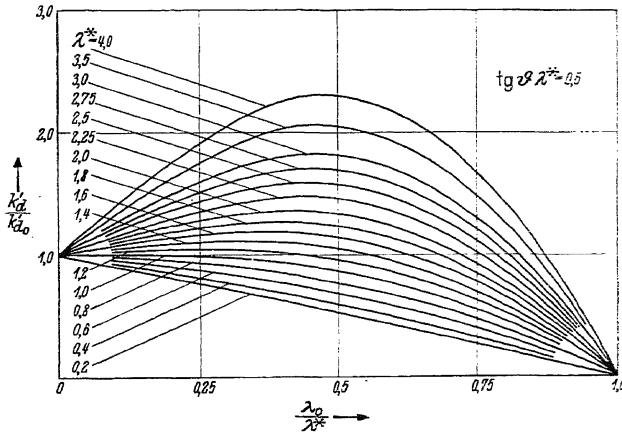



Abb. 171. Die Änderung der Leistungsziffer mit dem Fortschrittsgrad für $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = 0.5$.

Mit obigem wird

$$k_d = 4\,\lambda^{*3} \frac{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1 + \dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta}} \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \qquad \frac{1 + \lambda^{*2}}{1 + \dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\right). \tag{16, 12}$$

Auch die hiermit erzielte Annäherung ist von $\lambda/\lambda^* = 1$ bis herab zu mittlerem λ/λ^* recht befriedigend, und zwar um so mehr, je kleiner λ^* und je größer $\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta$ ist (vgl. Abb. 167—171).

e) Einfluß der Reibung. Bei Vorhandensein von Reibung wird die Anströmgeschwindigkeit w_∞ eines Flügelprofils auf das (13, 17)

$$\frac{}{w_{\infty_{id}}} = \frac{v_m}{v_{m_{id}}} = 1 - \varepsilon\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,\frac{1 - \eta_{id}}{1 + \dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{id}}}$$

fache vermindert. Das wirkt sich so aus, als wäre auch $\operatorname{tg}\vartheta$ vermindert. Mit (15, 8)

$$\operatorname{tg}\vartheta_{id} = \frac{1}{\lambda^*}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}\chi_{id}\sin\beta^*}}, \qquad \chi = \chi_{id}\cdot\left(\frac{w_\infty}{w_{\infty_{id}}}\right)^2$$

wird

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\lambda^*}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}\chi\sin\beta^*}} = \frac{1}{\lambda^*}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}\chi_{id}\sin\beta^*\cdot\left(\dfrac{w_\infty}{w_{\infty_{id}}}\right)^2}} \tag{16, 13}$$

und mit $\left(\dfrac{w_\infty}{w_{\infty_{id}}}\right)^2 = 1-\varDelta$

$$\frac{1}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta}} = \frac{1}{1+\lambda^{*2}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}\chi_{id}\sin\beta^*\left(\dfrac{w_\infty}{w_{\infty_{id}}}\right)^2}\right)} = \frac{1-\varDelta}{1-\varDelta\,(1+\lambda^{*2})+\lambda^{*2}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}\chi_{id}\sin\beta^*}\right)}$$

$$= \frac{1-\varDelta}{1-\varDelta\cdot(1+\lambda^{*2})+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}} \tag{16, 14}$$

oder in erster Näherung für $\varDelta\cdot(1+\lambda^{*2}) \ll 1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}$

$$\frac{1}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta}} \approx \frac{1}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}}(1-\varDelta) = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}}\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\,\frac{1-\eta_{id}}{1+\dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{id}}}\right)^2. \tag{16, 15}$$

Wenn man also den Einfluß der Reibung auf den Staudruck der Anströmgeschwindigkeit des Flügelprofils und damit auf den Auftrieb berücksichtigt, tritt an Stelle der Gleichungen (13, 19), (13, 20)

$$k_s \approx k_{s_{\varepsilon=0}}\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\right)\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\,\frac{1-\eta_{id}}{1+\dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{id}}}\right)^3. \tag{16, 16}$$

$$k_d \approx k_{d_{\varepsilon=0}}\left(1+\varepsilon\frac{\eta_{id}}{\lambda}\right)\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\,\frac{1-\eta_{id}}{1+\dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{id}}}\right)^3, \tag{16, 17}$$

also wegen Gleichung (16, 10) und Gleichung (16, 12) für kleinen Schlupf

$$k_s \approx 4\lambda^{*2}\,\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}}\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\right)\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\,\frac{1-\eta_{id}}{1+\dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{id}}}\right)^3, \tag{16, 18}$$

$$k_d \approx 4\lambda^{*3}\,\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}}\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1+\lambda^{*2}}{1+\dfrac{\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\right)\left(1+\varepsilon\frac{\eta_{id}}{\lambda}\right)\left(1-\varepsilon\frac{\lambda}{\eta_{id}}\,\frac{1-\eta_{id}}{1+\dfrac{\lambda_0^2}{\eta_{id}}}\right)^3. \tag{16, 19}$$

Es möge hier noch angeführt werden, daß die in diesem Abschnitt abgeleiteten Gleichungen unter den gemachten Voraussetzungen auch noch Geltung besitzen in den Bereich negativer Fortschrittsgrade ($\lambda_0 < 0$) hinein, der Bedeutung hat für die Verwendung der Luftschraube als Sturzflugbremse, vorausgesetzt, daß der Motor die Luftschraube entsprechend antreibt, wie auch in den Bereich der Fortschrittsgrade größer als der Nullschubfortschrittsgrad ($\lambda_0 > \lambda^*$) hinein. Zunächst ergibt sich hierbei wegen der Flügelblattreibung ein kleiner Bereich, in welchem die Schraube noch vom Motor angetrieben werden muß, also noch als Motorbremse wirkt, aber schon einen negativen Schub ergibt. Darüber hinaus wirkt jedoch die Luftschraube als Windturbine. Statt des in Gleichung (16, 2), (16, 11) angegebenen Luftschrauben-Wirkungsgrades kommt dann der Reziprokwert davon als Windturbinenwirkungsgrad in Betracht. Auch in diesem Bereich kann die Luftschraube als Sturzflugbremse dienen, solange der nunmehr vom Flugwind angetriebene Motor solche Bremswiderstände besitzt, daß die Drehzahlen für die Betriebssicherheit erträglich bleiben.

17. Verhalten am Stand.

a) Der Begriff des Gütegrades der Elementarschraube. Bei Reibungsfreiheit ist die Durchtrittsgeschwindigkeit $v_{m\infty}$ bei der Fortschrittsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ gleich der halben Austrittsgeschwindigkeit $v_a/2$ (12, 14)

$$v_{m\infty} = v_a/2\,, \tag{17, 1}$$

so daß der erzielte Schub dS_{id}

$$dS_{id} = \frac{\varrho}{2}\, v_a^2\, dF\,. \tag{17. 2}$$

Wäre die in der Schraube erzielte Zusatzgeschwindigkeit rein axial, so müßte zu ihrer Erzeugung die ideelle Leistung dN_{id} aufgebracht werden, welche sich aus dem zeitlichen Fördergewicht [kg/sec]

$$d\dot{G} = \gamma \cdot \frac{v_a}{2}\, dF$$

und der Förderhöhe [m]

$$H = \frac{v_a^2}{2g}$$

ergibt zu

$$dN_{id} = H\,d\dot{G} = \frac{\varrho}{4}\,\text{[illegible]}\,. \tag{17, 3}$$

Der Schub dS_{id} ist der größte mit der Leistung $dN = dN_{id}$ zu erzielende Schub. Eliminiert man die Austrittsgeschwindigkeit aus Gleichung (17, 2) und (17, 3), so ergibt sich

$$dS_{id} = 2^{1/3}\, \varrho^{1/3}\, (dF)^{1/3}\, (dN)^{2/3}\,. \tag{17, 4}$$

11*

Der tatsächlich erzeugte Schub dS ist kleiner. Man nennt [Lit. 54]

$$\frac{dS}{dS_{id}} = \zeta_s = \frac{dS}{2^{1/3}\varrho^{1/3}(dF)^{1/3}(dN)^{2/3}} = \zeta_l^{2/3} \tag{17, 5}$$

den Standschubgütegrad. Zur Erzeugung des Schubs dS braucht man mindestens die Leistung dN_{id}

$$dN_{id} = \frac{(dS)^{3/2}}{2^{1/2}\varrho^{1/2}(dF)^{1/2}}. \tag{17, 6}$$

Tatsächlich braucht man eine größere Leistung dN. Man nennt dann

$$\frac{dN_{id}}{dN} = \zeta_l = \frac{dS^{3/2}}{2^{1/2}\varrho^{1/2}(dF)^{1/2}dN} = \zeta_s^{3/2} \tag{17, 7}$$

den Standleistungsgütegrad. Unter Benutzung der Schubziffer (11, 13)

$$k_s = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2}u^2 dF}$$

und der Drehmoment- oder Leistungsziffer (11, 14)

$$k_d = \frac{dN}{\frac{\varrho}{2}u^3 dF}$$

ergibt sich also als Standschubgütegrad und als Standleistungsgütegrad

$$\zeta_s = \frac{1}{2^{2/3}}\frac{k_s}{k_d^{2/3}}, \tag{17, 8}$$

$$\zeta_l = \frac{1}{2}\frac{k_s^{3/2}}{k_d}. \tag{17, 9}$$

b) Berechnung des Standschubs und der Standleistung bei Reibungsfreiheit. Die Schubziffer k_s und die Leistungsziffer k_d für das Verhalten am Stand bekommen wir, wenn wir in den für k_s und k_d erhaltenen Gleichungen $\lambda = 0$ setzen.

Die oben eingeführte Größe Λ wird für $\lambda = 0$ (15, 19)

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\operatorname{tg}\vartheta(1 - 2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*)}{2(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}}}{1 - 2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*} - 1\right) \\ &= \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)}\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}} - 1 + 2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*\right) \text{ (Abb. 172).} \end{aligned}\right\} \tag{17, 10}$$

Wir erhalten also bei Reibungsfreiheit für $\lambda = 0$ (16,4), (16,5)

$$k_{s(\lambda=0)} = 4\Lambda^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}} - 1 + 2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*\right)^2, \tag{17, 11}$$

(Abb. 173),

$$\left.\begin{aligned} k_{d(\lambda=0)} &= 4\operatorname{tg}\vartheta(\lambda^* - \Lambda)\Lambda \\ &= \operatorname{tg}\vartheta\left\{2\lambda^*\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}} - 1 + 2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*\right)\right. \\ &\quad\left. - \frac{\operatorname{tg}^2\vartheta}{(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}} - 1 + 2\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*\right)^2\right\} \\ &\text{(Abb. 174)} \end{aligned}\right\} \tag{17, 12}$$

oder mit $4\Lambda^2 = k_s$, $2\Lambda = k_s^{1/2}$

$$k_{d(\lambda=0)} = \operatorname{tg}\vartheta\,(2\lambda^* k_s^{1/2} - k_s)\,. \tag{17,13}$$

Der Standschubgütegrad wird hiermit

$$\zeta_s = \frac{1}{2^{2/3}}\,\frac{k_s}{k_d^{2/3}} = \left\{\frac{k_s}{2\operatorname{tg}\vartheta\,(2\lambda^* - k_s^{1/2})}\right\}^{2/3} \tag{17,14}$$

und entsprechend der Standleistungsgütegrad

$$\zeta_l = \frac{1}{2}\,\frac{k_s^{3/2}}{k_d} = \frac{k_s}{2\operatorname{tg}\vartheta\,(2\lambda^* - k_s^{1/2})}\,. \tag{17,15}$$

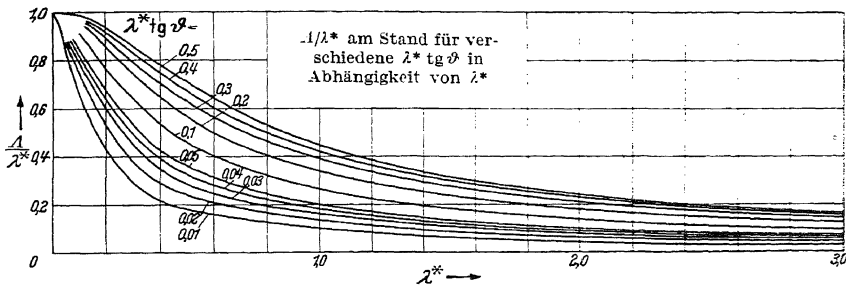



Abb. 172. Verhältnis Λ/λ^* der Durchflußgeschwindigkeit $v_{m\infty}$ am Stande durch die Schraubenkreisebene zur Nullschubfortschrittsgeschwindigkeit v^* bei der Elementarschraube.

Diese Ergebnisse gelten auch für die Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40)
$\lambda^* \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{\mathfrak{z}\, t_0}{4R}\,\dfrac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 23) erläutert.

Für manche Zwecke ist es besser, k_s und k_d durch α_∞ bzw. $\operatorname{cotg}\beta_\infty$ auszudrücken. Es ist mit $v_0 = 0$, $v_{m\infty} = v_a/2$ (11, 13), (11, 14)

$$k_s = 2\,\frac{v_a}{u}\cdot\frac{v_{m\infty}}{u} = \frac{v_a^2}{u^2}\,, \tag{17,16}$$

$$k_d = 2\,\frac{v_u}{u}\cdot\frac{v_{m\infty}}{u} = \frac{v_u\cdot v_a}{u^2}\,. \tag{17,17}$$

Es ist aber, wie man aus dem Geschwindigkeitsdiagramm für $\lambda_0 = 0$ leicht ersehen kann

$$\frac{v_a/2}{u} = \cos\beta_\infty \sin\beta_\infty\,, \qquad \frac{v_u/2}{u} = \sin^2\beta_\infty\,. \tag{17,18}$$

Also

$$k_s = 4\cos^2\beta_\infty \sin^2\beta_\infty\,, \qquad k_d = 4\cos\beta_\infty \sin^3\beta_\infty \tag{17,19}$$

oder mit

$$\cos\beta_\infty = \frac{\operatorname{cotg}\beta_\infty}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\beta_\infty}}\,, \qquad \sin\beta_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\beta_\infty}}\,,$$

$$k_s = 4\,\frac{\operatorname{cotg}^2\beta_\infty}{(1+\operatorname{cotg}^2\beta_\infty)^2}\,, \qquad k_d = 4\,\frac{\operatorname{cotg}\beta_\infty}{(1+\operatorname{cotg}^2\beta_\infty)^2}\,. \tag{17,20}$$

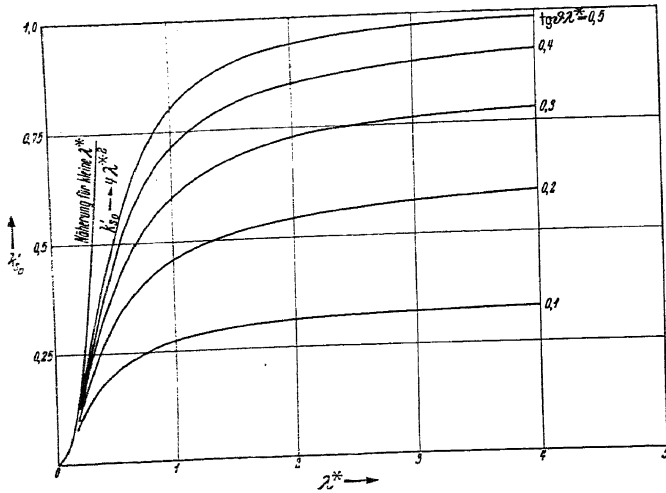



Abb. 173. Standschubziffer $k'_{s_0} = 4\lambda^{*2} \cdot \left(\frac{A}{\lambda^*}\right)^2$ der Elementarschraube in Abhängigkeit von Blattbreite und Steigungsgrad.

Diese Ergebnisse gelten auch für die Standschubziffer k_{s_0} der Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40) $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{\mathfrak{z}\, t_0}{4R} \cdot \frac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 30) erläutert. An Stelle von k'_{s_0} hat dabei $k_{s_0} \cdot \frac{\gamma'_{31}(\lambda^*)}{\gamma^{(\mathfrak{z})}_{31}(\lambda^*)}$ zu treten.

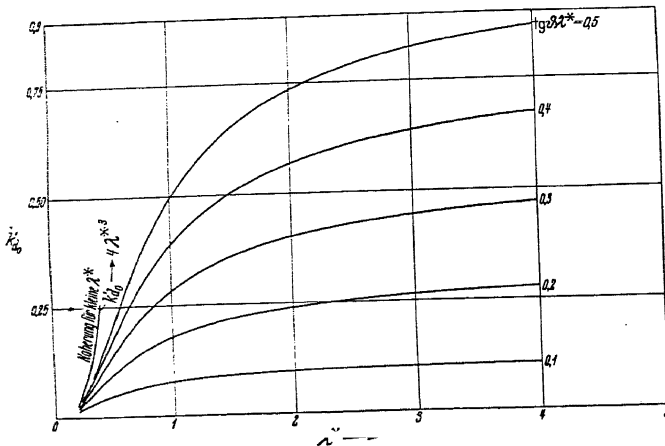



Abb. 174. Standleistungsziffer $k'_{d_0} = 4\lambda^* \cdot \operatorname{tg}\vartheta\, \lambda^* \cdot \left(1 - \frac{A}{\lambda^*}\right) \frac{A}{\lambda^*}$ der Elementarschraube in Abhängigkeit von Blattbreite und Steigungsgrad.

Diese Ergebnisse gelten auch für die Standleistungsziffer k_{d_0} der Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl $\mathfrak{z}$, wenn nach Gl. (29, 40) $\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{\mathfrak{z}\, t_0}{4R} \cdot \frac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}}}$ gesetzt wird. Die Bedeutung von t_0 wird durch Gl. (29, 23) erläutert. An Stelle von k'_{d_0} hat dabei $k_{d_0} \cdot \frac{\gamma'_{31}(\lambda^*)}{\gamma^{(\mathfrak{z})}_{31}(\lambda^*)}$ zu treten.

Es muß also für $\lambda_0 = 0$ gelten (17, 11), (17, 12)

$$\Lambda = \frac{\operatorname{cotg}\beta_\infty}{1 + \operatorname{cotg}^2\beta_\infty} = \sin\beta_\infty \cos\beta_\infty, \tag{17, 21}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta(\lambda^* - \Lambda) = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2\beta_\infty} = \sin^2\beta_\infty. \tag{17, 22}$$

Somit wird

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{\lambda^* - \sin\beta_\infty\cos\beta_\infty}{\sin^2\beta_\infty} = \lambda^*(1 + \operatorname{cotg}^2\beta_\infty) - \operatorname{cotg}\beta_\infty,$$

$$\operatorname{cotg}^2\beta_\infty - 2\operatorname{cotg}\beta_\infty \cdot \frac{1}{2\lambda^*} = \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{\lambda^*} - 1.$$

Die Auflösung ergibt

$$\operatorname{cotg}\beta_\infty = \frac{1}{2\lambda^*}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}}\right). \tag{17, 23}$$

Man kann aber $\operatorname{cotg}\beta_\infty$ auch direkt berechnen

Es ist (15, 25), (14, 32)

$$\sin\alpha_\infty = \sin(\beta^* - \beta_\infty),$$

$$\sin\alpha_\infty = \frac{4r}{3kt}\cdot\frac{\frac{v_u}{2}}{w_\infty} = \frac{\sin\beta^*}{q}\,\frac{\frac{v_u/2}{u}}{w_\infty/u} = \frac{\sin\beta^*}{q}\,\frac{\sin^2\beta_\infty}{\cos\beta_\infty} \qquad \left(q = \frac{3kt}{4r}\sin\beta^*\right).$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten dieser Gleichungen erhält man

$$\sin\beta^*\cos\beta_\infty - \cos\beta^*\sin\beta_\infty = \frac{\sin\beta^*}{q}\,\frac{\sin^2\beta_\infty}{\cos\beta_\infty},$$

$$\operatorname{cotg}^2\beta_\infty - \operatorname{cotg}\beta^*\operatorname{cotg}\beta_\infty = \frac{1}{q}.$$

$$\operatorname{cotg}\beta_\infty = \frac{\operatorname{cotg}\beta^*}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{q\operatorname{cotg}^2\beta^*}}\right) = \frac{1}{2\lambda^*}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda^{*2}}{q}}\right). \tag{17, 24}$$

Es ist (15, 8)

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \lambda^*\left(1 + \frac{1}{q}\right), \qquad \operatorname{cotg}\vartheta - \lambda^* = \frac{\lambda^*}{q}.$$

Somit wie oben (17, 23)

$$\operatorname{cotg}\beta_\infty = \frac{1}{2\lambda^*}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}}\right).$$

Für $\lambda = 0$ ist also die oben eingeführte Größe Λ (17, 10)

$$\Lambda = \frac{\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*}{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}\left(\operatorname{cotg}\beta_\infty - \frac{1}{\lambda^*} + \operatorname{tg}\vartheta\right). \tag{17, 25}$$

Da für sehr kleine Steigungen λ^{*2} sehr klein und dann $\operatorname{tg}\vartheta \gg \lambda^*$, so kann man hierbei

$$\sqrt{1 + \frac{4\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta} - 4\lambda^{*2}} = 1 + \frac{2\lambda^*}{\operatorname{tg}\vartheta},$$

$$\operatorname{cotg}\beta_\infty = \frac{1}{\lambda^*} + \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}$$

setzen. Damit wird für kleine λ^*

$$\Lambda = \frac{\operatorname{tg}\vartheta\,\lambda^*}{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta\right) = \lambda^*. \tag{17, 26}$$

Es wird also für sehr kleine λ^*, eine genügend große Profiltiefe, d. h. auch ϑ vorausgesetzt, Λ unabhängig von ϑ. Die Schubziffer wird also für kleine λ^* am Stande

$$k_s = 4\,\lambda^{*2}\,. \tag{17,27}$$

Da bei Reibungsfreiheit $\zeta_l = 1$ wird, so muß die Leistungsziffer für kleine λ^* am Stande

$$k_d = \frac{1}{2\,\zeta_l} \cdot k_s^{3/2} = 4\,\lambda^{*3} \tag{17,28}$$

sein. Dies Ergebnis ist darauf zurückzuführen, daß mit zunehmender Blattbreite gleichzeitig der Anstellwinkel sich verringert, so daß bald die obigen als Grenzwerte aufzufassenden Werte erzielt werden.

c) **Einfluß der Reibung auf Standschub und Standleistung.** Durch den Einfluß der Reibung wird der Standschub verringert und die Standleistung vermehrt. Es ist für $\lambda_0 = 0$ (16,16), (16,17)

$$k_s = k_{s(\varepsilon=0)}\left(1 - \varepsilon\,\frac{k_{d(\varepsilon=0)}}{k_{s(\varepsilon=0)}}\right)^4, \tag{17,29}$$

$$k_d = k_{d(\varepsilon=0)}\left(1 + \varepsilon\,\frac{k_{s(\varepsilon=0)}}{k_{s(\varepsilon=0)}}\right)\left(1 - \varepsilon\,\frac{k_{d(\varepsilon=0)}}{k_{s(\varepsilon=0)}}\right)^3. \tag{17,30}$$

Mit (17,11), (17,12)

$$k_{s_{id}} = 4\,\Lambda^2\,, \qquad k_{d_{id}} = 4\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{id}(\lambda^* - \Lambda)\,\Lambda$$

wird also

$$k_s = 4\,\Lambda^2\left(1 - \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{id}\left(\frac{\lambda^*}{\Lambda} - 1\right)\right)^4, \tag{17,31}$$

$$k_d = 4\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{id}(\lambda^* - \Lambda)\,\Lambda\left(1 + \frac{\varepsilon}{\mathrm{tg}\,\vartheta_{id}\left(\frac{\lambda^*}{\Lambda} - 1\right)}\right)\left(1 - \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_{id}\left(\frac{\lambda^*}{\Lambda} - 1\right)\right)^3. \tag{17,32}$$

E. Die Wirkung einer Leitvorrichtung.

18. Allgemeine theoretische Untersuchung.

a) **Der Zweck von Leitvorrichtungen.** Da insbesondere bei größeren Belastungen und Fortschrittsgraden der Drallverlust beachtlich ist, so besteht der Wunsch, diese Verluste nach Möglichkeit zu vermeiden. Zur Erzeugung eines Schubs ist ja an sich nur eine axiale Vermehrung der Geschwindigkeit nötig und die Erzeugung von Geschwindigkeitsanteilen in Umfangsrichtung ist nur auf die Unvollkommenheit der Wirkungsweise einer einzelnen Schraube zurückzuführen. Durch eine Leitvorrichtung können diese Umfangskomponenten aber ebenfalls zur Erzeugung des Schubs mitherangezogen werden, indem durch sie entweder die drallbehaftete Strömung nach dem Austritt aus der Schraube in rein axiale Richtung umgelenkt wird — Austrittsleitvorrichtung — oder indem der drallfrei ankommenden Strömung vor dem Eintritt in

die Schraube schon ein Gegendrall erteilt wird, so daß die Strömung die Schraube drallfrei verlassen kann — Eintrittsleitvorrichtung (vgl. Abb. 175) —. Die Anbringung einer Austrittsleitvorrichtung ist insbesondere denkbar bei einem Flugzeug mit Zugschraube, die einer Eintrittsleitvorrichtung insbesondere beim Flugzeug mit Druckschraube.

Der Zweck der Leitvorrichtung ist aber unter Umständen nicht so sehr die Nutzbarmachung sonst verlorener Austrittsenergie für den Schub, als vielmehr die Aufhebung des freien Luftschraubenmomentes, welches ja ein Rollmoment darstellt.

In gewisser Weise stellt schon ein im Bereiche des Schraubenstrahles befindlicher Tragflügel eine Leitvorrichtung dar, der allerdings im allgemeinen in dieser Hinsicht nur unvollkommen wirkt, wenn er nicht durch dem Schraubenstrahl entsprechende unsymmetrische Verwindung als Leitvorrichtung ausgebildet wird. Auch durch eine entsprechende Verwindung des Leitwerks kann das freie Schraubenmoment ausgeglichen werden, so daß auch dieses als Leitvorrichtung ausgebildet sein kann. Allerdings kann im letzteren Falle der Erfolg nicht sicher vorausberechnet werden wegen der vielen Nebeneinflüsse und wegen des großen Abstandes von der Schraube.

Abb. 175. Erläuterung der Wirkung einer Leitvorrichtung. a) Strömung bei fehlender Leitvorrichtung: Zufluß ohne Drall, Abfluß mit Drall. b) Strömung unter Wirkung einer Austrittsleitvorrichtung: Durch die Schraube wird der Strömung ein Drall erteilt und durch die Austrittsleitvorrichtung wieder entzogen. c) Strömung unter Wirkung einer Eintrittsleitvorrichtung: Durch die Eintrittsleitvorrichtung wird der Strömung ein Gegendrall erteilt und durch die Schraube wieder entzogen.

Eine weitere Möglichkeit, das Drehmoment auszugleichen und die Drallverluste zu vermeiden, besteht in der Benutzung gegenläufiger Schrauben. Darüber hinaus geben gegenläufige Schrauben auch die Möglichkeit, freie Kreiselmomente zu vermeiden, da bei gleicher entgegengesetzter Drehzahl und gleichem polarem Trägheitsmoment die einzelnen Kreiselmomente gerade entgegengesetzt gleich werden und so nach außen hin wirkungslos bleiben.

b) Die Möglichkeiten theoretischer Untersuchung. Der theoretischen Untersuchung sind im wesentlichen zwei Grenzfälle zugänglich, auf die wir uns hier auch beschränken wollen. Der eine Grenzfall ist der, daß Schraube und Leitvorrichtung so eng zusammenliegen, daß in ihrem Bereich eine Vermehrung der axialen Durchflußgeschwindigkeit unberücksichtigt bleiben kann. Der andere Grenzfall ist der, daß Schraube und Leitvorrichtung soweit auseinanderliegen, daß beide für sich allein untersucht werden können und der Zufluß zu dem hinteren Teil des Systems nur entsprechend geändert erscheint. Gerade die Untersuchung dieses Grenzfalles wird sich als besonders einfach erweisen.

Im allgemeinen erweist es sich als im Prinzip gleich, ob das System aus einer Schraube und einer Leitvorrichtung besteht oder aus zwei mit gleicher Drehzahl gegenläufigen Schrauben. Auch die Untersuchung eines Schraubenpaares verschiedener Drehzahl und auch in gleichem Drehsinne umlaufender Schrauben erweist sich in den gegebenen Grenzfällen als recht einfach. Im folgenden wird daher zunächst einmal das Grundsätzliche beim allgemeinsten Fall verschieden schnell gegenläufiger Schrauben und bei nicht vollkommenem Drehmomentenausgleich behandelt [Lit. 196].

c) Gegenläufige Schrauben in großem gegenseitigem Abstand. Wir können die Vorgänge in einem gegenläufigen Elementarschraubenpaare großen gegenseitigen Abstandes wieder recht gut durch ihr Geschwindigkeitsdiagramm veranschaulichen. Die Geschwindigkeiten der durch die vordere Schraube bedingten Strömung mögen mit dem Index *I*, die Geschwindigkeiten der durch die hintere Schraube bedingten Strömung mögen mit dem Index *II* gekennzeichnet werden.

Am Geschwindigkeitsdiagramm der vorderen Schraube wird wegen des großen Abstandes von der hinteren Schraube nichts geändert. Wir wollen zunächst von der Reibung absehen. Der Druck in der Mitte zwischen beiden Schrauben, also weit hinter der vorderen und weit vor der hinteren Elementarschraube ist gleich dem Druck der ruhenden Luft. $p_{I3} = p_{II0} = p_0$. Weit hinter der hinteren Elementarschraube ist der Druck wieder gleich dem der ruhenden Luft. Nach der Druckgleichung muß also sein

$$p_{II0} + \frac{\varrho}{2} w_{II0}^2 - \frac{\varrho}{2} u_{II0}^2 = p_{II3} + \frac{\varrho}{2} w_{II3}^2 - \frac{\varrho}{2} u_{II3}^2 \quad (p_{II3} = p_{II0} = p_0). \quad (18,1)$$

Es ist aber für die Elementarschraube $u_{II0}^2 = u_{II3}^2$, so daß sich also auch für die hintere Schraube

$$w_{II0} = w_{II3} \quad (18,2)$$

ergibt.

Im Geschwindigkeitsdiagramm (Abb. 176) liegt also der Endpunkt von $\mathfrak{w}_{II3}$ auf einem Kreise mit dem Radius w_{II0} um den Endpunkt

von $\mathfrak{u}_{II}$. Für die weiteren Betrachtungen über die Relativgeschwindigkeiten gilt nun weiter das gleiche wie für die der vorderen Schraube. Es ist also

$$\mathfrak{w}_{II\infty} = \mathfrak{w}_{II0} + \mathfrak{w}_{L} \qquad (18,3)$$

und deshalb auch

$$\mathfrak{v}_{II\infty} = \frac{\mathfrak{v}_{II0} + \mathfrak{v}_{II3}}{2}. \qquad (18,4)$$

Der Schub dS_{II} bzw. das Drehmoment $dM_{d_{II}}$ der hinteren Schraube ist

$$dS_{II} = \varrho v_{m_{II}\infty} \cdot v_{a_{II}} \cdot dF_{II}, \qquad (18,5)$$

$$dM_{d_{II}} = \varrho v_{m_{II}\infty} \cdot v_{u_{II}} \cdot dF_{II} \cdot r_{II}. \qquad (18,6)$$

Es muß aber sein

$$v_{m_{II}} dF_{II} = v_{m_I} dF_I, \qquad (18,7)$$

wenn durch die hintere Elementarschraube die gleiche Menge strömen soll wie durch die vordere.

Abb. 176. Geschwindigkeitsdiagramm eines gegenläufigen Schraubenpaars großen Abstandes bei ungleicher Drehzahl und nicht ausgeglichenem Drehmoment. Im Beispiel überwiegt das Drehmoment der hinteren Schraube.

Da (11,10)

$$dM_{d_I} = \varrho v_{m_I\infty} \cdot v_{u_I} \cdot dF_I \cdot r_I,$$

wird wegen $r_{II} = r_I$ ein Momentenausgleich erzielt, wenn

$$\mathfrak{v}_{u_{II}} = -\mathfrak{v}_{u_I} \qquad (18,8)$$

ist. Abb. 177 zeigt also ein Geschwindigkeitsdiagramm für vollkommenen Momentenausgleich. Bei gleicher Drehzahl ist die in der hinteren Schraube in diesem Falle aufzubringende Leistung gleich der in der vorderen Schraube aufzubringenden. Der Schub dS_{II} der hinteren Schraube ist bei vollem Momentenausgleich aber etwas kleiner als der Schub dS_I der vorderen Schraube. Es ist

$$\frac{dS_{II}}{dS_I} \quad \frac{v_{a_{II}}}{v_{a_I}} \qquad (18,9)$$

Abb. 177. Geschwindigkeitsdiagramm eines gegenläufigen Schraubenpaars großen Abstandes bei Ausgleich des Drehmomentes.

Da bei gleicher Leistung der Schub der hinteren Schraube kleiner ist als der der vorderen, hat also die hintere Schraube einen kleineren Wirkungsgrad als die vordere. Dennoch wird der Gesamtwirkungsgrad der gegenläufigen Schrauben besser als der einer einzelnen Schraube bei gleichem Gesamtschub.

Dies gilt auch bei unvollkommenem und übermäßigem Momentenausgleich. Der Wirkungsgrad ist (11,20)

$$\eta = \frac{v_0\, dS}{\dot{E}} = \frac{}{1 + \frac{v_a^2 + v_{u_{II}}^2}{2 v_a v_0}}$$

Er ist um so größer bei gegebenem $v_a = v_{aI} + v_{aII}$ bzw. c_s, je kleiner $v_{u_{II3}}$ ist.

d) Gegenläufige Schrauben in kleinem gegenseitigem Abstand. Wenn die Schraubenkreisebenen der gegenläufigen Schrauben nur geringen Abstand voneinander haben, so ändert sich während des Durchströmens die mittlere Axialkomponente v_m nicht und der Schub dS eines Paares gegenläufiger Elementarschrauben kann berechnet werden aus (11,9)

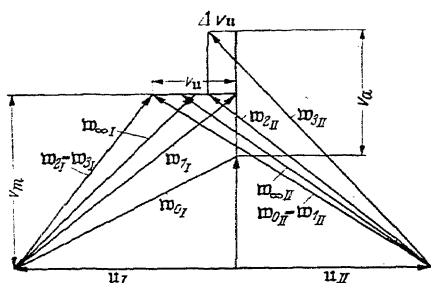



Abb. 178. Die Strömungsverhältnisse bei einem gegenläufigen Schraubenpaar kleinen Abstandes bei ungleicher Drehzahl und nicht ausgeglichenem Drehmoment. Im Beispiel überwiegt das Drehmoment der vorderen Schraube.

$$\left.\begin{aligned} dS &= \varrho\, v_m v_a\, dF \\ (dF &= 2\pi r\, dr)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (18,10)$$

wenn v_a die gesamte Zunahme der Axialgeschwindigkeit der Strömung weit hinter dem Schraubenpaare gegenüber der Axialgeschwindigkeit weit davor ist (vgl. Abb. 178).

Der Schub kann aber auch berechnet werden aus den Druckunterschieden zwischen Vor- und Rückseite einer jeden der Elementarschrauben. Der Druckunterschied Δp_I, der auf die vordere Schraube wirkt, ist

$$\Delta p_I = \frac{\varrho}{2}(w_{1_I}^2 - w_{2_I}^2) = \frac{\varrho}{2}(w_{u_1 I}^2 - w\text{[illegible]} \qquad (18,11)$$

Der Druckunterschied Δp_{II}, der auf die hintere Schraube wirkt, ist

$$\Delta p_{II} = \frac{\varrho}{2}(w_{1_{II}}^2 - w_{2_{II}}^2) = \frac{\varrho}{2}(w_{u_1 II}^2 - w_{u_2 II}^2)\,. \qquad (18,12)$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} w_{u_1 I}^2 &= u_I^2\,, \\ w_{u_2 I}^2 &= (u_I - v_u)^2 = u_I^2 - 2\,u_I v_u + v_u^2\,, \\ w_{u_1 II}^2 &= (-u_{II} - v_u)^2 = u_{II}^2 + 2\,u_{II} v_u + v_u^2\,. \\ w_{u_2 II}^2 &= (-u_{II} - \Delta v_u)^2 = u_{II}^2 + 2\,u_{II}\,\Delta v_u + \Delta v_u^2\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_{u_0 I} &= v_{u_1 I} = 0\,, \\ v_{u_3 I} &= v_{u_1 II} = v_u\,, \\ v_{u_2 II} &= v_{u_3 II} = \Delta v_u \end{aligned} \qquad (18,13)$$

Mit

$$\Delta p = \Delta p_I + \Delta p_{II}$$

als Gesamtdruckunterschied wird

$$dS = \Delta p\, dF = \frac{\varrho}{2}\{[2\,u_I v_u - v_u^2] + [2\,u_{II}(v_u - \Delta v_u) + (v_u^2 - \Delta v_u^2)]\}\, dF\,.$$

$$dS = \frac{\varrho}{2}\{2\,(u_I + u_{II})\, v_u - 2\,u_{II}\,\Delta v_u - \Delta v_u^2\}\, dF\,. \qquad (18,14)$$

Die aufgewandte Leistung dN setzt sich aus der Leistung in der vorderen Schraube dN_I und aus der Leistung in der hinteren Schraube dN_{II} zusammen. Es ist

$$dN_I = \varrho\, v_m v_u u_I\, dF\,, \qquad (18,15)$$

$$dN_{II} = \varrho\, v_m\, (v_u - \Delta v_u)\, u_{II}\, dF\,. \qquad (18,16)$$

Also wird

$$dN = dN_I + dN_{II} = \varrho\, v_m (v_u u_I + v_u u_{II} - \varDelta v_u u_{II})\, dF\,. \quad (18,17)$$

Der Wirkungsgrad ergibt sich hiermit zu (11,4)

$$\eta = \frac{v_0\, dS}{dN} = \frac{v_u u_I + v_u u_{II} - \varDelta v_u u_{II} - \dfrac{\varDelta v_u^2}{2}}{v_u u_I + v_u u_{II} - \varDelta v_u u_{II}} \cdot \frac{v_0}{v_m}\,,$$

$$\eta = \left(1 - \frac{\varDelta v_u^2}{2\,(v_u u_I + v_u u_{II} - \varDelta v_u u_{II})}\right) \cdot \frac{v_0}{v_m}\,. \quad (18,18)$$

Der Wirkungsgrad ist aber auch (11,20)

$$\eta = \frac{v_0\, dS}{dN} = \frac{1}{1 + \dfrac{v_a^2 + \varDelta v_u^2}{2\, v_a v_0}}\,.$$

Der Wirkungsgrad ist bei gegebenem v_a bzw. c_s, wie zu erwarten, um so größer, je kleiner $\varDelta v_u$ ist. Aus (11,4), (18,10), (18,17) ergibt sich

$$v_u u_I + v_u u_{II} - \varDelta v_u u_{II} = \frac{dN}{\varrho\, v_m\, dF} = \frac{v_0\, dS}{\varrho\, v_m\, \eta\, dF} = \frac{v_0 v_a}{\eta}\,. \quad (18,19)$$

Aus (11,20) ergibt sich

$$\varDelta v_u^2 = \frac{2\, v_a v_0}{\eta} - (2\, v_a v_0 + v_a^2)\,. \quad (18,20)$$

Somit gilt mit (18,18), (18,19)

$$\eta = \left(1 - \frac{\dfrac{2\, v_a v_0}{\eta} - (2\, v_a v_0 + v_a^2)}{\dfrac{2\, v_a v_0}{\eta}}\right) \frac{v_0}{v_m} = \eta \left(1 + \frac{v_a}{2\, v_0}\right) \cdot \frac{v_0}{v_m}\,. \quad (18,21)$$

Es ist also

$$\frac{v_m}{v_0} = 1 + \frac{v_a}{2\, v_0}\,; \qquad v_m = v_0 + \frac{v_a}{2}\,. \quad (18,22)$$

Bei Vernachlässigung der Reibung ergibt sich also, daß die Axialkomponente der Durchflußgeschwindigkeit durch den Schraubenkreis gleich dem Mittelwert der Axialkomponente der Zufluß- und der Abflußgeschwindigkeit ist. Dies Ergebnis ist unabhängig davon, ob das System aus Schraube und Leitvorrichtung oder aus zwei beliebig schnell gegenläufigen Schrauben besteht. Auch die Größe des Drehmomentausgleichs spielt dabei keine Rolle.

Ist $\varDelta v_u = 0$, so ist das Drehmoment ausgeglichen. Ist $u_I = u_{II} = u$, so wird (18,11), (18,12), (18,15), (18,16)

$$\begin{aligned} dS_I &= \frac{\varrho}{2} (2\, u v_u - v_u^2)\, dF\,; \qquad dN_I = \varrho\, u\, v_m v_u\, dF\,; \\ dS_{II} &= \frac{\varrho}{2} (2\, u v_u + v_u^2)\, dF\,; \qquad dN_{II} = \varrho\, u\, v_m v_u\, dF\,; \end{aligned} \quad (18,23)$$

somit

$$dS_I < dS_{II}\,,$$
$$dN_I = dN_{II}\,.$$

Der Wirkungsgrad der hinteren Schraube wird also bei kleinem gegenseitigem Abstand besser als der der vorderen Schraube, was also dem Verhalten bei großem Abstand entgegengesetzt ist.

e) **Strömungsverhältnisse bei feststehender Leitvorrichtung.** Bei großer wie bei kleiner Entfernung zwischen Schraube (S) und Leitvorrichtung (L) gilt bezüglich des Geschwindigkeitsdiagramms das gleiche wie bei gegenläufigen Schrauben, welche in dieser Hinsicht selbst als sich drehende Leitvorrichtungen aufzufassen sind. Da die Leitvorrichtung sich aber nicht dreht, ist die in ihr aufzubringende Leistung $dN_L = 0$. Die Definition einer Schubziffer und einer Leistungsziffer ist wegen $u = 0$ sinnlos. Zur Kennzeichnung von Schub und Drehmoment muß man also Schubbelastungsgrad c_{s_L} und Drehmomentbelastungsgrad c_{d_L} verwenden:

$$c_{s_L} = \frac{dS_L}{\frac{\varrho}{2} v^2 2\pi r\,dr}, \tag{18, 24}$$

$$c_{d_L} = \frac{dM_{d_L}}{\frac{\varrho}{2} v^2 \cdot 2\pi r\,dr}. \tag{18, 25}$$

Der Schub dS_L ist entsprechend Abb. 179 und 180 bzw. Abb. 181 und 182 bei vollem Momentenausgleich bei weitem Abstand

$$dS_L = \pm \varrho\, v_{m_L} v_{a_L}\, dF_L, \tag{18, 26}$$

bei engem Abstand

$$dS_L = \pm \frac{\varrho}{2} v_u^2\, dF_L. \tag{18, 27}$$

Das Moment dM_{d_L} ist dabei

$$dM_{d_L} = \frac{dN_s}{\omega_s} = \varrho\, v_{m_L} v_u\, dF_L \qquad (v_{m_L} dF_L = v_{m_s} dF_s). \tag{18, 28}$$

Liegt die Leitvorrichtung hinter der Schraube, so muß in ihrem Bereiche die Strömung verzögert werden (vgl. Abb. 179 und Abb. 181). Der Schub dS_L ist dann positiv. Liegt die Leitvorrichtung aber vor der Schraube, so muß die Strömung in ihr beschleunigt werden (vgl. Abb. 180 und Abb. 182) und der von ihr herrührende Schub dS_L ist negativ. Obwohl in diesem Falle die Strömung in der Schraube selbst etwas weniger verzögert werden muß bei gleicher aufgebrachter Leistung dL, als wenn die Leitvorrichtung dahinter läge, so ist doch bei Reibungsfreiheit der Gesamtschub des Systems Schraube—Leitvorrichtung bei gleichem Ausgleich des Drehmomentes und bei gleicher Leistung gleich dem des Systems Leitvorrichtung—Schraube. Der auf die Leitvorrichtung wirkende Schub ist also als eine innere Kraft aufzufassen.

Strömungstechnisch ist jedoch zwischen beiden Anordnungen ein Unterschied, der bei größerer Belastung, z. B. in Nähe der Stand-

verhältnisse, beachtlich werden kann. Das System Leitvorrichtung—Schraube neigt wegen der relativen Beschleunigung in der Leitvorrichtung und der verringerten relativen Verzögerung in der Schraube weniger zu Ablösung als das System Schraube—Leitvorrichtung, wo die Strömung relativ nur verzögert wird.

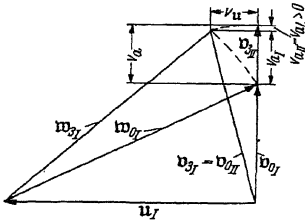



Abb. 179. Geschwindigkeitsdiagramm einer Schraube mit fester Austrittsleitvorrichtung bei großem Abstand und Ausgleich des Drehmomentes.

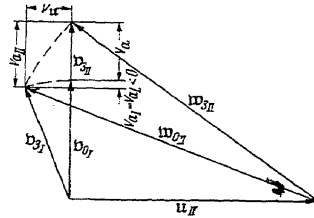



Abb. 180. Geschwindigkeitsdiagramm einer Schraube mit fester Eintrittsleitvorrichtung bei großem Abstand und Ausgleich des Drehmomentes.

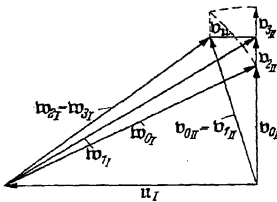



Abb. 181. Geschwindigkeitsdiagramm einer Schraube mit fester Austrittsleitvorrichtung bei kleinem Abstand und Ausgleich des Drehmomentes.

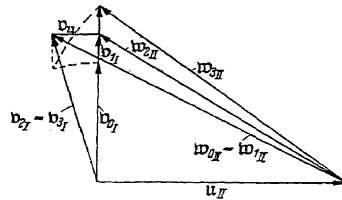



Abb. 182. Geschwindigkeitsdiagramm einer Schraube mit fester Eintrittsvorrichtung bei kleinem Abstand und Ausgleich des Drehmomentes.

f) Die Vermehrung des Schubs einer Schraube durch eine Leitvorrichtung bei vollkommenem Momentenausgleich. Bei gleicher aufgewandter Leistung ist die verhältnismäßige Vermehrung des Schubs bei Reibungsfreiheit gegeben durch

$$\frac{d S_{i d}}{d S_{\text{einzel } i d}} = \frac{1}{\eta_d} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - k_s}} .$$

Für kleine k_s ist

$$\frac{d S_{i d}}{d S_{\text{einzel } i d}} = \frac{2}{2 - k_s/2} = \frac{1}{1 - k_s/4} = 1 + \frac{k_s}{4} .$$

Die Vermehrung ist also angenähert

$$\frac{\Delta d S_{i d}}{d S_{i d}} = \frac{k_s}{4} . \qquad (18, 29)$$

Der Hauptzweck von sich drehenden oder festen Leitvorrichtungen kann also nicht der der Verbesserung des Wirkungsgrades sein, da diese bei Luftschrauben im allgemeinen nur klein sein wird wegen der Kleinheit der Schubziffer der zur Verwendung kommenden Schrauben.

Die Verwendung der Reibungswiderstand verursachenden Oberflächen dürfte zudem diesen Schubgewinn häufig wieder aufheben.

Erst bei Schrauben großen Fortschrittsgrades, also bei weiterer Steigerung der Fluggeschwindigkeit, dürfte der Schubgewinn beachtlich werden.

19. Gegenläufige Elementarschrauben gleicher Drehzahl bei großem gegenseitigem Abstand.

a) Die zu gegebenem Fortschrittsgrad und Schubziffer gehörige gegenläufige Elementarschraube vollkommenen Drehmomentenausgleichs. Bei Reibungsfreiheit gilt bei Drehmomentenausgleich

$$\eta = \eta_a = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}}. \tag{19,1}$$

Der Schubbelastungsgrad ist, wenn man in Analogie zur einfachen Schraube $v_0 + v_a/2 = v_m$ setzt

$$c_s = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 \, dF} = \frac{v_a}{v_0} \cdot \frac{v_m}{v_0} = 2 \frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right), \tag{19,2}$$

also

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1.$$

Hiermit wird

$$\frac{v_m}{v_0} = 1 + \frac{v_a}{2 v_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + c_s}\right) = \frac{1}{\eta_a} = \frac{1}{\eta}.$$

v_m ist also auch als axiale Durchflußgeschwindigkeit durch die gegenläufige Elementarschraube großen gegenseitigen Abstandes aufzufassen.

Die Schubziffer ist

$$k_s = c_s \lambda^2 = 2 \frac{v_a}{u} \cdot \frac{v_m}{u}. \tag{19,3}$$

Die Leistungsziffer wird

$$k_d = 4 \frac{v_u}{u} \cdot \frac{v_m}{u}, \tag{19,4}$$

oder auch

$$k_d = \frac{\lambda}{\eta} k_s = \frac{\lambda^3}{\eta} c_s, \tag{19,5}$$

also

$$k_d = \frac{\lambda^3 c_s \left(1 + \sqrt{1 + c_s}\right)}{2}. \tag{19,6}$$

Statt v_u durch geometrische Konstruktion entsprechend Abb. 177 zu bestimmen, läßt sich v_u auch errechnen. Es ist nach Gleichung (19,4), (19,5)

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_d}{4} \cdot \frac{u}{v_m} = \frac{k_s}{4} \cdot \frac{\lambda}{\eta} \cdot \frac{u}{v_0} \cdot \frac{v_0}{v_m}$$

oder wegen

$$\frac{v_0}{u} = \lambda, \qquad \frac{v_0}{v_m} = \eta,$$

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_s}{4} = \frac{\lambda^2 c_s}{4}, \qquad \frac{v_u}{v_n} = \frac{\lambda c}{4} \tag{19,7}$$

Da im allgemeinen v_u/u bzw. v_u/v_0 nur klein ist, ist die Rechnung der zeichnerischen Ermittlung vorzuziehen.

b) Das Verhalten bei Änderung des Betriebszustandes. Bei Änderung des Fortschrittsgrades ist natürlich nicht zu erwarten, daß der Momentenausgleich vollkommen erhalten bleibt. Es soll daher hier untersucht werden, wie sich Schub und Moment bei Änderung des Fortschrittsgrades ändern.

Die Änderung der Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{I\infty}$ der vorderen Schraube ist wieder gegeben durch die gleiche Gerade wie $\mathfrak{w}_\infty$ bei der Einzelschraube. Damit ist die Änderung der Abflußgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{I3}$ aus der vorderen Schraube und damit die Zuflußgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{II0}$ zur hinteren Schraube durch die gleiche Hyperbel wie bei der Einzelschraube gegeben.

Die Konstruktion der Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{II\infty}$ der hinteren Schraube (vgl. Abb. 183) ist die gleiche wie bei der vorderen Schraube. Der entsprechende Ort für $\mathfrak{w}_{II\infty}$ ist aber nicht wie bei $\mathfrak{w}_{I\infty}$ eine Gerade mehr, auch keine Hyperbel wie bei $\mathfrak{w}_{I3}$, sondern eine Kurve höherer Ordnung. Aus dem Ort für $\mathfrak{w}_{II\infty}$ erhält man auch den für $\mathfrak{w}_{II2}$ und $\mathfrak{w}_{II3}$. Da diese beiden jedoch im allgemeinen nicht mit der v_0-Achse zusammenfallen, so ist der Momentenausgleich teils unvollkommen, teils übertrieben.

Abb. 183. Die geometrischen Orte für die Austrittsgeschwindigkeit aus der vorderen und der hinteren Schraube eines gegenläufigen Schraubenpaars bei großem Abstand.

Da im allgemeinen aber v_a/v_0 klein ist, ist die zeichnerische Ermittlung nur bei Benutzung eines großen Maßstabes möglich. Auch die rechnerische Bestimmung der Austrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{II3}$ aus der hinteren Schraube ist möglich und zwar in ähnlicher Weise, wie dies für die Einzelschraube im Abschnitt 15d mit w_∞ geschehen ist.

Den Darlegungen des Abschnittes 14g entsprechend erscheint es möglich, eine gegenläufige Schraube so zu entwerfen, daß sie bei annehmbaren c_a-Werten Momentenausgleich für zwei frei wählbare Betriebszustände liefert. Zwischen diesen Betriebszuständen ist dann ein meist praktisch als gut anzusehender Momentenausgleich zu erwarten.

Es läßt sich weiter zeigen, daß bei Annäherung an die Standverhältnisse die Schubziffer der hinteren Schraube wesentlich weniger stark zunimmt als die der vorderen Schraube. Dadurch wird aber die Änderung der Leistungsziffer der Gesamtschraube mit Annäherung an die Standverhältnisse im allgemeinen kleiner, wodurch die starre gegenläufige Schraube großen gegenseitigen Abstandes wohl in ähnlicher Weise wirken kann, wie dies sonst durch eine einzelne Verstellschraube beabsichtigt wird.

c) **Berücksichtigung der Reibung.** Bei Vorhandensein von Reibung ändert sich, wie aus der Betrachtung der Einzelschraube hervorgeht, die Anströmgeschwindigkeit der vorderen Schraube nicht wesentlich gegenüber dem Verhalten bei Reibungsfreiheit. Durch die Reibung wird jedoch die Austrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{I3}$ aus der vorderen Schraube geändert und damit die Eintrittsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{II0}$ in die hintere Schraube.

Die zur Überwindung der Reibung aufzubringende Leistung berechnet sich für die vordere Schraube aus (13,43)

$$k_{d\,r\,I} = \tau_I\,(1 + \lambda^2)^{3/2} \qquad \left(\tau_I = \frac{\mathfrak{z}_I\, t_I}{2\pi r}\, c_{w\,I}\right). \qquad (19,8)$$

Für die hintere Schraube ist entsprechend

$$k_{d\,r\,II} = \tau_{II}\left(\frac{w_{\infty\,II}}{u_{II}}\right)^3 \approx \tau_{II}\left(\frac{w_{0\,II}}{u_{II}}\right)^3 = \tau_{II}\left(\frac{(u+v_u)^2 + (v_0 + v_{a\,I})^2}{u^2}\right)^{3/2},$$

$$k_{d\,r\,II} = \tau_{II}\left(1 + \lambda^2 + 2\,\frac{v_u}{u}\left(1 + \frac{v_u}{2u}\right) + \lambda^2 \cdot 2\,\frac{v_{a\,I}}{v_0}\left(1 + \frac{v_{a\,I}}{2\,v_0}\right)\right)^{3/2}$$

und wegen (12,23), (12,18)

$$k_{d\,r\,II} = \tau_{II}\,(1 + \lambda^2 + 2\,k_{s\,I})^{3/2}. \qquad (19,9)$$

Als zusätzliche Leistungsziffer ergibt sich also bei gleicher Drehzahl insgesamt

$$k_{d\,r} = k_{d\,r\,I} + k_{d\,r\,II} \approx (\tau_I + \tau_{II})\,(1 + \lambda^2)^{3/2} + 3\,\tau_{II}\,k_{s\,I}.$$

Zur Berücksichtigung des letzten Gliedes ist es zulässig, bei gleicher Flügelzahl $\mathfrak{z}$ und Blattbreite

$$2\,\tau_{II} = \tau_I + \tau_{II} = \tau\,, \quad k_{s\,I} \approx \frac{k_{s\,I} + k_{s\,II}}{2} = \frac{k_s}{2} = \lambda^2 \cdot \frac{c_s}{2} \qquad (19,10)$$

zu setzen. Hiermit wird dann

$$k_{d\,r} \approx \tau\left(1 + \lambda^2\left(1 + \frac{c_s}{2}\right)\right)^{3/2}. \qquad (19,11)$$

Der mechanische Wirkungsgrad wird also (13, 38)

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \dfrac{\tau\left(1 + \lambda^2\left(1 + \frac{c_s}{2}\right)\right)^{3/2}}{k_{d\,i\,d}}}. \qquad (19,12)$$

Doch dürfte im allgemeinen als Näherung auch schon

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \frac{\tau(1+\lambda^2)^{3/2}}{k_{d_{id}}}} \tag{19, 13}$$

genügen, d. h. der gleiche Wert einer entsprechenden Einzelschraube.

Die Berechnung von k_{d_r} liefert die Vermehrung der Leistungsziffer durch den Reibungseinfluß bei einer gegebenen Schubziffer. Darüber hinaus interessiert aber auch die Vermehrung der Leistungsziffer einer gegebenen Schraube durch die Reibung und die Verminderung der Schubziffer. Für die vordere Schraube gilt das gleiche wie für die Einzelschraube (13, 19), (13, 20):

$$k_{s_I} = k_{s_{I\,id}}\left(1 - \varepsilon_I \frac{\lambda}{\eta_{i\,d_I\,\mathrm{einzel}}}\right),$$

$$k_{d_I} = k_{d_{I\,id}}\left(1 + \varepsilon_I \frac{\eta_{i\,d_I\,\mathrm{einzel}}}{\lambda}\right).$$

Für die hintere Schraube gilt ähnliches, wenn man mit dem Vergleichsfortschrittsgrad $\lambda_w = \lambda_{0_{II}}$, der noch im folgenden berechnet werden soll, rechnet:

$$k_{s_{II}} = k_{s_{II\,id}}\left(1 - \varepsilon_{II} \frac{\lambda_w}{\eta_{i\,d_{II}\,\mathrm{einzel}}}\right),$$

$$k_{d_{II}} = k_{d_{II\,id}}\left(1 + \varepsilon_{II} \frac{\lambda_w}{\eta_{i\,d_{II}\,\mathrm{einzel}}}\right).$$

Bei kleinem Schlupf und bei völligem oder fast völligem Momentenausgleich ist

$$\eta_{i\,d_I} \approx \eta_{i\,d_{II}}, \qquad \lambda_w \approx \lambda, \qquad \varepsilon_I \approx \varepsilon_{II},$$

so daß mit guter Näherung gilt

$$k_s = k_{s_{id}}\left(1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\eta_{i\,d\,\mathrm{einzel}}}\right), \qquad k_d = k_{d_{id}}\left(1 + \varepsilon \frac{\eta_{i\,d\,\mathrm{einzel}}}{\lambda}\right), \qquad \left(\eta_{i\,d\,\mathrm{einzel}} \approx \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{k_s}{2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{c_s}{2}}}\right). \tag{19, 14}$$

d) Verwendung der Ergebnisse der einzelnen Elementarschraube zur Untersuchung der gegenläufigen Elementarschrauben großen Abstandes. Für einen gegebenen Fortschrittsgrad und eine gegebene Belastung sei das zu einer gegenläufigen Elementarschraube gehörige Geschwindigkeitsdiagramm bei völligem Momentenausgleich gezeichnet, und zwar mit Berücksichtigung der Reibung unter Annahme eines entsprechenden Gleitwertes ε (Abb. 184). Nun werden die dem angegebenen ε entsprechenden Auftriebsbeiwerte c_a gewählt und hieraus Blattbreite und Anstellwinkel bestimmt. Es ist (14, 31)

$$c_a = \frac{2\,\Gamma_{\mathfrak{z}}}{w_\infty\,\mathfrak{z}\,t} = \frac{4\,\pi\,r\,v_u}{w_\infty\,\mathfrak{z}\,t}.$$

Also die Blattbreite
$$t_I = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_I c_{a_I}} \cdot \frac{v_u}{w_{\infty I}},$$
$$t_{II} = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_{II} c_{a_{II}}} \cdot \frac{v_u}{w_{\infty II}}.$$

Der Anstellwinkel ist gegeben durch (14, 29)

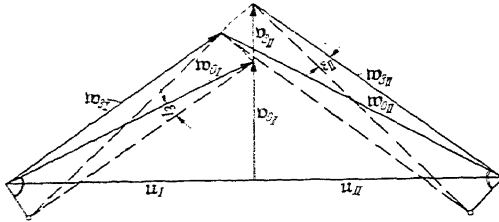



Abb. 184. Konstruktion des Geschwindigkeitsdreiecks eines gegenläufigen Schraubenpaars großen Abstandes für gegebenen Schubbelastungsgrad und gegebene Gleitwinkel der Profile.

$$c_a = 2\pi k \sin\alpha_\infty,$$
$$\sin\alpha_\infty = \frac{c_a}{2\pi k}.$$

Hiermit ist auch die aerodynamische Steigung λ_I^* und λ_{II}^* beider Schrauben festgelegt.

Das Verhalten, d. h. die k_s-, k_d- und η-Werte gleicher einzelner Elementarschrauben in Abhängigkeit von λ möge bekannt sein.

Das Verhalten der vorderen Schraube ist damit ohne weiteres gegeben. Aus dem k_{s_I}- und k_{d_I}-Wert der vorderen Schraube erhält man für jedes beliebige λ (11, 15)
$$\frac{v_{a_I}}{v_u} = \frac{k_{s_I}}{k_{d_I}}.$$

Nun gilt aber (13, 14)
$$\frac{v_{a_I}}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{k_{s_I}}{\lambda^2}} - 1,$$

so daß also
$$v_{a_I} = v_0\left(\sqrt{1 + \frac{k_{s_I}}{\lambda^2}} - 1\right), \tag{19, 15}$$
$$v_u = v_0\left(\sqrt{1 + \frac{k_{s_I}}{\lambda^2}} - 1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}. \tag{19, 16}$$

Der Vergleichsfortschrittsgrad λ_w der hinteren Schraube ist also
$$\lambda_w = \frac{v_0 + v_{a_I}}{u + v_u} = \lambda \frac{\sqrt{1 + \frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}}{1 + \lambda\left(\sqrt{1 + \frac{k_{s_I}}{\lambda^2}} - 1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}} \tag{19, 17}$$

und die Schubziffer und die Leistungsziffer
$$k_{s_{II}} = \left(1 + \frac{v_u}{u}\right)^2 k_{s_{II}}(\lambda_w), \tag{19, 18}$$
$$k_{d_{II}} = \left(1 + \frac{v_u}{u}\right)^2 k_{d_{II}}(\lambda_w), \tag{19, 19}$$

oder mit (19, 16)

$$\frac{v_u}{u} = \lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}},$$

$$k_{s_{II}} = \left(1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}\right)^2 k_{s_{II}}(\lambda_w), \tag{19, 20}$$

$$k_{d_{II}} = \left(1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}\right)^2 k_{d_{II}}(\lambda_w). \tag{19, 21}$$

Für das gesamte Schraubenpaar wird also

$$k_s = k_{s_I}(\lambda) + \left(1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}\right)^2 k_{s_{II}}(\lambda_w), \tag{19, 22}$$

$$k_d = k_{d_I}(\lambda) + \left(1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}\right)^2 k_{d_{II}}(\lambda_w) \tag{19, 23}$$

und

$$\eta = \lambda\,\frac{k_{s_I} + \left(1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}\right)^2 k_{s_{II}}(\lambda_w)}{k_{d_I} + \left(1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}\right)^2 k_{d_{II}}(\lambda_w)}, \tag{19, 24}$$

wobei (19, 17)

$$\lambda_w = \lambda\,\frac{\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}}{1+\lambda\left(\sqrt{1+\frac{k_{s_I}}{\lambda^2}}-1\right)\frac{k_{d_I}}{k_{s_I}}}.$$

20. Gegenläufige Elementarschrauben gleicher Drehzahl bei kleinem gegenseitigem Abstand.

a) Die zu gegebenem Fortschrittsgrad und Schubziffer gehörige gegenläufige Elementarschraube vollkommenen Drehmomentenausgleichs. Bei Reibungsfreiheit gilt für Drehmomentenausgleich auch bei geringem gegenseitigem Abstand

$$\eta = \eta_a = \frac{2}{1+\sqrt{1+c_s}}. \tag{20, 1}$$

Die Durchtrittsgeschwindigkeit ist $v_m = v_0 + \frac{v_a}{2}$. Dieser Wert ist bei kleinem Abstand tatsächlich vorhanden, während er bei großem Abstand nur die Bedeutung einer Rechengröße hatte. Der Schubbelastungsgrad, die Schubziffer und die Leistungsziffer werden damit

$$c_s = 2\,\frac{v_a}{v_0}\cdot\frac{v_m}{v_0} = 2\,\frac{v_a}{v_0}\left(1+\frac{v_a}{2v_0}\right),$$

$$k_s = c_s\lambda^2 = 2\,\frac{v_a}{u}\cdot\frac{v_m}{u}, \tag{20, 3}$$

$$k_d = 4\,\frac{v_u}{u}\cdot\frac{v_m}{u},$$

oder wie bei großem Abstand

$$k_d = \frac{\lambda^3 c_s (1 + \sqrt{1 + c_s})}{2}. \tag{20,4}$$

Für v_u/u bzw. v_u/v_0 findet man damit ebenfalls

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_s}{4} = \frac{\lambda^2 c_s}{4}; \quad \frac{v_u}{v_0} = \frac{\lambda c_s}{4}. \tag{20,5}$$

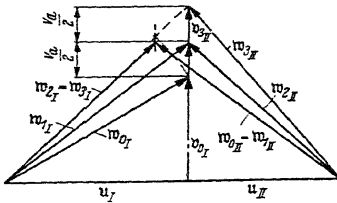



Abb. 185. Konstruktion der Geschwindigkeiten beim Durchtritt durch das Schraubenpaar kleinen Abstandes bei gegebenem c_s bzw. v_a.

Bei der Schraube mit großem Abstand konnte $\mathfrak{w}_{I3}$ bzw. $\mathfrak{w}_{II0}$ und damit v_u/u auch durch geometrische Konstruktion recht einfach unmittelbar ermittelt werden. Bei kleinem Abstand ist dies nur wenig umständlicher. Hierbei ist $\mathfrak{w}_{I2} = \mathfrak{w}_{I3}$ und $\mathfrak{w}_{II0} = \mathfrak{w}_{II1}$. Die geometrische Konstruktion geht dann aus Abb. 185 hervor.

Im allgemeinen ist jedoch die Rechnung zweckmäßiger, da wegen der im allgemeinen vorhandenen Kleinheit von v_u/u und v_a/u zur genauen geometrischen Konstruktion recht große Maßstäbe nötig werden.

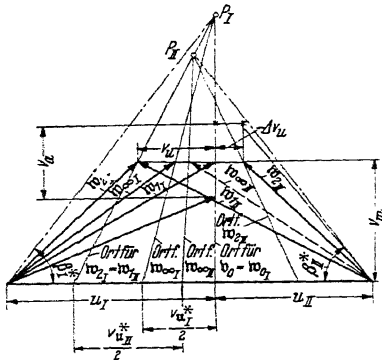



Abb. 186. Die geometrischen Orte für die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Strömung durch ein Schraubenpaar kleinen Abstandes. Das Beispiel gibt die Verhältnisse eines Schraubenpaars verschiedener Drehzahl und bei nicht in allen Betriebszuständen ausgeglichenem Drehmoment.

b) Das Verhalten bei Änderung des Fortschrittsgrades. Bei der Untersuchung des Verhaltens bei Änderung des Fortschrittsgrades geht man zweckmäßig umgekehrt vor, indem man erst das Verhalten bei Veränderung von v_m untersucht. Für die vordere Schraube gilt wieder die $\mathfrak{w}_{I\infty}$-Gerade. Ihr entspricht für $\mathfrak{w}_{I2} = \mathfrak{w}_{I3}$ ebenfalls eine Gerade, die gleichzeitig zur $\mathfrak{w}_{II0} = \mathfrak{w}_{II1}$-Geraden wird. Aus diesem Grunde ist auch der Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_{II\infty}$ und für $\mathfrak{w}_{II2}$ eine Gerade. Nach den Darlegungen des Abschnitts 15a gilt entsprechend Abb. 186 (15, 7)

$$\frac{v_{u\,II}^*}{2} = (u_{II} + v_{u\,I}^*)\frac{1}{1 + q_{II}}. \tag{20,6}$$

Diese Gerade ist somit recht einfach zu konstruieren.

In dem Falle, daß im Ausgangszustand Drehmomentenausgleich vorhanden ist, und beide Schrauben gleiche aerodynamische Steigung

haben, ergibt sich also, daß bei allen Fortschrittsgraden Drehmomentenausgleich vorhanden ist (vgl. Abb. 187).

c) Berücksichtigung der Reibung. Als Anströmgeschwindigkeit beider Schrauben hat auch bei Reibung im wesentlichen die gleiche zu gelten wie bei Reibungsfreiheit. Somit wird (13, 43)

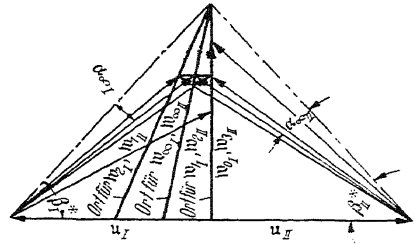



Abb. 187. Die Verhältnisse bei einem Schraubenpaar kleinen gegenseitigen Abstandes, wenn das Drehmoment in allen Betriebszuständen ausgeglichen ist.

$$\left.\begin{aligned} k_{d\,r_I} &= \tau_I \left(\frac{w_{\infty I}}{u}\right)^3 = \tau_I \left(\frac{\left(u - \frac{v_u}{2}\right)^2 + \left(v_0 + \frac{v_a}{2}\right)^2}{u^2}\right)^{3/2} \\ &= \tau_I \left(1 + \lambda^2 - \frac{v_u}{u} + \lambda^2 \cdot \frac{v_a}{v_0} + \left(\frac{v_u}{2u}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{v_a}{2v_0}\right)^2\right)^{3/2}, \\ k_{d\,r_{II}} &= \tau_{II} \left(\frac{w_{\infty II}}{u}\right)^3 = \tau_{II} \left(\frac{\left(u + \frac{v_u}{2}\right)^2 + \left(v_0 + \frac{v_a}{2}\right)^2}{u^2}\right)^{3/2} \\ &= \tau_{II} \left(1 + \lambda^2 + \frac{v_u}{u} + \lambda^2 \frac{v_a}{v_0} + \left(\frac{v_u}{2u}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{v_a}{2v_0}\right)^2\right)^{3/2}. \end{aligned}\right\} \quad (20, 7)$$

Da aber

$$\tau_I \sim \tau_{II} = \frac{\tau}{2},$$

so wird

$$k_{d\,r} = k_{d\,r_I} + k_{d\,r_{II}} \sim \tau \left(1 + \lambda^2 \left(1 + \frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{4v_0}\right)\right) + \left(\frac{v_u}{2u}\right)^2\right)^{3/2}$$

oder mit (20, 2)

$$\frac{v_a}{v_0}\left(1 + \frac{v_a}{4v_0}\right) \sim \frac{c_s}{2}$$

und unter Vernachlässigung von $\left(\frac{v_u}{2u}\right)^2$

$$k_{d\,r} \approx \tau \left(1 + \lambda^2 \left(1 + \frac{c_s}{2}\right)\right)^{3/2}. \quad (20, 8)$$

Der mechanische Wirkungsgrad wird also in diesem Falle in erster Näherung (19, 12)

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \dfrac{\tau \left(1 + \lambda^2 \left(1 + \frac{c_s}{2}\right)\right)^{3/2}}{k_{d_{i\,d}}}}. \quad (20, 9)$$

Doch dürfte auch hier im allgemeinen als Näherung schon (19, 13)

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \dfrac{\tau (1 + \lambda^2)^{3/2}}{k_{d_{i\,d}}}} \quad (20, 10)$$

ausreichen.

Durch k_{d_r} ist wieder die zusätzliche Leistungsziffer zur Berücksichtigung der Reibung bei gegebenem k_s berechnet. Darüber hinaus wird man auch die Verminderung der Schubziffer und die Vermehrung der Leistungsziffer einer gegebenen Schraube ermitteln. Es ist aber auch bei kleinem gegenseitigem Abstand wie bei großem in guter Näherung

$$k_s \approx k_{s_{id}} \left(1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\eta_{i\,d_{\text{einzel}}}}\right), \qquad (20,11)$$

$$k_d \approx k_{d_{id}} \left(1 + \varepsilon \frac{\eta_{i\,d_{\text{einzel}}}}{\lambda}\right), \qquad (20,12)$$

wobei

$$\eta_{i\,d_{\text{einzel}}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{k_{s_{id}}}{2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{c_{s_{id}}}{2}}} \qquad (20,13)$$

d) Nachrechnen des Verhaltens einer momentausgeglichenen gleichschnell gegenläufigen Elementarschraube kleinen Abstandes. Unter Annahme eines entsprechenden Gleitwertes ε und eines dazu passenden Auftriebsbeiwertes (14, 31)

$$c_a = \frac{4\pi r v_u}{w_\infty \mathfrak{z}\, t}$$

findet man als Blattbreiten

$$t_I = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_I c_{a_I}} \frac{v_u}{w_{\infty_I}},$$

$$t_{II} = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_{II} c_{a_{II}}} \frac{v_u}{w_{\infty_{II}}}.$$

Der entsprechende Anstellwinkel ist gegeben durch (14, 29)

$$\sin \alpha_{\infty_{I,\,II}} = \frac{c_{a_{I,\,II}}}{2\pi k_{I,\,II}}.$$

Will man Momentenausgleich für alle Fortschrittsgrade erzielen, so hat man c_{a_I} und $c_{a_{II}}$ so zu wählen, daß die aerodynamische Steigung beider Elementarschrauben gleich groß wird.

Es ist dann (Abb. 187)

$$\frac{v_u}{u} = \left(1 - \frac{\frac{v_0}{u} + \frac{v_a}{2u}}{\lambda^*}\right) \frac{v_u^*}{u}. \qquad (20,14)$$

Ferner (20, 5), (20, 2)

$$k_{s_{id}} = 4 \frac{v_u}{u},$$

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{k_{s_{id}}}{\lambda^2}} - 1.$$

Also

$$k_{s_{id}} = 4\left(1 - \lambda \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{k_{s_{id}}}{\lambda^2}} - 1\right)}{\lambda^*}\right) \frac{v_u^*}{u}.$$

Das ist eine quadratische Gleichung für $k_{s_{id}}$. Ihre Auflösung ergibt

$$k_{s_{id}} = \frac{2 v_u^*}{u \lambda^*} \left\{ 2\lambda^* - \lambda + \frac{v}{u \lambda^*} \mathop{-}_{(+)} \sqrt{\left(\lambda - \frac{v_u^*}{u \lambda^*}\right)^2 + 4 \frac{v_u^*}{u}} \right\}. \qquad (20, 15)$$

Es gilt das Vorzeichen — der Wurzel. Für $\lambda = \lambda^*$ wird dann, wie es sein muß, $k_{s_{id}} = 0$.

Da nun

$$\eta_{id} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{k_{s_{id}}}{\lambda^2}}} = \lambda \frac{k_{s_{id}}}{k_{d_{id}}}, \qquad (20, 16)$$

so erhält man hiermit auch

$$k_{d_{id}} = \frac{\lambda}{\eta_{id}} k_{s_{id}}. \qquad (20, 17)$$

Mit Berücksichtigung der Reibung ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} k_s &= k_{s_{id}} \left(1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\eta_{i\,d_{\text{einzel}}}}\right), \\ k_d &= k_{d_{id}} \left(1 + \varepsilon \frac{\eta_{i\,d_{\text{einzel}}}}{\lambda}\right), \qquad \left(\eta_{i\,d_{\text{einzel}}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{k_{s_{id}}}{2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{k_{s_{id}}}{2\lambda^2}}}\right). \\ \eta &= \eta_{id} \cdot \frac{1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\eta_{i\,d_{\text{einzel}}}}}{1 + \varepsilon \frac{\eta_{i\,d_{\text{einzel}}}}{\lambda}}, \end{aligned}\right\} \qquad (20, 18)$$

21. Feststehende Leitvorrichtung bei großem Abstand von der Schraube.

a) Die zu gegebenem Fortschrittsgrad und Schubziffer gehörige Schraube mit Leitvorrichtung bei vollkommenem Drehmomentenausgleich. Bei Reibungsfreiheit gilt bei Drehmomentenausgleich auch für die Schraube mit Leitvorrichtung in großem Abstand

$$\eta = \eta_a = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}}. \qquad (21, 1)$$

Betrachtet man

$$v_m = v_0 + \frac{v_a}{2} \qquad (21, 2)$$

wieder als mittlere Durchtrittsgeschwindigkeit durch das System, so wird

$$c_s = 2 \frac{v_a}{v_0} \frac{v_m}{v_0} = 2 \frac{v_a}{v_0} \left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right) \quad \text{also} \quad \frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1, \qquad (21, 3)$$

$$k_s = \lambda^2 c_s = 2 \frac{v_a}{u} \frac{v_m}{u}, \qquad (21, 4)$$

$$k_d = 2 \frac{v_u}{u} \frac{v_m}{u},$$

oder

$$k_d = \frac{\lambda^3 c_s (1 + \sqrt{1 + c_s})}{2}. \qquad (21, 5)$$

Für v_u/u bzw. v_u/v_0 findet man damit

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_s}{2} = \frac{\lambda^2 c_s}{2}, \qquad \frac{v_u}{v_0} = \frac{\lambda c_s}{2}. \qquad (21, 6)$$

$\mathfrak{w}_{I3}$ bzw. $\mathfrak{w}_{II0}$ und damit v_u können auch bei großem Abstand wieder besonders leicht festgelegt werden. Doch ist auch hier meist die rechnerische Ermittlung vorzuziehen wegen des großen Maßstabes, den man bei der zeichnerischen Lösung benutzen muß, um hinreichende Genauigkeit zu erhalten.

Abb. 179 und Abb. 180 zeigen als Beispiel die Ermittlung der Geschwindigkeitsdiagramme für eine Leitvorrichtung hinter der Schraube und für eine Leitvorrichtung vor der Schraube.

b) Das Verhalten bei Änderung des Betriebszustandes. Bei Änderung des Fortschrittsgrades ist wieder nicht zu erwarten, daß der Momentenausgleich vollkommen erhalten bleibt. Ist die Leitvorrichtung vor der Schraube, so ändert sich auch $\mathfrak{w}_{I3} = \mathfrak{v}_{I3}$ proportional mit v_0. $\mathfrak{w}_{I3}$ liegt also auf einer Geraden, ebenso wie $\mathfrak{w}_{I\infty}$ und $\mathfrak{w}_{I2}$. Die $\mathfrak{w}_{I3}$-Gerade der Eintrittsleitvorrichtungströmung ist identisch mit der $\mathfrak{w}_{II0}$-Geraden der Schraubenströmung. Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{w}_{II\infty}$ auf einer Hyperbel liegt, welche durch den Schnittpunkt der $\mathfrak{w}_{II0}$-Geraden mit der Nullauftriebsgeraden $\mathfrak{w}_{II}^{*}$ geht. Der Ort des Endpunktes von $\mathfrak{w}_{II3}$ ist ebenfalls eine Hyperbel, ebenso der für $\mathfrak{w}_{II1}$ und $\mathfrak{w}_{II2}$.

Liegt die Leitvorrichtung hinter der Schraube, so sind die Verhältnisse in der Schraube die gleichen, wie wenn die Leitvorrichtung nicht da wäre. Der Ort für $\mathfrak{w}_{I3}$ ist also eine Hyperbel. Danach ergibt sich, daß auch der Ort für $\mathfrak{w}_{II3}$ ebenso der für $\mathfrak{w}_{II1}$, $\mathfrak{w}_{II\infty}$, $\mathfrak{w}_{II2}$-Kurven höherer Ordnung sind.

Weder für die Schraube mit Eintrittsleitvorrichtung noch für die Schraube mit Austrittsleitvorrichtung ist daher im allgemeinen für mehr als zwei Fortschrittsgrade Momentenausgleich zu erwarten.

c) Berücksichtigung der Reibung. Die zur Überwindung der Reibung notwendige Leistung ist beim System Schraube—Leitvorrichtung in der Schraube (S) die gleiche wie bei der Einzelschraube

$$dN_{r_S} = c_{wI}\mathfrak{z}_I t_I \frac{\varrho}{2} w_{I\infty}^3 dr = \tau_S (1 + \lambda^2)^{3/2} \frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r\, dr. \qquad (21, 7)$$

Für die Leitvorrichtung (L) ist sie

$$dN_{r_L} = c_{wII}\mathfrak{z}_{II} t_{II} \frac{\varrho}{2} w_{II\infty}^3 dr,$$

oder da

$$w_{II\infty} \approx v_0 + v_a,$$

$$dN_{r_L} = c_{wII}\mathfrak{z}_{II} t_{II} \frac{\varrho}{2} v_0^3 \left(1 + \frac{v_a}{v_0}\right)^3 dr$$

und mit

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1,$$

$$dN_{r_L} = c_{wII}\mathfrak{z}_{II} t_{II} \frac{\varrho}{2} v_0^3 (1 + c_s)^{3/2} dr = \tau_L (\lambda^2 + k_s)^{3/2} \frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r\, dr. \qquad (21, 8)$$

Die zusätzliche, die Reibungsverluste berücksichtigende Leistungsziffer ist somit

$$k_{dr} = \frac{dN_{r_S} + dN_{r_L}}{\frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r dr} = \tau_S (1 + \lambda^2)^{3/2} + \tau_L (\lambda^2 + k_s)^{3/2}. \qquad (21, 9)$$

Beim System Leitvorrichtung—Schraube gilt für die Leitvorrichtung

$$dN_{r_L} = c_{wI} \delta_I t_I \frac{\varrho}{2} w_{I\infty}^3 dr,$$

oder mit

$$w_{I\infty} \approx v_0,$$

$$dN_{r_L} = c_{wI} \delta_I t_I \frac{\varrho}{2} v_0^3 dr = \tau_L \lambda^3 \frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r dr. \qquad (21, 10)$$

Für die Schraube gilt

$$dN_{r_S} = c_{wII} \delta_{II} t_{II} \frac{\varrho}{2} w_{II\infty}^3 dr,$$

oder mit

$$w_{II\infty}^2 \approx v_0^2 + (u + v_u)^2,$$

$$dN_{r_S} = \tau_S \left(\lambda^2 + \left(1 + \frac{v_u}{u}\right)^2\right)^{3/2} \frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r dr$$

oder bei völligem Momentenausgleich mit $\frac{v_u}{u} = 1 - \sqrt{1 - k_s}$

$$dN_{r_S} = \tau_S \left((2 - \sqrt{1 - k_s})^2 + \lambda^2\right)^{3/2} \frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r dr,$$

$$dN_{r_S} \approx \tau_S (1 + k_s + \lambda^2)^{3/2}. \qquad (21, 11)$$

Die zusätzliche, die Reibungsverluste berücksichtigende Leistungsziffer ist somit

$$k_{dr} = \frac{dN_{r_L} + dN_{r_S}}{\frac{\varrho}{2} u^3 2\pi r dr} = \tau_L \lambda^3 + \tau_S (1 + \lambda^2 + k_s)^{3/2}. \qquad (21, 12)$$

Ein wesentlicher Unterschied in bezug auf k_{dr} besteht also nicht zwischen der Anordnung der Leitvorrichtung vor und hinter der Schraube. Der mechanische Wirkungsgrad der Anordnung wird

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \frac{k_{dr}}{k_{d_{id}}}}. \qquad (21, 13)$$

Die Anordnung einer Leitvorrichtung wäre bezüglich des Schubs nur förderlich, wenn

$$\frac{k_{dr_L}}{k_d} < \frac{\Delta dS}{dS}, \quad \text{also wenn } \frac{k_{dr_L}}{k_d} < \frac{k_s}{4}.$$

Bei der Eintrittsleitvorrichtung müßte also sein (21, 9)

$$k_{dr_L} = \tau_L \lambda^3 (1 + c_s)^{3/2} < \frac{k_s k_d}{4} = \frac{\lambda}{4\eta} k_s^2$$

oder

$$\tau_L < \frac{k_s^2}{4\eta\lambda^2 (1 + c_s)^{3/2}} = \frac{\lambda^2 c_s^2}{4\eta (1 + c_s)^{3/2}} . \qquad (21, 14)$$

Bei der Austrittsleitvorrichtung müßte sein

$$k_{dr_L} + \Delta k_{dr_S} = \tau_L \lambda^3 + \frac{3}{2} \tau_s k_s < \frac{k_s k_d}{4} = \frac{\lambda}{4\eta} k_s^2 ,$$

oder

$$\tau_L < \frac{\lambda^2 c_s^2}{4\eta} - \frac{3}{2} \tau_s \frac{c_s}{\lambda} . \qquad (21, 15)$$

Für kleine c_s würde also die Bedingung für die schubmäßige Zweckmäßigkeit die gleiche sein.

Im allgemeinen wird aber auch in dieser Hinsicht eine besondere Leitvorrichtung erst bei großen Fortschrittsgraden zweckmäßig.

Bei der üblichen Flügelanordnung der Flugzeuge liegt aber meist ein gewisser Teil der Tragflügel im Bereich der durch die Schraube strömenden Luft. Unter solchen Umständen wirkt der Flugzeugflügel selbst schon als Leitvorrichtung und seine Wirkung kann noch vervollkommnet werden, wenn man den im Bereich der Schraubenströmung liegenden Teil des Flugzeugflügels zweckmäßig verwindet.

d) Verwendung der Ergebnisse der einzelnen Elementarschraube und der Gitterströmung zur Untersuchung einer Schraube mit Leitvorrichtung großen Abstandes. Für einen gegebenen Fortschrittsgrad und eine gegebene Belastung sei das zu einer Schraube mit fester Leitvorrichtung in großem Abstand gehörige Geschwindigkeitsdiagramm bei völligem Momentenausgleich gezeichnet, und zwar mit Berücksichtigung der Reibung. Dann wird mit (14, 14)

$$c_a = \frac{4\pi r v_u}{w_\infty \mathfrak{z} t}$$

die Blattbreite t_S der Schraubenflügel bzw. die Profillänge t_L der Leitvorrichtung

$$t_S = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_S c_{a_S}} \cdot \frac{v_u}{w_{\infty S}} ; \qquad t_L = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_L c_{a_L}} \frac{v_u}{w_{\infty L}} . \qquad (21, 16)$$

Für Leitvorrichtung vor der Schraube ist hierbei

$$w_{\infty_L}^2 \backsim v_0^2 , \qquad w_{\infty_S}^2 \backsim v_0^2 + (u + v_u)^2 . \qquad (21, 17)$$

Für Leitvorrichtung hinter der Schraube ist hierbei

$$w_{\infty_S}^2 \backsim v_0^2 + u^2 , \qquad w_{\infty_L}^2 \backsim (v_0 + v_a)^2 . \qquad (21, 18)$$

Ist nun das Verhalten der gleichen Elementarschraube als Einzelschraube bekannt und ebenso das Verhalten des der Leitvorrichtung

entsprechenden Gitters, so kann man hieraus in ähnlicher Weise das Verhalten des gesamten Systems untersuchen, wie dies bei der gegenläufigen Schraube großen Abstandes beschrieben wurde.

22. Feststehende Leitvorrichtung bei kleinem Abstand von der Schraube.

a) Die zu gegebenem Fortschrittsgrad und Schubziffer gehörige Schraube mit Leitvorrichtung bei vollkommenem Drehmomentenausgleich. Bei Reibungsfreiheit und Drehmomentenausgleich gilt auch im Falle der Schraube mit Leitvorrichtung in kleinem Abstand wieder

$$\eta = \eta_a = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_s}} . \qquad (22, 1)$$

Dem kleinen Abstand entspricht eine Durchtrittsgeschwindigkeit von

$$v_m = v_0 + \frac{v_a}{2} . \qquad (22, 2)$$

Hiermit wird wieder

$$c_s = 2 \frac{v_a}{v_0} \frac{v_m}{v_0} = 2 \frac{v_a}{v_0} \left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right), \quad \text{also} \quad \frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1 , \qquad (22, 3)$$

$$k_s = \lambda^2 c_s = 2 \frac{v_a}{u} \frac{v_m}{u} , \qquad (22, 4)$$

$$k_d = 2 \frac{v_u}{u} \cdot \frac{v_m}{u}$$

oder

$$k_d = \frac{\lambda^3 c_s (1 + \sqrt{1 + c_s})}{2} . \qquad (22, 5)$$

Für v_u/u bzw. v_u/v_0 findet man also wieder

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_s}{2} = \frac{\lambda^2 c_s}{2} ; \qquad \frac{v_u}{v_0} = \frac{\lambda c_s}{2} . \qquad (22, 6)$$

Das zu einem gegebenen Fortschrittsgrad und einer vorgeschriebenen Schubziffer gehörige Geschwindigkeitsdiagramm ist also auch bei kleinem Abstand der Leitvorrichtung von der Schraube wieder an sich einfach zu konstruieren (vgl. Abb. 181 und 182). Wegen der kleinen Größen v_u/u und v_a/v_0 wird man aber unter Umständen doch die ebenfalls nicht schwierige Rechnung vorziehen.

b) Das Verhalten bei Änderung des Betriebszustandes. Bei Änderung des Fortschrittsgrades ist wiederum im allgemeinen nicht zu erwarten, daß der Drehmomentenausgleich erhalten bleibt. Die Untersuchung des Verhaltens ist aber wesentlich einfacher als bei großer Entfernung der Leitvorrichtung. Der Ort für $\mathfrak{w}_{I_2} = \mathfrak{w}_{I_3}$ ist wie der für $\mathfrak{w}_{I\infty}$ eine Gerade. Der Endpunkt von $\mathfrak{w}_{I_3}$ ist gleichzeitig der von $\mathfrak{w}_{II_1}$; aus diesem Grunde ist auch der Ort für den Endpunkt von $\mathfrak{w}_{II\infty}$ und von $\mathfrak{w}_{II_2}$ eine Gerade. Fällt die $\mathfrak{w}_{II_2}$-Gerade mit der $\mathfrak{v}_0$-Geraden

zusammen, dann ist der Drehmomentenausgleich für alle Fortschrittsgrade vollkommen.

Liegt die Leitvorrichtung ($I \equiv L$, $II \equiv S$) vor der Schraube, so ist der Momentenausgleich nur für einen Fortschrittsgrad möglich, wie man aus der Abb. 186 für $u_I = 0$ ohne weiteres erkennen kann, wenn man noch bedenkt, daß der Ort für $\mathfrak{w}_{II_1}$ bzw. $\mathfrak{w}_{I_2}$ durch den Endpunkt von $v^*_{u_I}$ geht.

Liegt jedoch die Leitvorrichtung hinter der Schraube ($I \equiv S$, $II \equiv L$), so ist für den völligen Momentenausgleich bei jedem Fortschrittsgrad nur nötig, daß $\mathfrak{w}_{II_2}$ mit der Richtung der Steigung β^*_{II} der Leitvorrichtung zusammenfällt. Dies ist aber nur der Fall, wenn die Profiltiefe der Leitvorrichtung recht groß ist. Praktisch genügt es jedoch, wenn das Teilungsverhältnis a/t_L des der Leitvorrichtung entsprechenden Gitters $\frac{a}{t_L} = \frac{2\pi r}{\mathfrak{z}_L t_L} < 0{,}7$ wird (Abb. 141).

c) Berücksichtigung der Reibung. Bei der Anordnung der Leitvorrichtung vor der Schraube ist die zur Überwindung der Reibung nötige Leistung in der Leitvorrichtung

$$dN_{r_L} = c_{w_L} \mathfrak{z}_L t_L \frac{\varrho}{2} w^3_{L\infty} dr,$$

oder mit

$$w_{L\infty} \approx v_0 + \frac{v_a}{2} = v_0\left(1 + \frac{v_a}{2v_0}\right),$$

was wegen (22, 3)

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1,$$

$$w_{L\infty} \approx \frac{v_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + c_s}\right)$$

ergibt,

$$dN_{r_L} = c_{w_L} \mathfrak{z}_L t_L \frac{\varrho}{2} u^3 \lambda^3 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^3 dr. \tag{22, 7}$$

In der Schraube ist die zur Überwindung der Reibung nötige Leistung

$$dN_{r_S} = c_{w_S} \mathfrak{z}_S t_S \frac{\varrho}{2} w^3_{S\infty} dr,$$

oder mit

$$w^2_{S\infty} = \left(u + \frac{v_u}{2}\right)^2 + \left(v_0 + \frac{v_a}{2}\right)^2 = u^2\left\{\left(1 + \frac{v_u}{2u}\right)^2 + \lambda^2\left(1 + \frac{v_a}{2v_0}\right)^2\right\},$$

was bei völligem Momentenausgleich wegen (22, 3), (22, 6)

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_s}{2}, \qquad \frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1$$

$$w^2_{S\infty} = u^2\left\{\left(1 + \frac{k_s}{4}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^2\right\}$$

ergibt,

$$dN_{r_S} = c_{w_S} \mathfrak{z}_S t_S \frac{\varrho}{2} u^3 \left\{\left(1 + \frac{k_s}{4}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^2\right\}^{3/2}. \tag{22, 8}$$

Die zusätzliche, die Reibungsverluste berücksichtigende Leistungsziffer ist also für die Anordnung der Leitvorrichtung vor der Schraube

$$k_{dr} = \frac{d N_{r_L} + d N_{r_S}}{\frac{\varrho}{2} u^3 \cdot 2 \pi r dr} = \tau_L \lambda^3 \left(\frac{1+\sqrt{1+c_s}}{2}\right)^3 + \tau_S \left\{\left(1+\frac{k_s}{4}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{1+\sqrt{1+c_s}}{2}\right)^2\right\}^{3/2}. \quad (22, 9)$$

Wird die Leitvorrichtung hinter der Schraube angeordnet, so ist in der Schraube

$$d N_{r_S} = c_{w_S} \mathfrak{z}_S t_S \frac{\varrho}{2} w_{S\infty}^2 dr ,$$

oder mit

$$w_{S\infty}^2 = \left(u - \frac{v_u}{2}\right)^2 + \left(v_0 + \frac{v_a}{2}\right)^2 = u^2 \left\{\left(1 - \frac{v_u}{2u}\right)^2 + \lambda^2 \left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right)^2\right\},$$

was wegen (22, 3), (22, 6)

$$\frac{v_u}{u} = \frac{k_s}{2}, \quad \frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1$$

$$w_{S\infty}^2 = u^2 \left\{\left(1 - \frac{k_s}{4}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^2\right\}^{3/2}$$

ergibt,

$$d N_{r_S} = c_{w_S} \mathfrak{z}_S t_S \frac{\varrho}{2} u^3 \left\{\left(1 - \frac{k_s}{4}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^2\right\}^{3/2}. \quad (22, 10)$$

In der Leitvorrichtung hinter der Schraube ist der Verlust der gleiche wie in der Leitvorrichtung vor der Schraube

$$d N_{r_L} = c_{w_L} \mathfrak{z}_L t_L \frac{\varrho}{2} u^3 \lambda^3 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^3. \quad (22, 11)$$

Die zusätzliche, die Reibungsverluste berücksichtigende Leistungsziffer ist also bei Anordnung der Leitvorrichtung hinter der Schraube

$$k_{dr} = \frac{d N_{r_S} + d N_{r_L}}{\frac{\varrho}{2} u^3 \cdot 2 \pi r dr} = \tau_L \lambda^3 \left(\frac{1+\sqrt{1+c_s}}{2}\right)^3 + \tau_S \left\{\left(1-\frac{k_s}{4}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{1+\sqrt{1+c_s}}{2}\right)^2\right\}^{3/2}. \quad (22, 12)$$

Der mechanische Wirkungsgrad ist wieder (21, 13)

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \frac{k_{dr}}{k_{d_{id}}}}.$$

Die Anordnung einer Leitvorrichtung ist bezüglich des Schubs nur förderlich, wenn

$$\frac{k_{d r_L}}{k_d} < \frac{\Delta dS}{dS},$$

also wenn

$$\frac{k_{d r_L}}{k_d} < \frac{k_s}{4}. \quad (22, 13)$$

Für die Eintrittsleitvorrichtung wie für die Austrittsleitvorrichtung müßte also sein

$$k_{d r_L} = \tau_L \lambda^3 \left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^3 < \frac{k_s k_d}{4} = \frac{\lambda k_s^2}{4 \eta} \text{ oder } \tau_L < \frac{\lambda^2 c_s^2}{4 \eta \left(\frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{2}\right)^3}. \quad (22, 14)$$

d) Nachrechnen des Verhaltens einer durch eine feste Leitvorrichtung in kleinem Abstand momentausgeglichenen Elementarschraube. Für einen gegebenen Fortschrittsgrad und eine gegebene Belastung sei das zu einer Schraube mit fester Leitvorrichtung in großem Abstand gehörige Geschwindigkeitsdiagramm bei völligem Momentenausgleich gezeichnet. Unter Annahme eines entsprechenden Gleitwertes ε und eines dazu passenden Auftriebsbeiwertes c_a (14, 14)

$$c_a = \frac{4\pi r v_u}{w_\infty \mathfrak{z} t}$$

findet man als Blattbreiten

$$t_S = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_S c_{a_S}} \cdot \frac{v_u}{w_{\infty_S}}, \qquad t_L = \frac{4\pi r}{\mathfrak{z}_L c_{a_L}} \cdot \frac{v_u}{w_{\infty_L}}. \tag{22, 15}$$

Der entsprechende Anstellwinkel α_∞ ist gegeben durch

$$\sin \alpha_{\infty_{S,L}} = \frac{c_{a_{S,L}}}{2\pi k_{S,L}}.$$

Will man Momentenausgleich bei der Leitvorrichtung hinter der Schraube, wo dies allein möglich ist, für alle Fortschrittsgrade erzielen, so muß man $\beta_L^* = 90°$ und t_L so groß wählen, daß praktisch die Umlenkung der Austrittsgeschwindigkeit in die Flugrichtung erfolgt, also $\frac{2\pi r}{\mathfrak{z} t_L} \lesssim 0{,}7$. Ist der Ausgleich des Moments durch eine Austrittsleitvorrichtung nicht vollkommen, so bleibt der Anteil des restlichen Drehmoments am Gesamtmoment konstant, wenn $\beta_L^* = 90°$ ist, wie man aus dem Geschwindigkeitsdiagramm leicht ersehen kann. Bei der Anordnung der Leitvorrichtung vor der Schraube sind die Verhältnisse nicht ganz so einfach, aber doch noch leicht aus dem Geschwindigkeitsdiagramm herauszulesen.

Hier möge aber nur das Verhalten bei völligem Momentenausgleich durch eine wenig von der Schraube entfernte Austrittsleitvorrichtung näher beschrieben werden. Es ist (20, 14)

$$\frac{v_u}{u} = \left(1 - \frac{\frac{v_0}{u} + \frac{v_a}{2u}}{\lambda^*}\right) \frac{v_u^*}{u}.$$

Ferner (22, 6), (22, 3)

$$k_{s i d} = 2 \frac{v_u}{u},$$

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{k_s}{\lambda^2}} - 1,$$

also

$$k_{s i d} = 2\left(1 - \lambda \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{k_{s i d}}{\lambda^2}} - 1\right)}{\lambda^*}\right) \frac{v_u}{u}.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung für $k_{s_{i\,d}}$ ergibt

$$k_{s_{i\,d}} = \frac{v_u^*}{u\,\lambda^*}\left\{2\,\lambda^* - \lambda + \frac{v_u^*}{2\,u\,\lambda^*} \underset{-}{(+)} \sqrt{\left(\lambda - \frac{v_u^*}{2\,u\,\lambda^*}\right)^2 + 2\,\frac{v_u^*}{u}}\right\}. \qquad (22,16)$$

Mit

$$\eta_{i\,d} = \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{k_{s_{i\,d}}}{\lambda^2}}} = \lambda\,\frac{k_{d_{i\,d}}}{k_{s_{i\,d}}} \qquad (22,17)$$

erhält man auch

$$k_{d_{i\,d}} = \frac{\lambda}{\eta_{i\,d}}\,k_{s_{i\,d}}. \qquad (22,18)$$

23. Die Leitwirkung des Flugzeugflügels.

a) Die Entbehrlichkeit besonderer Leitvorrichtungen. Aus den vorstehenden Ausführungen dürfte zu erkennen sein, daß in den meisten Fällen eine besondere feststehende Leitvorrichtung keinen Vorteil bringt, da in diesen Fällen der Flugzeugflügel selbst schon eine beträchtliche Leitwirkung besitzt. Von der Verwendung gegenläufiger Schrauben ist aus dem gleichen Grunde erst bei großen Leistungen und kleinen Drehzahlen ein Nutzen zu erwarten. Der Flugzeugflügel selbst kann aber auch wenigstens bei der Anordnung der Schrauben vor ihm als Leitvorrichtung ausgebildet werden, was durch eine unsymmetrische Flügelverwindung bewirkt werden kann, die nach den obigen Ausführungen berechnet werden kann. Im folgenden wollen wir nun die Leitwirkung eines symmetrischen Flügels untersuchen. Hieraus dürfte dann leicht zu entnehmen sein, wann die Erzielung einer Leitwirkung durch eine unsymmetrische Durchbildung am Flügel notwendig wird.

b) Die Vereinfachung der Aufgabe. Ebenso wie wir durch Abwicklung das Profilgitter einer Elementarschraube erhalten haben, so erhalten wir durch diese Abwicklung auch ein Gitter aus den zur Elementarschraube gehörigen Profilen des Tragflügels. Dieses Gitter ist aber nicht so gestaltet, daß wir ohne weiteres die Ergebnisse der in Abschn. 14 durchgeführten Untersuchung der ebenen Gitterströmung darauf anwenden können. Da es nun hier jedoch lediglich auf die Wirkung dieses Tragflügelprofilgitters als Leitvorrichtung ankommt, so genügt es offenbar, dieses Tragflügelprofilgitter durch ein ungestaffeltes Streckenprofilgitter zu ersetzen (vgl. Abb. 188). Wir umgehen also auf diese Weise die Notwendigkeit, die in der Gitterebene an den aufeinanderfolgenden Profilen entgegengesetzt gerichteten Kräfte zu untersuchen, welche ja offenbar

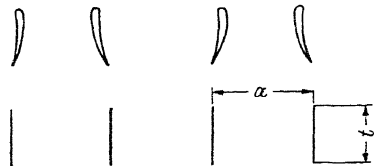



Abb. 188. Ersatz des aus Abwicklung eines zur Schraubenstrahlachse koaxialen Zylinderschnitts mit dem Tragflügel entstehenden Profilgitters und dessen Ersatz durch ein ungestaffeltes Gitter konstanter Teilung zum Zwecke der Ermittlung des Drallausgleiches.

an der Dralländerung durch die Leitvorrichtungswirkung keinen Anteil haben. Die auf diese Weise ausgeschalteten Kräfte stellen jedoch die Auftriebsänderung am Tragflügel durch die Wirkung des Schraubenstrahls dar, welche deshalb bei der Untersuchung der Auftriebsänderung durch die Einwirkung des Schraubenstrahls später noch besonders untersucht werden sollen. Der Ersatz des zweifachen Tragflügelprofilgitters durch das ungestaffelte Streckenprofilgitter genügt also offenbar wenigstens in erster Näherung zur Untersuchung der Leitwirkung eines im Schraubenstrahl liegenden Flugzeugtragflügels.

c) Berechnung der Abströmgeschwindigkeit hinter dem Tragflügel für eine Elementarschraube. Mit der Absolutgeschwindigkeit weit vor der Schraube $\mathfrak{v}_{0I}$, der Fluggeschwindigkeit, kommt die Luft auf die Schraube zu. Die Elementarschraube hat die Umfangsgeschwindigkeit u (vgl. Abb. 189).

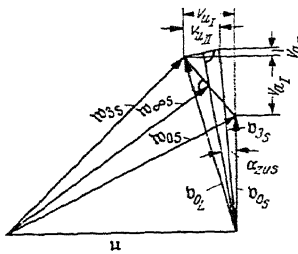



Abb. 189. Geschwindigkeitsdiagramm für die Schraube und den als Leitvorrichtung wirkenden Tragflügel bei hinreichend großem Abstand zwischen Schraube und Tragflügel.

Aus v_{0I} und u bildet sich die relative Zuströmgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{0I}$ weit vor der Schraube. Dem praktisch meist schon als beachtlich zu betrachtenden Abstand der Schraube vom Tragflügel bzw. von der Linie der Angriffspunkte der Auftriebskraft an ihm entsprechend wollen wir hier annehmen, daß dieser Abstand schon dazu genügt, daß ein Druckausgleich zwischen Schraube und Tragflügel eintritt. Dort, wo dieser Druckausgleich eingetreten ist, hat die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{3I}$, wenn wir von Reibungseinflüssen absehen, absolut die gleiche Größe wie $\mathfrak{w}_{0I}$, aber eine davon verschiedene Richtung. Die $\mathfrak{w}_{3I}$ entsprechende Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{3I}$ ist als Zuströmgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{0II}$ zur Leitvorrichtung anzusehen. Entsprechend weit hinter der Leitvorrichtung ist die Absolutgeschwindigkeit v_{3II} absolut gleich v_{0II}.

Der Auftriebsbeiwert der Flügelprofile wird durch den Dralleinfluß vermehrt bzw. vermindert infolge der durch den Dralleinfluß um $\pm\alpha_{\infty_{\text{zus}}}$ veränderten Anstellung. Diese Vermehrung ist (14, 29)

$$c_{a_{\text{zus}}} = \pm 2\pi k \sin\alpha_{\infty_{\text{zus}}}.$$

Die Auftriebsänderung durch den Dralleinfluß ist also

$$dA_{\text{zus}} = \pm 2\pi k \sin\alpha_{\infty_{\text{zus}}} \cdot \frac{\varrho}{2} v_{\infty II}^2 \, t\, dr. \qquad (23, 1)$$

Der Auftrieb kann auch durch die Zirkulation berechnet werden. Diese ist für jedes Streckenprofil unseres Ersatzgitters

$$\Gamma = a v_{u_{II}},$$

so daß
$$dA_{\text{zus}} = \pm a\, v_{u_{II}}\, \varrho\, v_{\infty_{II}}\, dr. \tag{23, 2}$$

Hiermit ergibt sich
$$v_{u_{II}} = 2\sin\alpha_{\infty_{\text{zus}}} v_{\infty_{II}}\, k \cdot \frac{\pi t}{2a}. \tag{23, 3}$$

Die Untersuchung der Gitterströmung zeigte nun, daß der Gittereinflußwert für das ungestaffelte Gitter (14, 30)
$$k = \frac{2a}{\pi t}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi t}{2a},$$

wobei $a = r\pi$ ist. Somit wird (Abb. 189)
$$v_{u_{II}} = 2\sin\alpha_{\infty_{\text{zus}}} v_{\infty_{II}}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r} = 2\,\text{tg}\,\alpha_{\infty_{\text{zus}}}\left(v_{0_I} + v_{a_I} + \frac{v_{a_{II}}}{2}\right)\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}. \tag{23, 4}$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 189 gilt ($I \equiv S$, $II \equiv L$)
$$v_{\infty_{II}} = \frac{v_{0_I} + v_{a_I} + \dfrac{v_{a_{II}}}{2}}{\cos\alpha_{\infty_{\text{zus}}}}, \tag{23, 5}$$

$$\text{tg}\,\alpha_{\infty_{\text{zus}}} = \frac{v_{u_I} - \dfrac{v_{u_{II}}}{2}}{v_{0_I} + v_{a_I} + \dfrac{v_{a_{II}}}{2}} = \frac{v_{u_I}}{v_{0_I} + v_{a_I} + \dfrac{v_{a_{II}}}{2}} - \text{tg}\,\alpha_{\infty_{\text{zus}}}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}. \tag{23, 6}$$

Somit ist
$$\text{tg}\,\alpha_{\infty_{\text{zus}}} = \frac{1}{1 + \mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}} \cdot \frac{v_{u_I}}{v_{0_I} + v_{a_I} + \dfrac{v_{a_{II}}}{2}} \tag{23, 7}$$

Also (14, 37)
$$v_{u_{II}} = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}}{1 + \mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}}\, v_{u_I}. \tag{23, 8}$$

Da nun (Abb. 189)
$$v_{a_{II}} = \text{tg}\,\alpha_{\infty_{\text{zus}}} v_{u_{II}},$$

wird
$$v_{a_{II}} = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}\right)^2}\,\frac{v_{u_I}^2}{v_{0_I} + v_{a_I} + \dfrac{v_{a_{II}}}{2}} \approx \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}\right)^2}\,\frac{v_{u_I}^2}{v_{0_I} + v_{a_I}} \tag{23, 9}$$

oder genauer
$$v_{a_{II}} = \left(v_{0_I} + v_{a_I}\right)\left\{\sqrt{1 + \frac{4\,\mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\dfrac{t}{2r}\right)^2}\,\frac{v_u^2}{(v_{0_I} + v_{a_I})^2}} - 1\right\}. \tag{23, 10}$$

d) Der durch die Leitwirkung erzielte Drehmomentenausgleich. Da (11, 13), (11, 14)

$$\frac{v_{u_I}}{u} = \frac{k_{d_I}}{2} \frac{u}{v_{m\infty_I}}, \quad \frac{v_{u_{II}}}{u} = \frac{k_{d_{II}}}{2} \frac{u}{v_{m\infty_I}}, \quad \left(k_{d_{II}} = \frac{M_{d_{II}}}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^2\, 2\pi r^4\, dr}\right),$$

$$\frac{v_{a_I}}{u} = \frac{k_{s_I}}{2} \frac{u}{v_{m\infty_I}}, \quad \frac{v_{a_{II}}}{u} = \frac{k_{s_{II}}}{2} \frac{u}{v_{m\infty_I}}, \quad \left(k_{s_{II}} = \frac{S}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^2\, 2\pi r^3\, dr}\right),$$

wird (23, 8)

$$\frac{v_{u_{II}}}{u} = \frac{k_{d_{II}}}{2} \frac{u}{v_{m\infty_I}} = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{1+\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}} \cdot \frac{k_{d_I}}{2} \frac{u}{v_{m\infty_{II}}},$$

also, wenn der Unterschied zwischen $v_{m\infty_I}$ und $v_{m\infty_{II}}$ vernachlässigt werden darf

$$\frac{k_{d_{II}}}{k_{d_I}} = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{1+\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}. \tag{23, 11}$$

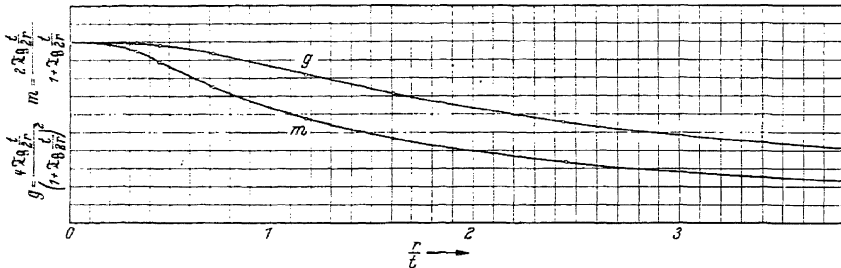



Abb. 190. Die Einflußgrößen g und m der Leitflächenwirkung der Flugzeugflügel nach der Theorie der Elementarschraube.

Da aber $\frac{M_{d_{II}}}{M_{d_I}} = \frac{k_{d_{II}}}{k_{d_I}}$, so ersieht man hieraus, daß der Drehmomentenausgleich nicht von den Konstruktionsgrößen und dem Fortschrittsgrad der Schraube abhängig ist. Die den Momentenausgleich angebende Größe

$$m = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{1+\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}} \tag{23, 12}$$

ist in Abb. 190 dargestellt. Da t immer in der Größenordnung von $2r$ ist, so ergibt sich also, daß der Momentenausgleich bei Gelten der obigen Voraussetzungen recht erheblich ist.

e) Die Schubvermehrung durch die Leitwirkung. Es wird

$$\frac{k_{s_{II}}}{k_{s_I}} = \frac{v_{a_{II}}}{v_{a_I}} = \frac{v_{a_{II}}}{v_0 + v_{a_I}} \cdot \frac{v_0 + v_{a_I}}{v_{a_I}}. \qquad (23, 13)$$

Es ist also, mit (12, 25), (12, 26), (23, 10)

$$g = \frac{4\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}\right)^2}, \qquad \frac{v_{a_I}}{v_0} = \sqrt{1 + c_{s_I}} - 1, \qquad \frac{v_{u_I}}{u} = 1 - \sqrt{1 - k_{s_I}},$$

$$k_{s_{II}} = k_{s_I} \cdot \frac{\sqrt{1 + c_{s_I}}}{\sqrt{1 + c_{s_I}} - 1} \left\{ \sqrt{1 + \frac{g}{\lambda^2} \frac{(1 - \sqrt{1 - k_{s_I}})^2}{1 + c_{s_I}}} - 1 \right\} \qquad (23, 14)$$

oder angenähert
$$k_{s_{II}} \approx g \frac{k_{s_I}^2}{8} \cdot \frac{k_{s_I}}{\lambda^2 \{1 + c_s - \sqrt{1 + c_s}\}}, \qquad (23, 15)$$

wobei für $\lambda = 0$ der letzte Faktor 1 wird.

Hieraus läßt sich die Schubvermehrung

$$d S_{II} = k_{s_{II}} \cdot \frac{\varrho}{2} u^2 \cdot 2 \pi r\, dr$$

leicht berechnen. Die bei der Rechnung nötige Größe $g = \frac{4\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}\right)^2}$ ist in Abb. 190 dargestellt.

f) Einfluß der Leitwirkung auf den Wirkungsgrad. Der Wirkungsgrad unter Berücksichtigung der Leitwirkung ist

$$\eta = \lambda \frac{k_s}{k_d} = \lambda \frac{k_{s_I} + k_{s_{II}}}{k_d} = \lambda \frac{k_{s_I}}{k_{d_I}} + \lambda \frac{k_{s_{II}}}{k_{d_I}} = \eta_I + \eta_{II}. \qquad (23, 16)$$

Die Größe $\eta_I = \frac{1 + \sqrt{1 - k_{s_I}}}{1 + \sqrt{1 + c_{s_I}}}$ ist der Wirkungsgrad der freifliegenden Elementarschraube. Die Größe η_{II} ist die Vermehrung des Wirkungsgrades durch die Leitwirkung. Es wird (23, 9)

$$\eta_{II} = \lambda \frac{k_{s_{II}}}{k_{d_I}} = \lambda \frac{v_{a_{II}}}{v_{u_I}} \approx \lambda \frac{2\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}\right)^2} \cdot \frac{v_{u_I}}{v_{0_I} + v_{a_I}}. \qquad (23, 17)$$

Es ist aber (12, 25), (12, 26)

$$\frac{v_{u_I}}{u} = 1 - \sqrt{1 - k_{s_I}}, \qquad \frac{v_{a_I}}{v_{0_I}} = \sqrt{1 + c_{s_I}} - 1, \qquad \frac{v_{0_I}}{u} = \lambda,$$

so daß mit $\frac{4\,\mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}}{\left(1 + \mathfrak{Tg}\,\frac{t}{2r}\right)^2} = g$

$$\eta_{II} \approx g \frac{1 - \sqrt{1 - k_{s_I}}}{2\sqrt{1 + c_{s_I}}}. \qquad (23, 18)$$

Hiermit wird
$$\eta \approx \frac{1 + \sqrt{1 - k_{s_I}}}{1 + \sqrt{1 + c_{s_I}}} + g \frac{1 - \sqrt{1 - k_{s_I}}}{2\sqrt{1 + c_{s_I}}}.$$

Da k_s und c_s nur wenig größer als k_{sI} und c_{sI} sind und da man offenbar im zweiten Quotienten $2\sqrt{1+c_{sI}} \approx 1+\sqrt{1+c_{sI}}$ setzen darf, so kann man, ohne einen wesentlichen Fehler zu machen, insbesondere da sich auch noch die einzelnen Vernachlässigungen zum Teil gegenseitig aufheben, schreiben

$$\eta = \frac{1+\sqrt{1-k_s}}{1+\sqrt{1+c_s}} + g\,\frac{1-\sqrt{1-k_s}}{1+\sqrt{1+c_s}},$$

$$\eta = \frac{1+g}{1+\sqrt{1+c_s}} + \frac{(1-g)\sqrt{1-k_s}}{1+\sqrt{1+c_s}}. \tag{23, 19}$$

Für $g = 1$ ist der Momentenausgleich vollkommen und η, wie es sein muß, ist (12, 28)

$$\eta = \frac{2}{1+\sqrt{1+c_s}}.$$

Für $g = 0$ ist keine Leitwirkung vorhanden und η, wie es sein muß, ist (12, 27)

$$\eta = \frac{1+\sqrt{1-k_s}}{1+\sqrt{1+c_s}}.$$

F. Ungleichförmigkeitseinflüsse.

24. Wirkung eines Verdrängungsmitstroms.

a) Die Ursache der Verdrängungsströmung. Da die Luftschraube praktisch immer in unmittelbarem Zusammenhange mit dem Flugzeug steht, so befindet sie sich in einer durch Flugzeugrumpf und Flugzeugflügel beeinflußten Strömung. Unsere bisherigen Untersuchungen haben sich also nur auf einen idealisierten Fall, nämlich den der freifliegenden Luftschraube, bezogen. Die hierbei erlangten Erkenntnisse sind zwar wesentlich, bedürfen aber nun noch einer Ergänzung bezüglich der Wirkung dieser Nebeneinflüsse [Lit. 142, 144, 145, 159].

Die durch das Flugzeug hervorgerufenen Änderungen der Strömung sind im allgemeinen über die Schraubenkreisebene ganz ungleichmäßig verteilt und bestehen nicht nur in Änderungen der axialen Durchflußgeschwindigkeit, sondern auch in solchen der Tangentialkomponenten und ferner auch der Radialkomponenten. Letztere können als unwesentlich praktisch immer vernachlässigt werden. Wird infolge der Störung der Strömung durch das Flugzeug die Durchflußgeschwindigkeit verringert, so spricht man von einem Verdrängungsmitstrom, wird sie vermehrt, so spricht man von einem Verdrängungsgegenstrom. Ein Verdrängungsmitstrom ist im allgemeinen vor dem Flugzeugrumpf und vor den Motorgondeln vorhanden, ein Verdrängungsgegenstrom im allgemeinen über den Flugzeugflügeln.

Wir wollen wieder eine Elementarschraube betrachten. Der Mittelwert der Tangentialkomponenten der Verdrängungsströmung über den Umfang der Elementarschraube verschwindet im allgemeinen, weil die Zuströmung als drallfrei angesehen werden kann. Wir untersuchen

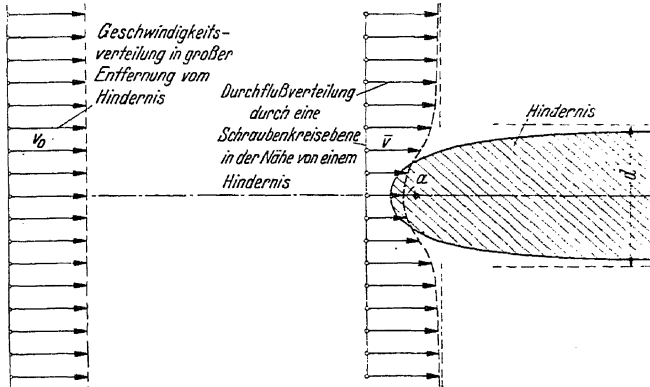



Abb. 191. Erläuterung des Verdrängungsmitstroms: Bei fehlender Reibung ist die Verteilung der Geschwindigkeit in großer Entfernung von einem Hindernis v_0 = konst. und in Nähe von einem Hindernis $\bar{v} = v_0 - v_n$. v_n heißt die Mitstromgeschwindigkeit.

daher zunächst eine Elementarschraube mit einer um einen über den Umfang konstanten Betrag geänderten axialen Zuflußgeschwindigkeit (vgl. Abb. 191).

b) Die Berechnung des Schubs der Elementarschraube. Der wirksame Schub dS der Elementarschraube berechnet sich nach dem Impulssatz aus der Geschwindigkeitsänderung v_a der zeitlich durchströmenden Masse weit hinter der Schraube gegenüber der Geschwindigkeit weit vor der Schraube. Es ist also (Abb. 192)

$$dS = d\dot{m} \cdot v_a. \tag{24, 1}$$

Abb. 192. Geschwindigkeitsdiagramm einer Elementarschraube unter Einfluß des Verdrängungsmitstroms.

Auf die Elementarschraube selbst wirkt aber ein anderer Schub $d\bar{S}$, welcher sich ebenfalls nach dem Impulssatz berechnet und so groß ist, als wäre die durch die Elementarschraube unbeeinflußte Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ an der Stelle der Elementarschraube ihre Anströmgeschwindigkeit. Die entsprechende Geschwindigkeitsänderung wäre $\bar{v}_a$. Somit wäre, da die zeitlich durchströmende Masse $d\bar{\dot{m}} = d\dot{m}$, die gleiche ist

$$d\bar{S} = d\dot{m} \cdot \bar{v}_a. \tag{24, 2}$$

Es ist also

$$\frac{dS}{d\bar{S}} = \frac{v_a}{\bar{v}_a}. \tag{24, 3}$$

Der Unterschied dieser Schübe $dS_i = d\bar{S} - dS$ ist als eine innere Kraft anzusehen, welche zwischen Elementarschraube und Flugzeug wirkt und mit Schraubensog bezeichnet wird. Der Sog ist also

$$dS_i = d\dot{m}(\bar{v}_a - v_a) = d\dot{m}\,\bar{v}_a\left(1 - \frac{v_a}{\bar{v}_a}\right). \tag{24, 4}$$

Die Geschwindigkeit $\bar{v}_a$ und den Schublagerschub $d\bar{S}$ können wir nach den in Abschnitt 16 gemachten Ausführungen berechnen, wenn wir v_0 durch $\bar{v}_0 = v_0 - \Delta v_0$ ersetzen. Um den Sog $d\Delta S$ und den wirksamen Schub berechnen zu können, müssen wir v_a bestimmen.

Die von den Randscheiben der Elementarschraube ausgehenden Stromlinien sind als freie Strahlgrenzen, d. h. als entsprechende Wirbelflächen anzusehen. Im Innern und im Äußeren gilt bei Reibungsfreiheit die Druckgleichung, doch ist innen und außen die Druckkonstante verschieden, da dem Strahlinneren durch die Schraube Energie zugeführt wurde. Mäßig weit hinter der Schraube ist der

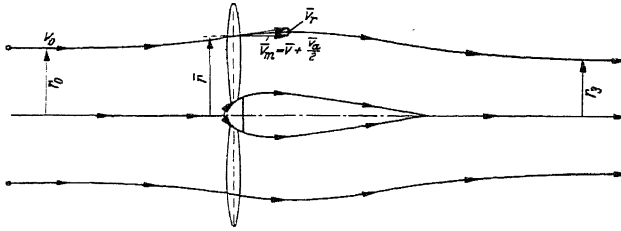



Abb. 193. Strömung weit vor, in und weit hinter der Schraubenkreisebene.

Unterschied dieser Druckkonstanten der gleiche wie sehr weit hinter der Schraube. Somit gilt, wenn $\bar{v}_0$ die Geschwindigkeit im Mitstrom bezeichnet,

$$(v_0 + v_a)^2 + v_u^2 - v_0^2 = (\bar{v}_0 + \bar{v}_a)^2 + \bar{v}_u^2 - \bar{v}_0^2. \tag{24, 5}$$

Ist der Abstand von der Achse mäßig weit hinter der Schraube $\bar{r}_3$, weit hinter der Schraube r_3 (Abb. 193), so gilt, da sich die Zirkulation nicht ändern kann,

$$\Gamma = 2\pi r_3 \cdot v_u = 2\pi \bar{r}_3 \bar{v}_u\,,$$

$$\bar{v}_u^2 \cdot \left(\frac{\bar{r}_3}{r_3}\right)^2 = v_u^2\,,$$

oder mit $\left(\frac{\bar{r}_3}{r_3}\right)^2 = \varkappa_3$

$$v_u^2 = \varkappa_3 \bar{v}_u^2\,.$$

Indem wir alle nunmehr bekannten Größen auf die rechte Seite der Gleichung bringen, erhalten wir

$$(v_a + v_0)^2 = 2\bar{v}_a\bar{v}_0 + \bar{v}_a^2 - \bar{v}_u^2(\varkappa_3 - 1) + v_0^2\,.$$

Es ist also

$$v_a = \sqrt{2\bar{v}_a\bar{v}_0 + \bar{v}_a^2 - \bar{v}_u^2(\varkappa_3 - 1) + v_0^2} - v_0\,. \tag{24, 6}$$

Dieser Ausdruck ist reichlich unbequem. Weil praktisch, soweit es sich nicht um die Standverhältnisse oder deren Nachbarschaft handelt, $\bar{v}_a^2 \ll \bar{v}^2$, $\bar{v}_u^2 \ll v^2$, kann man aber auch näherungsweise setzen

$$v_a \approx \sqrt{2\bar{v}_a\bar{v}_0 + v_0^2} - v_0 \approx \frac{\bar{v}_a\bar{v}_0}{v_0},$$

$$\frac{v_a}{\bar{v}_a} \approx \frac{\bar{v}_0}{v_0}. \qquad (24, 7)$$

Der Sog ist damit in erster Näherung (24, 4)

$$dS_i = d\dot{m}\,\bar{v}_a\left(1 - \frac{\bar{v}_0}{v_0}\right) = d\dot{m}\,\bar{v}_a\,\frac{v_0 - \bar{v}_0}{v_0}$$

oder mit $d\dot{m}\,\bar{v}_a = d\bar{S}$, $v_0 - \bar{v}_0 = v_n$,

$$dS_i = d\bar{S}\cdot\frac{v_n}{v_0} = dS\,\frac{v_n}{\bar{v}_0} \qquad (24, 8)$$

v_n wird mit Mitstromgeschwindigkeit bezeichnet. Weiter ergibt sich

$$\frac{dS}{d\bar{S}} = \frac{\bar{v}_0}{v_0}. \qquad (24, 9)$$

Ein genaueres Ergebnis erhält man, wenn man die oben gefundene Beziehung (24, 6) für v_a benutzt. Man formt dabei zweckmäßig noch um. Mit Hilfe von (12, 25), (12, 26)

$$2\,\frac{\bar{v}_a}{\bar{v}_0}\left(1 + \frac{\bar{v}_a}{2\,\bar{v}_0}\right) = \bar{c}_s, \qquad \frac{\bar{v}_u}{\bar{u}} = 1 - \sqrt{1 - \bar{k}_s}, \qquad \frac{\bar{v}_0}{u} = \bar{\lambda}$$

bekommt man

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_0}{v_0}\right)^2\left(\bar{c}_s - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}\left(1 - \sqrt{1 - \bar{k}_s}\right)^2(\varkappa_3 - 1)\right) + 1} - 1, \qquad (24, 10)$$

oder wenn man in erster Näherung $1 - \sqrt{1 - \bar{k}_s} \approx \bar{k}_s/2$ setzt,

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_0}{v_0}\right)^2\bar{c}_s\left(1 - \frac{\bar{k}_s}{4}(\varkappa_3 - 1)\right) + 1} - 1, \qquad (24, 11)$$

während nach den in Abschnitt 12 gemachten Ableitungen (12, 25)

$$\frac{\bar{v}_a}{\bar{v}_0} = \sqrt{\bar{c}_s + 1} - 1 \qquad (24, 12)$$

zu setzen ist. Hiermit ist $v_a/\bar{v}_a$ bekannt, wenn man den Wert $\varkappa_3$ kennt. Er ist im wesentlichen gleich dem entsprechenden Wert einer Gesamtschraube und kann daher gleich gesetzt werden dem Verhältnis der Schraubenstrahlquerschnitte mäßig weit und sehr weit hinter der Schraube, so daß

$$\varkappa_3 = \frac{v + v_a}{\bar{v} + \bar{v}_a} = \left(\frac{v_u}{\bar{v}_u}\right)^2. \qquad (24, 13)$$

Führt man den Wert v_u hieraus in Gleichung (24, 5) ein, so ergibt sich für v_a wieder eine quadratische Gleichung, deren Auflösung

$$v_a = \sqrt{2\bar{v}\bar{v}_a + \bar{v}^2 + \bar{v}_u^2\left(1 + \frac{\bar{v}_u^2}{4(\bar{v} + \bar{v}_a)^2}\right) + v^2} - \left(v + \frac{\bar{v}_u^2}{2(\bar{v} + \bar{v}_a)}\right) \qquad (24, 14)$$

und mit Einführung von $\bar{c}_s$, $\bar{v}_u/\bar{u}$, $\bar{\lambda}$ (12, 25), (12, 26)

$$\left.\begin{aligned}\frac{v_a}{v} = \sqrt{\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2\left\{\bar{c}_s + \frac{(1-\sqrt{1-\bar{k}_s})^2}{\bar{\lambda}^2}\left(1 + \frac{(1-\sqrt{1-\bar{k}_s})^2}{4\bar{\lambda}^2(1+\bar{c}_s)}\right)\right\} + 1}\\ - \left(1 + \frac{\frac{\bar{v}}{v}(1-\sqrt{1-\bar{k}_s})^2}{2\bar{\lambda}^2\sqrt{1+\bar{c}_s}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (24, 15)$$

ergibt. In erster Näherung darf wieder $1 - \sqrt{1-\bar{k}_s} = \bar{k}_s/2$ gesetzt werden. Hiermit ergibt sich

$$\frac{v_a}{v} = \sqrt{\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2 \bar{c}_s\left\{1 + \frac{\bar{k}_s}{4}\left(1 + \frac{\bar{c}_s\bar{k}_s}{16(1+\bar{c}_s)}\right)\right\} + 1} - \left(1 + \frac{\bar{v}}{v}\,\frac{\bar{c}_s\bar{k}_s}{8\sqrt{1+\bar{c}_s}}\right) \quad (24, 16)$$

und damit

$$\frac{dS}{d\bar{S}} = \frac{v_a}{\bar{v}_a} = \frac{v}{\bar{v}}\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2 \bar{c}_s\left\{1 + \frac{\bar{k}_s}{4}\left(1 + \frac{\bar{c}_s\bar{k}_s}{16(1+\bar{c}_s)}\right)\right\} + 1} - \left(1 + \frac{\bar{v}}{v}\,\frac{\bar{c}_s k_s}{8\sqrt{1+\bar{c}_s}}\right)}{\sqrt{\bar{c}_s+1} - 1}. \quad (24, 17)$$

Bei kleinem Schubbelastungsgrad c_s ergibt diese Lösung die gleichen Ergebnisse wie die Näherungsgleichung (24, 9)

$$\frac{dS}{d\bar{S}} = \frac{v_a}{\bar{v}_a} = \frac{\bar{v}}{v}\,.$$

Für größeren Schubbelastungsgrad können die Ergebnisse unter Umständen beachtlich voneinander abweichen, und zwar liefert für $\bar{v}/v < 1$ die genauere Lösung etwas größere Werte als die Näherungslösung. Z. B. für $\bar{v}/v = 0{,}8$, $\bar{c}_s = 0{,}5$, $\bar{\lambda} = 0{,}5$ wird nach der genaueren Lösung

$$\frac{dS}{d\bar{S}} = \frac{v_a}{\bar{v}_a} = \frac{1}{0{,}8}\cdot\frac{\sqrt{0{,}64\cdot 0{,}5\left\{1 + \frac{0{,}125}{4}\left(1 + \frac{0{,}5\cdot 0{,}125}{16\cdot 1{,}5}\right)\right\} + 1} - \left(1 + 0{,}8\,\frac{0{,}5\cdot 0{,}125}{8\sqrt{1{,}5}}\right)}{\sqrt{1{,}5} - 1} = 0{,}820,$$

also etwas größer als die Näherungslösung, welche nur 0,8 ergibt.

Am Stande und für kleine $\bar{\lambda}$ wird $\bar{c}_s$ sehr groß. Wäre $\bar{v}/v$ unabhängig vom Fortschrittsgrad, dann dürfte man die endlichen Größen gegen $\bar{c}_s$ vernachlässigen und erhielte damit (24, 12), (24, 16)

$$\frac{v_a}{v} = \frac{\bar{v}}{v}\,\bar{c}_s^{1/2}\sqrt{1 + \frac{\bar{k}_s}{2}\left(1 + \frac{\bar{k}_s}{8}\right)} - \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)\bar{c}_s^{1/2}\cdot\frac{k_s}{4} \sim \frac{\bar{v}}{v}\,\bar{c}_s^{1/2},$$

$$\frac{\bar{v}_a}{\bar{v}} = \bar{c}_s^{1/2},$$

und damit

$$\frac{dS}{d\bar{S}} = \frac{v_a}{\bar{v}_a} = 1\,.$$

Dieses Ergebnis ist einleuchtend, da unter der gemachten Voraussetzung bei verschwindendem v auch $\bar{v}$ verschwindet und damit der Schub

tatsächlich ungeändert bleiben muß. In Wirklichkeit ist $\bar{v}$ aber durch die Rückwirkung der Zelle auf die Schraube als beeinflußt anzunehmen. Die Geschwindigkeit $\bar{v}$ im Mitstrom ist

$$\bar{v} = v - v_n . \tag{24, 18}$$

Hierbei darf die Mitstromgeschwindigkeit v_n gesetzt werden

$$v_n = \psi_0 v + \psi_1 \bar{v}_a , \tag{24, 19}$$

wenn man sich v_n aus zwei Anteilen zusammengesetzt denkt, deren einer der Fluggeschwindigkeit v und deren anderer der Zusatzgeschwindigkeit $\bar{v}_a$ verhältig angenommen wird. ψ_0 ist also festzustellen aus den Strömungsverhältnissen am Orte der Schraube, wenn diese keinen Schub erzeugt bzw. abwesend gedacht wird.

Damit wird

$$\bar{v} = (1 - \psi_0)\, v - \psi_1 \bar{v}_a = (1 - \psi_0)\, v - \psi_1 \frac{\bar{v}_a}{\bar{v}} \cdot \bar{v} ,$$

$$\bar{v} = \frac{(1 - \psi_0)\, v}{1 + \psi_1 \frac{\bar{v}_a}{\bar{v}}} , \tag{24, 20}$$

mit

$$(1 - \psi_0) = \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)_0 , \qquad \frac{\bar{v}_a}{\bar{v}} = \sqrt{1 + \bar{c}_s} - 1$$

also

$$\frac{\bar{v}}{v} = \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)_0 \frac{1}{(1 - \psi_1) + \psi_1 \sqrt{1 + \bar{c}_s}} . \tag{24, 21}$$

Hierbei ist $(\bar{v}/v)_0$ das Mitstromverhältnis, das sich bei fehlender Schraube ergibt. Bei Druckschraubenanordnung dürfte in erster Näherung $\psi_1 \sim 0$ sein. Bei der üblichen Zugschraubenanordnung darf bei Fehlen besserer Unterlagen

$$\psi_1 \approx \psi_0 \qquad \text{also} \qquad 1 - \psi_1 = \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)_0$$

gesetzt werden. Damit ergäbe sich für Zugschrauben

$$\frac{\bar{v}}{v} = \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)_0 \frac{1}{\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)_0 + \left(1 - \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)_0\right)\sqrt{1 + \bar{c}_s}} = \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)_0 - 1\right)\sqrt{1 + \bar{c}_s}} . \tag{24, 22}$$

Besonders in der Nähe der Standverhältnisse wird $\bar{v}$ von ψ_1 abhängig. Für $\lambda = 0$, d. h. $v = 0$ wird (24, 18)

$$\bar{v} = -\psi_1 \bar{v}_a . \tag{24, 23}$$

Hierfür ist also (24, 5)

$$v_a^2 + v_u^2 = \bar{v}_a^2 (1 - \psi_1)^2 + \bar{v}_u^2 - \psi_1^2 \bar{v}_a^2$$

und mit $v_u^2 = \bar{v}_u^2 \varkappa_3$

$$v_a^2 = \bar{v}_a^2 (1 - 2\psi_1) - \bar{v}_u^2 (\varkappa_3 - 1) ,$$

$$\frac{v_a}{\bar{v}_a} = \sqrt{1 - 2\psi_1 - \left(\frac{\bar{v}_u}{\bar{v}_a}\right)^2 (\varkappa_3 - 1)} . \tag{24, 24}$$

Nun ist aber (11, 16), (12, 25), (12, 26), (12, 27)

$$\frac{\bar v_u}{\bar v_a} = \frac{1}{\bar\lambda}\,\frac{1-\sqrt{1-\bar k_s}}{\sqrt{1-\bar c_s}-1} = \bar\lambda\,\frac{1+\sqrt{1+\bar c_s}}{1+\sqrt{1-\bar k_s}} = \frac{\bar\lambda}{\bar\eta} = \frac{\bar k_d}{\bar k_s},$$

also

$$\frac{v_a}{\bar v_a} = \sqrt{1-2\psi_1-\left(\frac{\bar k_d}{\bar k_s}\right)^2(\varkappa_3-1)}\;. \qquad (24, 25)$$

Für $\varkappa_3$ dürfen wir mit $v = 0$ setzen (24, 13), (24, 23)

$$\varkappa_3 = \frac{v_a}{\bar v_a}\,\frac{1}{1-\psi_1}$$

oder in erster Näherung für kleine ψ_1 mit $\frac{v_a}{\bar v_a} \approx 1-\psi_1$ (24, 7)

$$\varkappa_3 - 1 = 0$$

und damit (24, 25)

$$\frac{v_a}{\bar v_a} = \sqrt{1-2\psi_1} \backsim 1-\psi_1\,. \qquad (24, 26)$$

Für Zugschrauben mit $1-\psi_1 = \left(\frac{\bar v}{v}\right)_0$ ist also am Stande in erster Näherung

$$\frac{dS}{d\bar S} = \frac{v_a}{\bar v_a} = \left(\frac{\bar v}{v}\right)_0. \qquad (24, 27)$$

Für Zugschrauben dürfte daher in allen Betriebszuständen

$$\frac{dS}{d\bar S} = \left(\frac{\bar v}{v}\right)_0$$

eine gute Annäherung darstellen.

Die Sogeinflußziffer

$$\xi = \frac{dS_i}{d\bar S} = \frac{d\bar S - dS}{d\bar S}$$

ist damit für Zugschrauben üblicher Anordnung

$$\xi = 1 - \left(\frac{\bar v}{v}\right)_0,$$

wobei man bei Anwendung dieses Ergebnisses auf die Gesamtschraube unter $\bar v$ den Mittelwert der Geschwindigkeit im Mitstrom über den Schraubenkreis zu verstehen hat.

c) Einfluß auf den Wirkungsgrad. Der ideale Wirkungsgrad kann aus den Austrittsverlusten berechnet werden. Diese sind aber die gleichen wie bei einer freifliegenden Elementarschraube gleichen Schubs dS und gleicher Zuströmgeschwindigkeit v_0 und gleicher Drehzahl mit entsprechend den Mitstromverhältnissen geänderter Durchtrittsfläche dF und geändertem Radius r. Auf die Verhältnisse dieser gleichwertigen freifliegenden Schraube bezogen wird also der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{1+\sqrt{1-k_s}}{1+\sqrt{1+c_s}},$$

k_s und c_s bedeuten hier Schubziffer und Schubbelastungsgrad der gleichwertigen freifliegenden Schraube. Bezogen auf die Verhältnisse im Mitstrom ist aber mit

$$\frac{d\bar{F}\cdot dS}{dF\cdot d\bar{S}} = \frac{v+\frac{v_a}{2}}{\bar{v}+\frac{\bar{v}_a}{2}}\cdot\frac{v_a}{\bar{v}_a}\approx 1\,, \qquad \left(\frac{\bar{u}}{u}\right)^2 = \varkappa_2\,,$$

für nicht zu kleinen Fortschrittsgrad oder zu große Belastung

$$c_s = c_{s_n}\frac{d\bar{F}}{dF}\cdot\frac{dS}{d\bar{S}} = c_{s_n}\,,$$

$$k_s = \bar{k}_s\frac{d\bar{F}}{dF}\cdot\frac{dS}{d\bar{S}}\left(\frac{\bar{u}}{u}\right)^2 = \bar{k}_s\varkappa_2\,,$$

wobei

$$c_s = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2}v^2\,dF}\,,\qquad \bar{c}_s = \frac{d\bar{S}}{\frac{\varrho}{2}\bar{v}^2\,d\bar{F}}\,,\qquad c_{s_n} = \frac{d\bar{S}}{\frac{\varrho}{2}v^2\,d\bar{F}}\,,$$

$$k_s = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2}u^2\,dF}\,,\qquad \bar{k}_s = \frac{d\bar{S}}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2\,d\bar{F}}\,,\qquad k_{s_n} = \frac{d\bar{S}}{\frac{\varrho}{2}u^2\,d\bar{F}}\,,$$

als unterscheidende Schreibweise zugrunde gelegt sei, und somit

$$\eta = \frac{1+\sqrt{1-\varkappa_2\bar{k}_s}}{1+\sqrt{1+c_{s_n}}}\,,$$

$\bar{k}_s$ und c_{s_n} bedeuten hierbei Schubziffer und Schubbelastungsgrad der Mitstromschraube, bezogen auf ihre Abmessungen und ihre Umfangsgeschwindigkeit $\bar{u}$ bzw. die Fluggeschwindigkeit v_0. $\varkappa_2$ ist im wesentlichen gleich dem entsprechenden Werte einer Gesamtschraube, also

$$\varkappa_2 = \frac{v+v_a/2}{\bar{v}+\bar{v}_a/2}\approx\frac{v}{\bar{v}}$$

und damit

$$\eta = \frac{1+\sqrt{1-\frac{v}{\bar{v}}\bar{k}_s}}{1+\sqrt{1+c_{s_n}}}\,. \tag{24, 28}$$

Ist also $\frac{\bar{v}}{v} < 1$, so wird der ideale Wirkungsgrad ein wenig kleiner als der ideale Wirkungsgrad $\bar{\eta}$ einer gleich großen freifliegenden Schraube des Schubs $d\bar{S}$ und gleicher Drehzahl, und zwar gerade soviel, als wäre der Schubbelastungsgrad der gleiche geblieben und der Fortschrittsgrad um das $\sqrt{\frac{v}{\bar{v}}}$-fache vergrößert.

d) Berücksichtigung der Reibung. Durch die Verdrängungsströmung wird bezüglich der Reibung an den Flügelprofilen der Elementarschraube nichts Wesentliches geändert. Es ist also (13, 48)

$$= \frac{1 - \varepsilon \frac{\bar\lambda}{\bar\eta}}{1 + \varepsilon \frac{\bar\eta}{\;}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\bar\tau (1 + \bar\lambda^2)^{3/2}}{\;}} . \qquad (24, 29)$$

Hierbei ist

$$\tau = c_w \frac{\sigma}{2 \pi \bar r},$$

$$\bar\lambda = \frac{\bar v}{\bar r w} = \frac{v}{\bar r w} \cdot \frac{\bar v}{v},$$

$$k_d = \frac{dN}{\frac{\varrho}{2} \bar u^3 \, d\bar F}$$

25. Die Elementarschraube im Reibungsmitstrom.

a) Die Ursache eines Reibungsmitstroms. Durch den Reibungswiderstand des Flugzeugrumpfes und der Flügel wird die Strömung in der Grenzschicht verzögert und die hinten abströmende Grenzschicht bildet ein Gebiet verringerter Strömungsgeschwindigkeit. Dieses Mitstromgebiet ist also durch die Reibung bedingt und dieser heißt deshalb Reibungsmitstrom. In unmittelbarer Nähe des Flugzeugs ist dieser natürlich auch durch den Verdrängungsmitstrom noch beeinflußt. Man kann nun aber nicht den Reibungsmitstrom etwa dadurch bestimmen, daß man den Unterschied gegenüber dem Verdrängungsmitstrom bestimmt. Man muß die Größe der Geschwindigkeit im Reibungsmitstrom vielmehr aus dem Unterschied des Energieinhalts der Strömung im Mitstromgebiet gegenüber dem der verlustfreien Strömung berechnen. Es möge im Mitstrom der Druck $\bar p$ und die Geschwindigkeit $\bar v_r$ herrschen (vgl. Abb. 194). In der ungestörten Strömung sei der Druck p_0, die Geschwindigkeit v_0. Dann

Abb. 194. Erläuterung des Reibungsmitstroms: Bei Vorhandensein von Reibung ist die Verteilung der Geschwindigkeit bzw. des Druckes in großer Entfernung von einem Hindernis $v = v_0 =$ konst., $p = p_0 =$ konst., mit Ausnahme eines Gebietes hinter dem Körper, in welchem $v = \bar v$ und $p = \bar p$ ist. Mit zunehmender Entfernung vom Körper verbreitet sich das Gebiet immer mehr, wobei $\bar v \to v_0$ und $\bar p \to p_0$ wird.

ist der Gesamtdruckverlust gegeben durch

$$\Delta p_{\text{ges}} = \left(p_0 + \frac{\varrho}{2} v_0^2\right) - \left(\bar{p} + \frac{\varrho}{2} \bar{v}_r^2\right). \tag{25, 1}$$

Die Geschwindigkeit $\bar{v}_r$ im ungestörten Reibungsmitstrom $(p_0 = \bar{p}_r)$ ist damit gegeben durch

$$\frac{\varrho}{2} (v_0^2 - \bar{v}_r^2) = \Delta p_{\text{ges}}, \tag{25, 2}$$

also

$$\bar{v}_r = \sqrt{v_0^2 - \frac{\Delta p_{\text{ges}}}{\varrho/2}}. \tag{25, 3}$$

Auch der Reibungsmitstrom ist natürlich allgemein nicht gleichmäßig über die Schraubenkreisebene verteilt. Über den Umfang einer Elementarschraube wird jedoch wohl meist im Mittel die Umfangskomponente verschwinden. Der Untersuchung wird im folgenden eine konstante Verteilung der Geschwindigkeit des Reibungsmitstroms über den Umfang der Elementarschraube zugrunde gelegt. Von der Störung durch einen Verdrängungsmitstrom wird zunächst abgesehen. Dann verändert sich aber die Entfernung der die Elementarschraube durchströmenden Luft von der Schraubenachse nach dem Verlassen der Elementarschraube nicht mehr [Lit. 142, 144, 145].

b) Einfluß des Reibungsmitstroms auf Schub und Leistung. Schub und Leistung der Elementarschraube im Reibungsmitstrom sind genau so groß, wie wenn sich die Schraube statt mit der Fluggeschwindigkeit v_0 mit der kleineren Geschwindigkeit $\bar{v}_r$ bei gleicher Drehzahl fortbewegte. Man bekommt also Schub und Leistung nach den in Abschn. 16 gemachten Ausführungen, wenn man statt v_0 die Geschwindigkeit $\bar{v}_r$ und statt $\lambda = v_0/u$ den relativen Fortschrittsgrad $\bar{\lambda} = \bar{v}_r/u$ in die abgeleiteten Gleichungen einsetzt. Auf die tatsächliche Fortschrittsgeschwindigkeit bezogen ist also

$$\lambda = \bar{\lambda} \cdot \frac{v_0}{\bar{v}_r},$$

$$k_s = \bar{k}_s, \qquad c_s = \bar{c}_s \left(\frac{\bar{v}_r}{v_0}\right)^2,$$

$$k_d = \bar{k}_d.$$

Hiermit erhält man statt des Wirkungsgrades den Vortriebsgütegrad

$$\eta_g = \lambda \frac{k_s}{k_d} = \frac{v_0}{\bar{v}_r} \cdot \bar{\lambda} \frac{\bar{k}_s}{\bar{k}_d} = \frac{v_0}{\bar{v}_r} \cdot \bar{\eta}. \tag{25, 4}$$

Da $\bar{\eta} = \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{k}_s}}{1 + \sqrt{1 + \bar{c}_s}}$ der Wirkungsgrad der Elementarschraube in ungestörter Strömung beim Fortschrittsgrad $\bar{\lambda} = \bar{v}_r/u$ ist, so ergibt sich also, daß der Vortriebsgütegrad η_g das $v_0/\bar{v}_r$-fache davon ist.

Mit Hilfe des auf die wirkliche Fluggeschwindigkeit bezogenen Schubbelastungsgrades c_s wird der Vortriebsgütegrad

$$\eta_g = \frac{v_0}{\bar v_r} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\bar v_r}\right)^2 c_s}} = \frac{v_0}{\bar v_r} \frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\bar v_r}\right)^2 c_s}} \cdot \eta = \psi \cdot \eta\,. \quad (25,5)$$

Bei gegebenem Schubbelastungsgrad und Fortschrittsgrad wird also η_g um so größer, je größer $v/\bar v_r$ ist. Die Verbesserung ist

$$\psi = \frac{v_0}{\bar v_r} \frac{1 + \sqrt{1 + c_s}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\bar v_r}\right)^2 c_s}}\,. \quad (25,6)$$

c) Störung durch den Verdrängungsmitstrom. Aus der Gesamtgeschwindigkeit im Mitstrom $\bar v_0$ bekommt man die Geschwindigkeit des Verdrängungsmitstromes $\bar v_v$ mit Hilfe der schon bestimmten Geschwindigkeit im Reibungsmitstrom $\bar v_r$ zu

$$\bar v_v = v_0 \frac{\bar v_0}{\bar v_r}\,.$$

Die der Zuströmgeschwindigkeit $\bar v_0$ entsprechende Leistungsaufnahme dN der Elementarschraube läßt sich wieder ohne weiteres berechnen. Der ebenso zu errechnende Schub $d\bar S$ ist aber um den Sog $dS_i = d\bar S - dS$ verändert. Diese Änderung berechnet sich aber in gleicher Weise, wie wenn der Reibungsmitstrom nicht vorhanden wäre. Es ist (24, 1), (24, 2), (24, 3)

$$d\bar S = d\dot m \bar v_a\,, \qquad \frac{dS}{d\bar S} = \frac{v_a}{\bar v_a}$$
$$dS = d\dot m v_a\,,$$

und (24, 6), wenn statt v_0 nunmehr $\bar v_r$ gesetzt wird,

$$v_a = \sqrt{2 \bar v_a \bar v_0 + \bar v_a^2 - \bar v_u^2(\varkappa_3 - 1) + \bar v_r^2} - \bar v_r \quad (25,7)$$

oder angenähert

$$\frac{v_a}{\bar v_a} \approx \frac{\bar v_0}{\bar v_r} = \frac{\bar v_v}{v_0}\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{dS}{d\bar S} \approx \frac{\bar v_0}{\bar v_r}\,. \quad (25,8)$$

Der Vortriebsgütegrad wird

$$\eta_g = \frac{v_0}{\bar v_r} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\bar v_r}{\bar v_0} k_s}}{1 + \sqrt{1 + \frac{v_0}{\bar v_r} c_{s_n}}}\,. \quad (25,9)$$

26. Die Elementarschraube bei Schräganblasung.

a) Die Schräganblasung als verallgemeinerter Betriebszustand. Durch die vorausgegangenen Darlegungen sind wir es so gewöhnt, die Luftschraube in der Vorstellung und beim Versuch als in der Achsenrichtung angeströmt zu behandeln, daß wir beim Aufwerfen der Frage

nach der Wirkung einer Anstellung der Luftschraubenachse gegen die Anströmrichtung zunächst das Gefühl haben, als beträfe diese Aufgabe etwas Absonderliches. Tatsächlich ist der Zustand der fehlenden Anstellung aber nur ein ganz seltener Ausnahmezustand. Praktisch ist eine Luftschraube ebenso wie der Tragflügel eines Flugzeugs immer angestellt und diese Anstellung ist mit dem Flugzustand veränderlich.

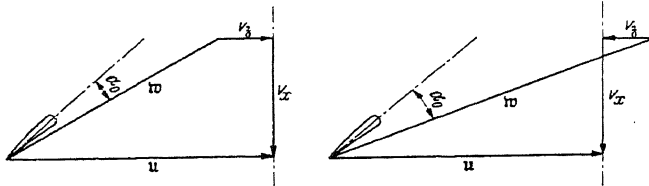
Der Zustand der Anstellungsfreiheit ist nur besonders einfach zu behandeln und seine Untersuchung ist aus diesem Grunde in erster Linie zweckmäßig. Hat man jedoch einmal die in ihrer Achsenrichtung angeströmte Luftschraube als Idealisierung erkannt, so entsteht sofort die Frage nach der Größe und Art der Abweichungen, welche durch die Anstellung einer Luftschraube bedingt sind. Stellt man die Frage aber so, dann setzt man eigentlich schon voraus, daß das Verhalten der Luftschraube bei Anstellungsfreiheit bekannt ist. Von dieser Voraussetzung wird hier auch ausgegangen.

Man darf dann aber die Fragestellung noch etwas einschränken, indem man sich mit der Untersuchung der Folgen einer kleinen Anstellung begnügt. Sieht man von den Vorgängen bei Hubschrauben und Tragschrauben ab, welche hier nicht behandelt werden, so kommen ja auch nur als klein anzusehende Anstellungen in Betracht. Da aber die Anstellung eine mit dem Flugzustand veränderliche Größe ist, so muß auch die Wirkung einer zeitlichen Änderung der Anstellung und des Schiebens bzw. die Wirkung von Drehbewegungen eines Flugzeuges untersucht werden.

Abb. 195. Zur Erläuterung der Anstellung einer Luftschraube.

b) Wirkung der Anstellung der Luftschraube im allgemeinen. Zunächst möge die Wirkung einer Anstellung der Luftschraube erläutert werden. In Abb. 195 ist eine rechtsdrehende Luftschraube schematisch dargestellt, welche um den Anstellwinkel α gegen die Flugrichtung angestellt ist. Weiter ist dargestellt ein flugzeugfestes Koordinatensystem xyz. Die Anströmgeschwindigkeit v läßt sich nun in eine Komponente v_x in Richtung der Schraubenachse x und in eine Komponente quer zur Schraubenachse v_z zerlegen. In der rechten Hälfte des Schraubenkreises wirkt nun v_z bzw. die entsprechende Umfangskomponente davon der Umfangsgeschwindigkeit u entgegen, in der linken Hälfte des Schraubenkreises wirkt v_z im Sinne der Umfangsgeschwindigkeit.

Damit ergeben sich die in Abb. 196 dargestellten Geschwindigkeitsdiagramme zur Behandlung der Schraubenströmung. In der linken

Hälfte des Schraubenkreises wird die Relativgeschwindigkeit gegen das Blattprofil durch den Einfluß der Geschwindigkeitsquerkomponente

Bei rechtsdrehender positiv angestellter Schraube
links Verminderung rechts Vermehrung
der Anströmgeschwindigkeit und des Anstellwinkels.
Abb. 196. Geschwindigkeitsdiagramme bei Anstellung.

verkleinert und gleichzeitig auch der geometrische Anstellwinkel des Schraubenprofils. In der linken Hälfte des Schraubenkreises ist deshalb die Tangentialkraft und der Schub des Schraubenflügels kleiner als bei Anstellungsfreiheit der Schraube. In der rechten Hälfte des Schraubenkreises wird die Relativgeschwindigkeit durch den Einfluß der Geschwindigkeitsquerkomponente vermehrt und gleichzeitig auch der geometrische Anstellwinkel des Schraubenprofils. In der rechten Hälfte des Schraubenkreises ist deshalb die Tangentialkraft und der Schub des Schraubenflügels größer als bei Anstellungsfreiheit.

Abb. 197. Die Zusatzkräfte bei rechtsdrehender positiv angestellter Schraube.

In Abb. 197 ist nun schematisch dargestellt, was sich durch dieses Verhalten ergibt. Da die Tangentialkraft in der linken Hälfte der Schraubenkreisebene wenigstens in erster Näherung um den gleichen Betrag verringert wird, um den sie in der rechten Hälfte des Schraubenkreises vermehrt wird, ändert sich das Drehmoment M_d bzw. das ihm entgegengesetzte gleiche Rollmoment L der Schraube in erster Näherung nicht. Die Änderung der Tangentialkraft wirkt aber sowohl in der linken wie in der rechten Schraubenkreishälfte in der gleichen

Richtung. Daher entsteht durch die Anstellung der Schraube eine Normalkraft Z, welche nach oben wirkt.

Die Schubkraft in der linken Hälfte des Schraubenkreises wird wenigstens in erster Näherung um den gleichen Betrag verringert, um den sie in der rechten Hälfte des Schraubenkreises vermehrt wird. Daher ändert sich der Schub infolge der Anstellung der Schraube in erster Näherung nicht. Da diese Schubänderungen in den beiden Schraubenkreishälften aber das gleiche Moment um die Hochachse z liefern, so entsteht ein Wendemoment N, welches im Sinne einer Linkskurve zu drehen sucht.

Die Schubkräfte in der oberen und in der unteren Schraubenkreishälfte sind symmetrisch zueinander verteilt. Deshalb wird durch die Anstellung der Schraube kein Längsmoment M hervorgerufen; da auch die Drehkräfte oben und unten symmetrisch sind, tritt infolge der Anstellung der Schraube auch keine Seitenkraft Y auf.

Beim Schieben des Flugzeugs mit einem Schiebewinkel β tritt eine entsprechende Drehung der Einflüsse auf.

Bei einer genaueren Untersuchung, welche auch die Größen zweiter Ordnung berücksichtigt, wird gefunden, daß der Schub und das Dreh- bzw. Rollmoment der Schraube sich erst mit der Summe der Quadrate der Tangenten des Anstellwinkels und des Schiebewinkels ändern und daß die Normalkraft und das Wendemoment nur verhältig sind der ersten Potenz der Tangente des Anstellwinkels und daß die Seitenkraft und das Längsmoment nur verhältig sind der ersten Potenz der Tangente des Schiebewinkels und von deren zweiter Potenz unabhängig sind.

Abb. 198. Die Komponente der Quergeschwindigkeit v_z in Umfangsrichtung bewirkt eine Änderung des augenblicklichen Fortschrittsgrades.

c) Die Veränderlichkeit von Schub und Drehmoment über den Umfang der Elementarschraube. Wir stellen uns die Luftschraube zunächst unendlich vielflügelig vor und betrachten zuerst eine Elementarschraube, d. h. ein Ringelement. Die Teilchen dieses Ringelementes mögen den Phasenwinkel φ besitzen, gemessen von der y-Richtung aus (Abb. 198). Bei Schräganblasung haben nun die Teilchen dieses Ringelementes, welches die Umfangsgeschwindigkeit u habe, einen über den Umfang veränderlichen Fortschrittsgrad

$$\lambda = \frac{v_x}{u + v_z \cos\varphi - v_y \sin\varphi} = \frac{1}{u/v_x + \operatorname{tg}\alpha \cos\varphi - \operatorname{tg}\beta \sin\varphi}. \tag{26, 1}$$

Bezeichnet nun der Index $_0$ die Größen bei fehlender Schraubenanstellung und bedeuten k_s und k_d die Schubziffer bzw. Drehmomentziffer eines Teilchens eines Ringelementes, so gilt

$$\begin{aligned} \dot{k}_s &= \dot{k}_{s_0} + \frac{d\dot{k}_{s_0}}{d\frac{1}{\lambda}}\,\Delta\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\frac{d^2\dot{k}_{s_0}}{d\frac{1}{\lambda^2}}\left(\Delta\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \cdots \\ \dot{k}_d &= \dot{k}_{d_0} + \frac{d\dot{k}_{d_0}}{d\frac{1}{\lambda}}\,\Delta\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\frac{d^2\dot{k}_{d_0}}{d\frac{1}{\lambda^2}}\left(\Delta\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{26, 2}$$

Hierbei ist $1/\lambda = u/v_x$ und, wenn wir zunächst den Schiebewinkel $\beta = 0$ setzen,

$$\Delta\frac{1}{\lambda} = \frac{v_z\cos\varphi}{v_x} = \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi\,. \tag{26, 3}$$

Die Taylorentwicklung wollen wir nach dem dritten Gliede abbrechen, also Glieder von der Größe $(\Delta\,1/\lambda)^3$ usw. vernachlässigen. Zur Abkürzung schreiben wir noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\dot{k}_{s_0}}{d\frac{1}{\lambda}} &= \dot{k}^*_{s_0}, & \frac{d\dot{k}_{d_0}}{d\frac{1}{\lambda}} &= \dot{k}^*_{d_0}, \\ \frac{d^2\dot{k}_{s_0}}{d\frac{1}{\lambda^2}} &= \dot{k}^{**}_{s_0}, & \frac{d^2\dot{k}_{d_0}}{d\frac{1}{\lambda^2}} &= \dot{k}^{**}_{d_0}. \end{aligned}\right| \tag{26, 4}$$

Für das betrachtete Teilchen des Ringelementes von der Fläche $r\,d\varphi\,dr$ ist die Axialkraft bzw. die Drehkraft bei Anstellung

$$\begin{aligned} d^2X &= \dot{k}_s\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot(u + v_z\cos\varphi)^2\cdot r\,dr\cdot d\varphi \\ &= \dot{k}_s\cdot\left(1 + \frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi \\ &= \Big[\dot{k}_{s_0} + (\dot{k}^*_{s_0} + 2\lambda\,\dot{k}_{s_0})\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi \\ &\quad + \left(\frac{\dot{k}^{**}_{s_0}}{2} + 2\lambda\,\dot{k}^*_{s_0} + \lambda^2\dot{k}_{s_0}\right)(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi)^2\Big]\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi\,, \\ d^2T &= \Big[\dot{k}_{d_0} + (\dot{k}^*_{d_0} + 2\lambda\,\dot{k}_{d_0})\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi \\ &\quad + \left(\frac{\dot{k}^{**}_{d_0}}{2} + 2\lambda\,\dot{k}^*_{d_0} + \lambda^2\dot{k}_{d_0}\right)(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\varphi)^2\Big]\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi\,. \end{aligned} \tag{26, 5}$$

d) Die mittlere Änderung des Schubs und des Drehmomentes durch Schräganblasung. Durch Mittelwertbildung der zeitlichen Werte für d^2X und d^2T über den Umfang der Elementarschraube ergibt sich dann, wenn durch $\overline{}$ die Mittelwerte angedeutet werden,

$$\begin{aligned} dX &= \bar{\dot{k}}_x\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot 2\pi\cdot r\cdot dr = \frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\int_0^{2\pi}\dot{k}_s\cdot\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot d\varphi\,, \\ dT &= -\bar{\dot{k}}_L\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot 2\pi\cdot r\cdot dr = \frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\cdot\int_0^{2\pi}\dot{k}_d\cdot\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot d\varphi\,, \end{aligned} \tag{26, 6}$$

und hieraus

$$\bar{k}_x = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\dot{k}_s\cdot\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot d\varphi\,,$$

$$\bar{k}_L = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int\dot{k}_d\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot d\varphi\,,$$

$$k_x = \frac{1}{2\pi}\left[\dot{k}_{s_0}\int_0^{2\pi}d\varphi + (\dot{k}^*_{s_0} + 2\lambda\cdot\dot{k}_{s_0})\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\int_0\cos\varphi\cdot d\varphi\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\dot{k}^{**}_{s_0}}{2} + 2\lambda\,\dot{k}^*_{s_0} + \lambda^2\cdot\dot{k}_{s_0}\right)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot d\varphi\right]$$

$$\bar{k}_L = -\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\dot{k}_{d_0}\int^{2\pi}d\varphi + (\dot{k}^*_{d_0} + 2\lambda\,\dot{k}_{d_0})\operatorname{tg}\alpha\int^{2\pi}\cos\varphi\cdot d\varphi\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\dot{k}^{**}_{d_0}}{2} + 2\lambda\cdot\dot{k}^*_{d_0} + \lambda^2\cdot\dot{k}_{d_0}\right)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha\int\cos^2\varphi\cdot d\varphi\right]$$

Und da

$$\int^{2\pi}d\varphi = 2\pi;\quad \int^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0\quad\text{und}\quad\int^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot d\varphi = \pi$$

ist, so wird

$$\bar{k}_x = \dot{k}_{s_0} + \operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{\dot{k}^{**}_{s_0}}{4} + \lambda\cdot\dot{k}^*_{s_0} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot k_{s_0}\right);$$

$$k_L = -\left|k_{d_0} + \operatorname{tg}^2\alpha\left(\frac{\dot{k}^{**}_{d_0}}{4} + \lambda\,\dot{k}^*_{d_0} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot k_{d_0}\right)\right|. \qquad (26,7)$$

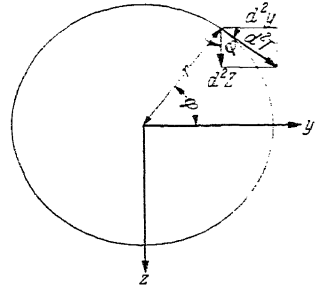



Abb. 199. Zerlegung der Drehkraft in Komponenten nach der y- und z-Richtung.

e) Die Berechnung der Querkraft. Die Drehkraft d^2T zerlegen wir nunmehr in die beiden Komponenten d^2Z und d^2Y (Abb. 199). Durch Mittelwertbildung der zeitlichen Werte über den Umfang ergeben sich dann für die Elementarschraube die durch die Anstellung hervorgerufenen Querkräfte

$$d^2Z = -d^2T\cdot\cos\varphi = -\dot{k}_d\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi\cdot\cos\varphi\,, \quad (26,8)$$

$$dZ = \bar{k}_z\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot 2\pi\cdot r\cdot dr = -\frac{\varrho}{2}\cdot u^2\cdot r\cdot dr\int_0^{2\pi}\dot{k}_d\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot\cos\varphi\,d\varphi \quad (26,9)$$

und hieraus

$$\bar{k}_z = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int^{2\pi}\dot{k}_d\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\cdot\cos\varphi\,d\varphi\,.$$

Ebenso ergibt sich

$$\bar{k}_y = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\dot{k}_d\left(1+\frac{v_z}{u}\cdot\cos\varphi\right)^2\sin\varphi\,d\varphi\,.$$

Setzt man $\dot{k}_d$ ein, so ergibt sich

$$\bar{k}_z = -\frac{1}{2\pi}\cdot\Big[\dot{k}_{d_0}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot d\varphi + (\dot{k}^*_{d_0} + 2\lambda\,\dot{k}_{d_0})\,\mathrm{tg}\,\alpha\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot d\varphi$$

$$+\left(\frac{\dot{k}^{**}_{d_0}}{2} + 2\lambda\,\dot{k}^*_{d_0} + \lambda^2\,\dot{k}_{d_0}\right)\mathrm{tg}^2\,\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\cdot d\varphi\Big]$$

und da

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot d\varphi = 0,\quad \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot d\varphi = \pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_z = -\left(\frac{\dot{k}^*_{d_0}}{2} + \lambda\cdot\dot{k}_{d_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\,. \tag{26, 10}$$

Ferner

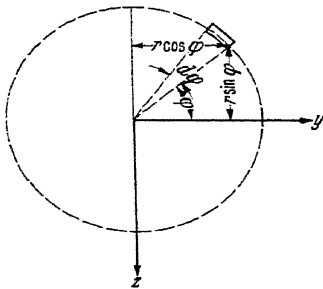
$$\bar{k}_y = \frac{1}{2\pi}\Big[\dot{k}_{d_0}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cdot d\varphi + (\dot{k}^*_{d_0} + 2\lambda\dot{k}_{d_0})\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$+\left(\frac{\dot{k}^{**}_{d_0}}{2} + 2\lambda\dot{k}^*_{d_0} + \lambda^2\cdot\dot{k}_{d_0}\right)\mathrm{tg}^2\,\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi\Big],$$

und da

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cdot d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_y = 0\,. \tag{26, 11}$$

Abb. 200. Zur Bestimmung des Quermomentes.

f) Die Berechnung des Quermomentes. Ebenso ergeben sich die durch Anstellung hervorgerufenen Quermomente

$$\left.\begin{aligned} d^2M &= d^2X\cdot r\cdot\sin\varphi,\\ d^2N &= -d^2X\cdot r\cdot\cos\varphi \quad \text{(Abb. 200).}\end{aligned}\right\} \tag{26, 12}$$

Durch zeitliche Mittelwertbildung über den Umfang der Elementarschraube wird erhalten

$$\left.\begin{aligned} dM &= \bar{k}_M \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot dr \\ &= \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} \dot{k}_s \left(1 + \frac{v_z}{u} \cos\varphi\right)^2 \sin\varphi \cdot d\varphi, \\ dN &= \bar{k}_N \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot dr \\ &= -\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} \dot{k}_s \left(1 + \frac{v_z}{u} \cdot \cos\varphi\right)^2 \cos\varphi \cdot d\varphi \end{aligned}\right\} \quad (26,13)$$

und daraus

$$\bar{k}_M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{k}_s \left(1 + \frac{v_z}{u} \cdot \cos\varphi\right)^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi,$$

$$\bar{k}_N = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{k}_s \left(1 + \frac{v_z}{u} \cdot \cos\varphi\right)^2 \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi.$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_M = \frac{1}{2\pi} \Bigg[&\dot{k}_{s_0} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi + (\dot{k}_{s_0}^* + 2\lambda \dot{k}_{s_0}) \operatorname{tg}\alpha \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \\ &+ \left(\frac{\dot{k}_{s_0}^{**}}{2} + 2\lambda \dot{k}_{s_0}^* + \lambda^2 \cdot \dot{k}_{s_0}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \Bigg]. \end{aligned}$$

Da

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_M = 0. \quad (26,14)$$

Ferner

$$\begin{aligned} \bar{k}_N = -\frac{1}{2\pi} \Bigg[&\dot{k}_{s_0} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi + (\dot{k}_{s_0}^* + 2\lambda \dot{k}_{s_0}) \operatorname{tg}\alpha \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot d\varphi \\ &+ \left(\frac{\dot{k}_{s_0}^{**}}{2} + 2\lambda \dot{k}_{s_0}^* + \lambda^2 \cdot \dot{k}_{s_0}\right) \operatorname{tg}^2\alpha \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \cdot d\varphi \Bigg]. \end{aligned}$$

Da $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot d\varphi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \cdot d\varphi = 0$

ist, so wird

$$\bar{k}_N = -\left(\frac{\dot{k}_{s_0}^*}{2} + \lambda \dot{k}_{s_0}\right) \operatorname{tg}\alpha. \quad (26,15)$$

g) Zusammenstellung der Einflüsse der Schräganblasung. Entsprechendes gilt auch für den Einfluß des Schiebens. Somit gilt für die angestellte und schiebende Elementarschraube

$$\left.\begin{aligned}
\bar{k}_x &= \dot{k}_{s_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\left(\frac{\dot{k}^{**}_{s_0}}{4} + \lambda\dot{k}^{*}_{s_0} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}_{s_0}\right),\\
\bar{k}_y &= -\left(\frac{\dot{k}^{*}_{d_0}}{2} + \lambda\dot{k}_{d_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\beta,\\
\bar{k}_z &= -\left(\frac{\dot{k}^{*}_{d_0}}{2} + \lambda\dot{k}_{d_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\alpha,\\
\bar{k}_L &= -\left[\dot{k}_{d_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\left(\frac{\dot{k}^{**}_{d_0}}{4} + \lambda\cdot\dot{k}^{*}_{d_0} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}_{d_0}\right)\right].\\
\bar{k}_M &= -\left(\frac{\dot{k}^{*}_{s_0}}{2} + \lambda\cdot\dot{k}_{s_0}\right)\mathrm{tg}\beta,\\
\bar{k}_N &= -\left(\frac{\dot{k}^{*}_{s_0}}{2} + \lambda\cdot\dot{k}_{s_0}\right)\mathrm{tg}\alpha.
\end{aligned}\right\}\quad (26, 16)$$

Wir wollen in diese Gleichungen nun noch an Stelle der Ableitungen k^* und k^{**} nach $1/\lambda$ die Ableitungen k' und k'' nach λ einsetzen. Hierfür gilt

$$\left.\begin{aligned}
\dot{k}^{*} &= -\lambda^2\cdot\dot{k}',\\
\dot{k}^{**} &= \lambda^4\cdot\dot{k}'' + 2\lambda^3\dot{k}',
\end{aligned}\right\}\quad (26, 17)$$

somit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\bar{k}_x &= \dot{k}_{s_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\cdot\left(\frac{\lambda^4}{4}\cdot\dot{k}''_{s_0} - \frac{\lambda^3}{2}\cdot\dot{k}'_{s_0} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}_{s_0}\right),\\
\bar{k}_y &= -\left(\lambda\cdot\dot{k}_{d_0} - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}'_{d_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\beta,\\
\bar{k}_z &= -\left(\lambda\cdot\dot{k}_{d_0} - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}'_{d_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\alpha,\\
\bar{k}_L &= -\left[\dot{k}_{d_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\cdot\left(\frac{\lambda^4}{4}\cdot\dot{k}''_{d_0} - \frac{\lambda^3}{2}\cdot\dot{k}'_{d_0} + \frac{\lambda^2}{2}\dot{k}_{d_0}\right)\right],\\
\bar{k}_M &= -\left(\lambda\cdot\dot{k}_{s_0} - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}'_{s_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\beta,\\
\bar{k}_N &= -\left(\lambda\cdot\dot{k}_{s_0} - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\dot{k}'_{s_0}\right)\cdot\mathrm{tg}\alpha.
\end{aligned}\right\}\quad (26, 18)$$

27. Die Elementarschraube bei Drehbewegung des Flugzeugs.

a) Wirkung der Drehbewegung eines Flugzeugs im allgemeinen. Wir wollen nun zu der Wirkung einer Drehbewegung eines Flugzeugs auf die Luftkräfte und deren Momente an der Luftschraube übergehen. Zunächst möge die Wirkung einer Drehung um die Querachse erläutert werden. In Abb. 201 ist eine rechtsdrehende Luftschraube schematisch dargestellt bei einer Drehung des Flugzeugs um die Querachse im Sinne einer Vergrößerung der Längsneigung, wobei momentan der Anstellwinkel der Schraubenachse gerade Null sein möge. In der oberen Hälfte der Schraubenkreisebene weicht die Schraube mit der Geschwindigkeit $\omega_y \cdot r$ bzw. einer entsprechenden Komponenten davon in

Flugrichtung der Anströmgeschwindigkeit aus, in der unteren Hälfte des Schraubenkreises kommt die Schraube der Anströmgeschwindigkeit mit der umgekehrten Geschwindigkeit $\omega_y \cdot r$ bzw. einer entsprechenden Komponenten davon entgegen.

Abb. 201. Zur Erläuterung der allgemeinen Drehbewegung einer Luftschraube.

Damit ergeben sich die in Abb. 202 wiedergegebenen Geschwindigkeitsdiagramme zur Behandlung der Drehung um die Querachse. In der oberen Hälfte des Schraubenkreises wird die Relativgeschwindigkeit etwas verkleinert, der geometrische Anstellwinkel des Schraubenprofils aber wesentlich vergrößert. In der oberen Hälfte des Schraubenkreises ist daher der Schub und die Tangentialkraft gegenüber dem Zustand des geraden Fluges vermehrt. In der unteren Hälfte des Schraubenkreises wird die Relativgeschwindigkeit etwas vergrößert, der Anstellwinkel jedoch wesentlich verkleinert. In der unteren Hälfte des Schraubenkreises ist deshalb der Schub und die Tangentialkraft vermindert gegenüber dem Zustand der Drehungsfreiheit um die Querachse.

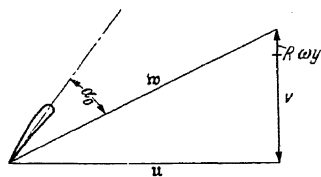
Bei einer sich positiv um die y-Achse drehenden Schraube (rechts- oder linksgängig)
oben Verminderung der Anströmgeschwindigkeit und Vergrößerung des Anstellwinkels.

unten Vergrößerung der Anströmgeschwindigkeit und Verminderung des Anstellwinkels.

Abb. 202. Geschwindigkeitsdiagramme bei Drehung eines Flugzeuges mit der Winkelgeschwindigkeit ω_y im Sinne einer Vergrößerung der Anstellung.

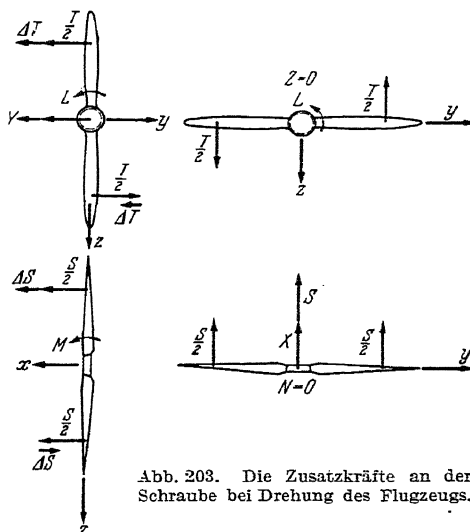



Abb. 203. Die Zusatzkräfte an der Schraube bei Drehung des Flugzeugs.

In Abb. 203 ist nun schematisch dargestellt, was sich durch dieses Verhalten ergibt. Da die Tangentialkraft in der oberen Hälfte des

Schraubenkreises wenigstens in erster Näherung um den gleichen Betrag vergrößert wird, um den sie in der unteren Hälfte des Schraubenkreises verringert wird, ändert sich das Drehmoment M_d bzw. das ihm entgegengesetzt gleiche Schraubenrollmoment L in erster Näherung nicht. Die Änderung der Tangentialkraft wirkt aber sowohl in der oberen wie in der unteren Hälfte des Schraubenkreises in gleicher Richtung, es entsteht so durch die Drehung des Flugzeugs um die Querachse y eine Seitenkraft Y, welche nach links wirkt.

Da die Schubkraft in der oberen Hälfte des Schraubenkreises wenigstens in erster Näherung um den gleichen Betrag vermehrt wird, um den sie in der unteren Hälfte des Schraubenkreises verringert wird, ändert sich der Schub infolge der Drehung des Flugzeugs in erster Näherung nicht. Diese Schubänderungen in den beiden Hälften des Schraubenkreises liefern das gleiche Moment um die Querachse y, so daß ein Längsmoment M entsteht, welches im Sinne einer Verminderung der Längsneigung des Flugzeugs wirkt.

Da die Schubkräfte in der linken und rechten Hälfte des Schraubenkreises symmetrisch zueinander verteilt sind, wird durch die Drehung des Flugzeugs um die Querachse kein Wendemoment M hervorgerufen, und da auch die Drehkräfte links und rechts symmetrisch sind, tritt infolge der Drehung des Flugzeugs um die Querachse auch keine Normalkraft Z auf.

Bei der Drehung des Flugzeugs um die Hochachse tritt eine entsprechende Drehung der Einflüsse auf.

Bei einer genaueren Untersuchung, welche auch die Größen zweiter Ordnung berücksichtigt, wird gefunden, daß der Schub und das Dreh- bzw. Rollmoment der Schraube sich erst mit der Summe der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten um die Querachse und um die Hochachse ändern und daß die Seitenkraft und das Längsmoment nur verhältig sind der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit ω_y um die Querachse und daß Normalkraft und Wendemoment nur verhältig sind der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit ω_z um die Hochachse und von deren zweiter Potenz unabhängig sind.

b) Die Veränderlichkeit von Schub und Drehmoment über den Umfang der Elementarschraube. Mit einer zeitlichen Änderung des Anstellwinkels und einer zeitlichen Änderung des Schiebewinkels ist im allgemeinen auch eine Krümmung der Flugbahn verbunden. Ist r_y der Krümmungsradius der Projektion der Flugbahn in die xz-Ebene, r_z der Krümmungsradius der Projektion der Flugbahn in die xy-Ebene, so ist die Winkeländerung der Flugbahnrichtung gegeben durch

$$\omega_{y_a} = \frac{v_x}{r_y}, \quad \omega_{z_a} = \frac{v_x}{r_z}. \tag{27,1}$$

Die zeitliche Änderung des Anstellwinkels und des Schiebewinkels seien dabei

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}. \tag{27,2}$$

Mit

$$\omega_y = \omega_{y_a} + \dot{\alpha} = \frac{v_x}{r_y} + \frac{d\alpha}{dt}, \tag{27,3}$$

$$\omega_z = \omega_{z_a} + \dot{\beta} = \frac{v_x}{r_z} + \frac{d\beta}{dt} \tag{27,4}$$

ist dann der Fortschrittsgrad eines Teilchens der Elementarschraube, wenn momentan $\alpha = 0$, $\beta = 0$ gesetzt wird und wenn ω die Winkelgeschwindigkeit um die Luftschraubenachse bedeutet,

$$\lambda = \frac{v_x + \omega_y r \sin\varphi + \omega_z r \cos\varphi}{u} = \frac{v_x}{u} + \frac{\omega_y}{\omega} \sin\varphi + \frac{\omega_z}{\omega} \cos\varphi. \tag{27,5}$$

Für ein Teilchen der Elementarschraube gilt

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}_s &= \dot{k}_{s_0} + \frac{d\dot{k}_{s_0}}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2}\frac{d^2\dot{k}_{s_0}}{d\lambda^2} (\Delta\lambda)^2 + \cdots, \\ \dot{k}_d &= \dot{k}_{d_0} + \frac{d\dot{k}_{d_0}}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2}\frac{d^2\dot{k}_{d_0}}{d\lambda^2} (\Delta\lambda)^2 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{27,6}$$

Hierbei ist $\lambda = \frac{v_x}{u}$ und, wenn wir zunächst $\omega_z = 0$ setzen, $\Delta\lambda = \frac{\omega_y}{\omega}\sin\varphi$. Die Taylorentwicklung wollen wir wieder nach dem dritten Gliede abbrechen, also Glieder von der Größe $(\Delta\lambda)^3$ usw. vernachlässigen. Zur Abkürzung schreiben wir noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\dot{k}_{s_0}}{d\lambda} &= \dot{k}'_{s_0}, & \frac{d\dot{k}_{d_0}}{d\lambda} &= \dot{k}'_{d_0}, \\ \frac{d^2\dot{k}_{s_0}}{d\lambda^2} &= \dot{k}''_{s_0}, & \frac{d^2\dot{k}_{d_0}}{d\lambda^2} &= \dot{k}''_{d_0}. \end{aligned}\right\} \tag{27,7}$$

Für das betrachtete Teilchen des Ringelementes von der Fläche $r\,d\varphi\,dr$ ist die Axialkraft bzw. die Drehkraft bei Anstellungsänderung

$$\left.\begin{aligned} d^2X &= \dot{k}_s \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 r \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \frac{\varrho}{2} u^2 r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \left[\dot{k}_{s_0} + \dot{k}'_{s_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \dot{k}''_{s_0} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin\varphi\right)^2\right], \\ d^2T &= \dot{k}_d \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 r \cdot dr \cdot d\varphi \\ &= \frac{\varrho}{2} u^2 r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \left[\dot{k}_{d_0} + \dot{k}'_{d_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \dot{k}''_{d_0} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin\varphi\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27,8}$$

c) Die mittlere Änderung des Schubs und des Drehmomentes durch Flugzeugdrehung. Durch Mittelwertbildung der zeitlichen Werte für d^2X und d^2T über den Umfang der Elementarschraube ergibt sich dann, wenn durch $\overline{}$ die Mittelwerte angedeutet werden:

$$\left.\begin{aligned}
dX &= \bar{k}_x \cdot \frac{\varrho}{2} u^2 2\pi r \cdot dr = \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r \cdot dr \\
&\cdot \left[\dot{k}_{s_0} \int_0^{2\pi} d\varphi + \dot{k}'_{s_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi + \frac{1}{2} \cdot \dot{k}''_{s_0} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi\right], \\
dT &= -\bar{k}_L \cdot \frac{\varrho}{2} u^2 2\pi r \cdot dr = \frac{\varrho}{2} u^2 \cdot r \cdot dr \\
&\cdot \left[\dot{k}_{d_0} \int_0^{2\pi} d\varphi + \dot{k}'_{d_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi + \frac{1}{2} \cdot \dot{k}''_{d_0} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi\right],
\end{aligned}\right\} \quad (27,9)$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned}
\bar{k}_x &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\dot{k}_{s_0} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \dot{k}''_{s_0} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \pi\right] = \dot{k}_{s_0} + \frac{\dot{k}''_{s_0}}{4} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2, \\
\bar{k}_L &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \left[\dot{k}_{d_0} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \dot{k}''_{d_0} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \pi\right] = -\left[\dot{k}_{d_0} + \frac{\dot{k}''_{d_0}}{4} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2\right].
\end{aligned}\right\} \quad (27,10)$$

d) Die Berechnung der Querkraft. Die Drehkraft $d^2 T$ zerlegen wir wieder in die beiden Komponenten $d^2 Z$ und $d^2 Y$ (Abb. 199). Durch Mittelwertbildung der zeitlichen Werte über den Umfang ergibt sich dann für die Elementarschraube die durch die Änderung der Anstellung hervorgerufene Querkraft:

$$\left.\begin{aligned}
d^2 Z &= -d^2 T \cos\varphi = -\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \\
&\left[\dot{k}_{d_0} \cos\varphi + \dot{k}'_{d_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{\dot{k}''_{d_0}}{2} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right],
\end{aligned}\right\} \quad (27,11)$$

$$\left.\begin{aligned}
dZ &= \bar{k}_z \cdot \frac{\varrho}{2} u^2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = -\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r \cdot dr \cdot \left[\dot{k}_{d_0} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi\right. \\
&\left. + \dot{k}'_{d_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi + \frac{\dot{k}''_{d_0}}{2} \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi\right].
\end{aligned}\right\} \quad (27,12)$$

Und da

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \text{ und } \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_z = 0. \quad (27,13)$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}
d^2 Y &= d^2 T \cdot \sin\varphi = \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \\
&\cdot \left[\dot{k}_{d_0} \sin\varphi + \dot{k}'_{d_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \sin^2\varphi + \frac{\dot{k}''_{d_0}}{2} \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \sin^3\varphi\right],
\end{aligned}\right\} \quad (27,14)$$

$$\left.\begin{aligned}
dY &= \bar{k}_y \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r \cdot dr \cdot \left[\dot{k}_{d_0} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi\right. \\
&\left. + \dot{k}'_{d_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi + \frac{\dot{k}''_{d_0}}{2} \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi \cdot d\varphi\right].
\end{aligned}\right\} \quad (27,15)$$

Und da

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi \cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_y = \frac{\dot{k}'_{d_0}}{2} \cdot \frac{\omega_y}{\omega_p}\,. \tag{27, 16}$$

e) Die Berechnung des Quermomentes. Ebenso ergeben sich die durch die Änderung der Anstellung hervorgerufenen Quermomente, (Abb. 200)

$$\left.\begin{aligned} d^2 M &= d^2 X \cdot r \cdot \sin\varphi \\ &= \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \left[\dot{k}_{s_0} \sin\varphi + \dot{k}'_{s_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin^2\varphi + \frac{\dot{k}''_{s_0}}{2} \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \sin^3\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27, 17}$$

$$\left.\begin{aligned} dM = \bar{k}_M \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot 2\pi r^2 \cdot dr = \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \left[\dot{k}_{s_0} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi \right. \\ \left. + \dot{k}'_{s_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi + \frac{\dot{k}''_{s_0}}{2} \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi \cdot d\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27, 18}$$

Und da

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi \cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_M = \frac{k'_{s_0}}{2} \cdot \frac{\omega_y}{\omega_p}\,. \tag{27, 19}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} d^2 N = d^2 X \cdot r \cdot \cos\varphi = -\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \left[\dot{k}_{s_0} \cos\varphi \right. \\ \left. + \dot{k}'_{s_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{\dot{k}''_{s_0}}{2} \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right], \end{aligned}\right\} \tag{27, 20}$$

$$\left.\begin{aligned} dN = \bar{k}_N \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot dr = -\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \left[\dot{k}_{s_0} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi \right. \\ \left. + \dot{k}'_{s_0} \frac{\omega_y}{\omega_p} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi + \frac{\dot{k}''_{s_0}}{2} \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27, 21}$$

Und da

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0$$

ist, so wird

$$\bar{k}_N = 0\,. \tag{27,22}$$

f) Zusammenstellung der Einflüsse bei Änderung des Anstell- und Schiebewinkels. Entsprechendes gilt auch für den Einfluß bei Änderung des Schiebewinkels. Zusammengestellt gilt somit bei gekrümmter Flugbahn:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{k}_x &= \dot{k}_{s_0} + \dot{k}''_{s_0}\left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right],\\
\bar{k}_y &= \frac{\dot{k}'_{d_0}}{2}\cdot\frac{\omega_y}{\omega_p},\\
\bar{k}_z &= \frac{\dot{k}'_{d_0}}{2}\cdot\frac{\omega_z}{\omega_p},\\
\bar{k}_L &= -\left\{\dot{k}_{d_0} + \dot{k}''_{s_0}\left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right]\right\},\\
\bar{k}_M &= \frac{\dot{k}'_{s_0}}{2}\cdot\frac{\omega_y}{\omega_p},\\
\bar{k}_N &= \frac{\dot{k}'_{s_0}}{2}\cdot\frac{\omega_z}{\omega_p}.
\end{aligned}\right\} \qquad (27,23)$$

Zu diesen Werten treten dann noch die, welche dem augenblicklichen Anstell- bzw. Schiebewinkel entsprechen und in Abschnitt 26 behandelt werden.

III. Das Verhalten der Gesamtschraube.

G. Die Theorie der schwach belasteten Luftschraube sehr großer Flügelzahl.

28. Die Elementarschraube als Grundlage zur Untersuchung der schwach belasteten Schraube.

a) Die Vernachlässigbarkeit der gegenseitigen Beeinflussung der Schraubenelemente bei kleiner Belastung und großer Flügelzahl. Wir haben im vorangegangenen die Elementarschraube behandelt und es entsteht nun die Frage, wann wir die Strömungsvorgänge in einer Luftschraube so behandeln können, als wären sie in den einzelnen Schraubenelementen bedingt durch die Strömung in den diesen Elementen entsprechenden Elementarschrauben. Die Strömung in der freifliegenden Elementarschraube war gekennzeichnet dadurch, daß die Luftteilchen ihre Entfernung von der Achse nicht änderten und daß der Druck weit hinter der Schraube der gleiche war wie weit vor der Schraube.

Wenn aber in allen Teilen des Schraubenstrahls die Strömung beschleunigt wird, so ist dies, wenn der Zusammenhang der Strömung gewahrt bleiben soll, nur möglich, wenn sich der Schraubenstrahl ver-

engt oder, wie man auch sagt, einschnürt. Der Strahl einer Elementarschraube besitzt auch eine Drehung, der Strahl einer ganzen Luftschraube muß sich also auch drehen und hieraus folgt wieder, daß im Innern des Strahls der Druck kleiner sein muß als außerhalb des Strahls, so daß die bei der Elementarschraube in allen Fällen zu befriedigenden Annahmen der Untersuchung der ganzen Schraube nicht mehr ohne weiteres zugrunde gelegt werden dürfen.

Je weniger belastet jedoch eine Schraube ist, um so weniger ändert die Strahleinschnürung und der Strahlunterdruck etwas an den Verhältnissen im Vergleich zur Elementarschraube.

Eine weitere Veränderung der Strömungsverhältnisse ist dadurch verschuldet, daß in Nähe der Flügelenden radiale Strömungskomponenten nicht verhindert werden, da von Endscheiben oder einer Ummantelung im allgemeinen ja abgesehen werden muß. Bei der Elementarschraube war die gedankliche Einführung solcher Endscheiben und eines solchen Mantels, welche in Strömungsrichtung keine Kräfte aufnehmen sollten, allerdings unerläßlich, wenn man zu einer brauchbaren Unterlage für die Rechnungen kommen sollte.

Bei späteren Darlegungen wird noch gezeigt werden, daß zur Vermeidung solcher Umströmung der Flügelenden außer der kleinen Belastung auch eine große Flügelzahl nötig ist, falls nicht die Steigung klein ist.

Die folgenden Untersuchungen wurden daher zunächst unter der Voraussetzung sehr großer Flügelzahl oder sehr kleiner Steigung und kleiner Belastung durchgeführt.

b) Der Schubbelastungsgrad und der Wirkungsgrad im allgemeinen. Die Kenngrößen der Elementarschraube werden im folgenden durch einen Strich ′ gekennzeichnet. Der Schubbelastungsgrad c_s der ganzen Luftschraube ist mit

$$dS = c_s' \frac{\varrho}{2} v_0^2 2\pi r\, dr, \qquad c_s' = \frac{dS}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 2\pi r\, dr},$$

$$S = c_s \frac{\varrho}{2} v_0^2 \pi R^2, \qquad c_s = 2\int_0^1 c_s' \frac{r}{R}\, d\frac{r}{R},$$

oder mit $x = r/R$

$$c_s = 2\int_0^1 c_s' x\, dx = \int_0^1 c_s'\, dx^2. \tag{28, 1}$$

Die Schubziffer ist entsprechend

$$k_s = 2\lambda^2 \int_0^1 c_s' x\, dx,$$

oder mit
$$\lambda' = \frac{\lambda}{x}, \qquad k_s' = \lambda'^2 c_s' = \lambda^2 \frac{c_s'}{x^2},$$

$$k_s = 2\int_0^1 k_s' x^3\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 k_s'\, dx^4, \tag{28, 2}$$

auf welche Gleichung man auch durch
$$k_s' = \frac{1}{x^2}\,\frac{dS}{\frac{\varrho}{2}\,u_a^2\, dF} \qquad \frac{dF}{F} = 2x\,dx$$
kommt.

Mit
$$k_d' = \frac{1}{x^3}\,\frac{dN}{\frac{\varrho}{2}\,u_a^3\, dF}$$
erhält man
$$k_d = 2\int_0^1 k_d' x^4\, dx = \tfrac{2}{5}\int_0^1 k_d'\, dx^5. \tag{28, 3}$$

Der Wirkungsgrad der Gesamtschraube ist also
$$\eta = \frac{vS}{N} = \lambda\frac{k_s}{k_d} = \lambda\frac{\int k_s' x^3\, dx}{\int k_d' x^4\, dx}.$$

Mit Hilfe des Wirkungsgrades η' des Schraubenelementes kann k_s' auch geschrieben werden
$$k_s' = \frac{\eta'}{\lambda'}\, k_d' = \frac{x}{\lambda}\,\eta' k_d'.$$

Hiermit wird dann (28, 3)
$$\eta = \frac{\int \eta' k_d' x^4\, dx}{\int k_d' x^4\, dx} = \frac{2\int \eta' k_d' x^4\, dx}{k_d}, \tag{4)}$$
oder auch (28, 2)
$$\eta = \frac{\int k_s' x^3\, dx}{\int \frac{1}{\eta'}\, k_s' x^3\, dx} = \frac{k_s}{2\int \frac{1}{\eta'}\, k_s' x^3\, dx}, \tag{28, 5}$$
oder (28, 1)
$$\eta = \frac{\int c_s' x\, dx}{\int \frac{1}{\eta'}\, c_s' x\, dx} = \frac{c_s}{2\int \frac{1}{\eta'}\, c_s' x\, dx}. \tag{28, 6}$$

c) Die Ermittlung der günstigsten Schubverteilung. Der bei gegebenem Fortschrittsgrad und Leistungsziffer erreichbare Wirkungsgrad ist offenbar nicht unabhängig davon, wie die Leistung bzw. der Schub über dem Schraubenradius verteilt ist. Die aufgewandte Leistung ist
$$N = \frac{\varrho}{2}\, u^3\, \frac{\pi D^2}{4}\cdot k_d = \frac{\varrho}{2}\, u^3\, \frac{\pi D^2}{4}\cdot 2\int_0^1 k_d' x^4\, dx$$

oder mit
$$k'_d = \frac{\lambda'}{\eta'} k'_s = \frac{\lambda}{\eta'} \frac{k'_s}{x},$$

$$N = \frac{\varrho}{2} u^3 \frac{\pi D^2}{4} \cdot 2\lambda \int_0^1 \frac{k'_s}{\eta'} x^3 \, dx. \tag{28, 7}$$

Die erzielte Nutzleistung ist

$$v \cdot S = \frac{\varrho}{2} u^3 \frac{\pi D^2}{4} \cdot \lambda k_s = \frac{\varrho}{2} u^3 \frac{\pi D^2}{4} \cdot 2\lambda \int_0^1 k'_s x^3 \, dx. \tag{28, 8}$$

Um einen möglichst. großen Wirkungsgrad zu erzielen ist durch entsprechende Verteilung von k'_s also das Integral

$$J_1 = \int_0^1 f_1(x, \eta) \, dx = \int_0^1 k'_s x^3 \, dx = \frac{1}{2} k_s \qquad (f_1 = k'_s x^3)$$

zu einem Maximum zu machen bei gegebener Größe des Integrals

$$J_2 = \int_0^1 f_2(x, \eta) \, dx = \int_0^1 \frac{k'_s}{\eta} x^3 \, dx = \frac{1}{2} \frac{k_s}{\eta} = \frac{1}{2} \frac{k_d}{\lambda}. \qquad \left(f_2 = \frac{k'_s}{\eta} x^3\right)$$

Da k'_s außer von $\lambda' = \lambda/x$ nur von η abhängig ist, wird die beste Verteilung nach den Regeln der Variationsrechnung bedingt durch die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ f_1(x, \eta) - \Theta f_2(x, \eta) \right\} = 0,$$

in unserem Falle also durch

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ k'_s - \Theta \frac{k'_s}{\eta} \right\} = 0. \tag{28, 9}$$

Hierbei ist Θ die LAGRANGEsche Konstante, die nachträglich noch berechnet werden kann.

Wir können nun noch etwas umformen:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ k'_s - \Theta \frac{k'_s}{\eta} \right\} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ k'_s \left(1 - \frac{\Theta}{\eta}\right) \right\} = \frac{\partial k'_s}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\Theta}{\eta}\right) + \frac{\Theta}{\eta} \frac{k'_s}{\eta} = 0$$

und mit
$$\frac{\frac{\partial k'_s}{k'_s}}{\frac{\partial \eta'}{\eta'}} = \frac{\partial \ln k'_s}{\partial \ln \eta'},$$

$$\frac{\Theta}{\eta'} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{\partial \ln k'_s}{\partial \ln \eta'}}} \tag{28, 10}$$

Diese Umformung erweist sich deshalb als besonders brauchbar, weil k_s' als Produkt von Faktoren darzustellen ist, welche η enthalten, so daß die Differentiation nur an jedem einzelnen Faktor durchzuführen ist. Ist allgemein

$$f = \frac{z_1(x) \cdot z_2(x) \cdot z_3(x) \ldots\ldots}{n_1(x) \cdot n_2(x) \cdot n_3(x) \ldots\ldots},$$

so ist nämlich

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x} = x\left\{\left(\frac{\frac{\partial z_1}{\partial x}}{z_1} + \frac{\frac{\partial z_2}{\partial x}}{z_2} + \frac{\frac{\partial z_3}{\partial x}}{z_3} + \cdots\right) - \left(\frac{\frac{\partial n_1}{\partial x}}{n_1} + \frac{\frac{\partial n_2}{\partial x}}{n_2} + \frac{\frac{\partial n_3}{\partial x}}{n_3} + \cdots\right)\right\}. \quad (28, 11)$$

Die günstigste Verteilung des Schubs bzw. der Leistung ist dann erreicht, wenn η' der obigen Gleichung (28, 10) genügt. Dabei ist Θ eine Konstante, welche vom Gesamtschub bzw. der Gesamtleistung abhängig ist.

Abb. 204. Hilfsgrößen $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{mn}$.

d) Einige wichtige Integrale. Beim Übergang von der Elementarschraube auf die Gesamtschraube spielen Integrale der Form

$$\mathfrak{K}^{(\infty)}_{mn} = \int_0^1 \frac{x^m}{(x^2 + \lambda_\infty^2)^n}\, dx \quad (28, 12)$$

(vgl. Abb. 204)

eine große Rolle. Zunächst gilt für sie folgende wichtige Beziehung

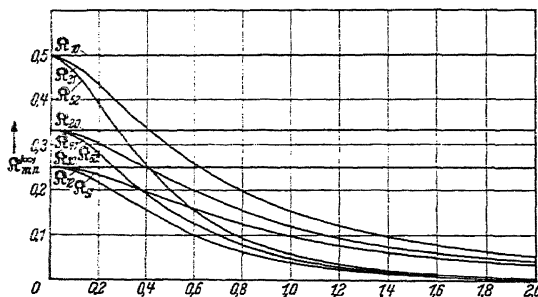
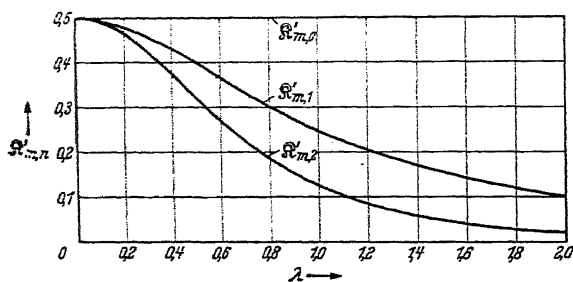
$$\mathfrak{K}^{(\infty)}_{mn} = \mathfrak{K}^{(\infty)}_{m, n-1} - \mathfrak{K}^{(\infty)}_{m+2, n}. \quad (28, 13)$$

Abb. 205. Hilfsgrößen $\mathfrak{K}'_{mn}$

Die Ausrechnung liefert die für einige m und n in Zahlentafel 6 zusammengestellten Integrale.

Folgende Feststellung dürfte dabei noch von Bedeutung sein: Setzt man in die mit Hilfe von $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{mn}$ gefundenen Ergebnisse an ihre Stelle die Werte

$$\mathfrak{K}'_{mn} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \lambda_\infty^2)^n} \quad \text{(vgl. Abb. 205)}, \quad (28, 14)$$

so erhält man wieder die Werte für die Elementarschraube. Die Werte für Schrauben der Flügelzahl $\mathfrak{z}$ erhält man ganz analog durch entsprechende Integrale $\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{mn}$ (Abb. 236, 237, 238), deren Herleitung im

Zahlentafel 6. Die Hilfsgrößen $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{m,n}$.

$n = 0$

$\mathfrak{K}_{00} = 1$

$\mathfrak{K}_{10} = \frac{1}{2}$

$\mathfrak{K}_{20} = \frac{1}{3}$

$\mathfrak{K}_{30} = \frac{1}{4}$

$n = 1$	Für $\lambda \to \infty$ wird	Für $\lambda \to 0$ wird
$\mathfrak{K}_{01} = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda}$	$\mathfrak{K}_{01} \to \frac{1}{\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{01} \to \frac{\pi}{2\lambda}$
$\mathfrak{K}_{11} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)$	$\mathfrak{K}_{11} \to \frac{1}{2\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{11} \to \ln\frac{1}{\lambda}$
$= 1 - \lambda\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda}$	$\mathfrak{K}_{21} \to \frac{1}{3\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{21} \to 1$
$\mathfrak{K}_{31} = \frac{1}{2}\left(1 - \lambda^2\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$	$\mathfrak{K}_{31} \to \frac{1}{4\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{31} \to \frac{1}{2}$
$\mathfrak{K}_{41} = \frac{1}{3} - \lambda^2 + \lambda^3\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda}$	$\mathfrak{K}_{41} \to \frac{1}{5\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{41} \to \frac{1}{3}$
$\mathfrak{K}_{51} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)$	$\mathfrak{K}_{51} \to \frac{1}{6\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{51} \to \frac{1}{4}$

$n = 2$		
$\mathfrak{K}_{02} = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1+\lambda^2}\right)$	$\mathfrak{K}_{02} \to \frac{1}{\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{02} \to \frac{\pi}{2\lambda^3}$
$\mathfrak{K}_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\lambda^2(1+\lambda^2)}$	$\mathfrak{K}_{12} \to \frac{1}{2\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{12} \to \frac{1}{2\lambda^2}$
$\mathfrak{K}_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)$	$\mathfrak{K}_{22} \to \frac{1}{3\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{22} \to \frac{\pi}{4\lambda}$
$\mathfrak{K}_{32} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)$	$\mathfrak{K}_{32} \to \frac{1}{4\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{32} \to \ln\frac{1}{\lambda}$
$\mathfrak{K}_{42} = 1 - \frac{3}{2}\lambda\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{42} \to \frac{1}{5\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{42} \to 1$
$\mathfrak{K}_{52} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - 2\lambda^2\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$	$\mathfrak{K}_{52} \to \frac{1}{6\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{52} \to \frac{1}{2}$
$\mathfrak{K}_{62} = \frac{1}{3} - 2\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda^3\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^4}{1+\lambda^2}$	$\mathfrak{K}_{62} \to \frac{1}{7\lambda^4}$	$\mathfrak{K}_{62} \to \frac{1}{3}$
$\mathfrak{K}_{72} = \frac{1}{4} - \lambda^2 - \frac{\lambda^4}{2(1+\lambda^2)} + \frac{3}{2}\lambda^4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)$	$\mathfrak{K}_{72} \to \frac{1}{8\lambda^4}$	$\frac{1}{4}$

29. Die schwachbelastete Schraube unter Vernachlässigung der Reibung.

a) Die günstigste Schubverteilung bei Reibungsfreiheit. Bei Reibungsfreiheit ergab sich für die Elementarschraube (12, 41)

$$k'_s = 4\lambda'^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\frac{1 + \frac{\lambda'^2}{\eta}}{\left(1 + \left(\frac{\lambda'}{\eta}\right)^2\right)^2} = 4\lambda'^2\,\frac{\eta(1-\eta)\,(\eta + \lambda'^2)}{(\eta^2 + \lambda'^2)^2}\,.$$

Also gilt (28, 11)

$$\frac{\partial \ln k_s'}{\partial \ln \eta'} = \eta' \left\{ \frac{1}{\eta'} - \frac{1}{1-\eta'} + \frac{1}{\eta'+\lambda'^2} - \frac{4\eta'}{\eta^2+\lambda'^2} \right\};$$

$$\frac{\partial \ln k_s'}{\partial \ln \eta'} = \frac{1-2\eta'}{1-\eta'} + \frac{\eta'}{\eta'+\lambda'^2} - \frac{4\eta'^2}{\eta'^2+\lambda'^2} \tag{29, 1}$$

und damit (28, 10)

$$\eta' \qquad \frac{1}{1 - \cfrac{1}{\cfrac{1-2\eta'}{1-\eta'} + \cfrac{\eta'}{\eta+\lambda'^2} - \cfrac{4\eta'^2}{\eta'^2+\lambda'^2}}} \qquad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2-\eta'}{1-\eta'} - \lambda'^2\left(\cfrac{4\eta^2}{\eta'^2+\lambda'^2} - \cfrac{1}{\eta'+\lambda'^2}\right)}} \tag{29, 2}$$

Für kleine Belastung ist η' nur wenig von 1 verschieden. Solange dann $\lambda'^2 \ll \frac{2-\eta'}{1-\eta'}$, was höchstens in unmittelbarer Nähe der Nabe nicht zutrifft, wird also

$$\frac{\Theta}{\eta'} = \frac{1}{1+\cfrac{1-\eta'}{2-\eta'}} = \frac{2-\eta'}{3-2\eta'}. \tag{29, 3}$$

Daß Θ eine Konstante ist, ergibt sich daraus, daß die Schub- bzw. Leistungsverteilung über dem Schraubenradius also am günstigsten wird, wenn der Wirkungsgrad der Schraubenelemente $\eta' =$ konst. ist, d. h. also gleich dem Wirkungsgrade η der Gesamtschraube ist.

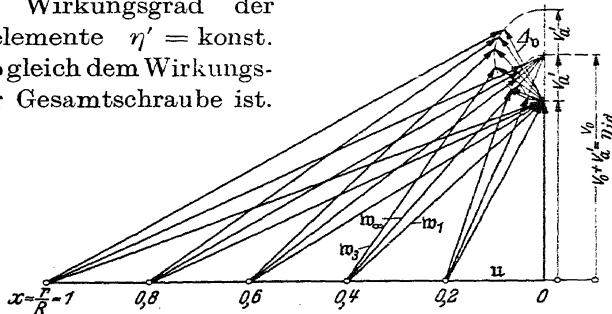



Abb. 207. Geschwindigkeitsdiagramme einer Luftschraube mit konstanten η_{id}.

Da nun

$$\lambda_0' = \frac{\lambda_0}{x}, \quad \eta' = \frac{\lambda_0'}{\lambda_\infty'} = \eta$$

wird

$$\lambda_\infty' = \frac{\lambda_0'}{\eta} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\lambda_0}{x}. \tag{29, 4}$$

Die Bedingung bester Schubverteilung wird also erfüllt, wenn in den Geschwindigkeitsdiagrammen aller Schraubenelemente die Richtungen aller $\mathfrak{w}_\infty$ durch den gleichen Punkt der $\mathfrak{v}_0$-Geraden gehen, wie dies Abb. 207 zeigt. Die Hälfte der von der Schraube der Strömung erteilten

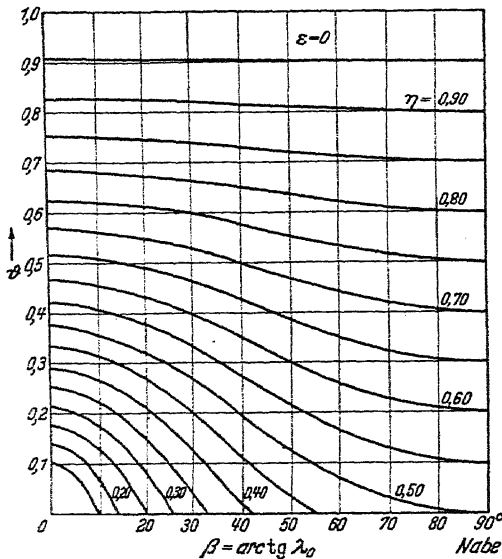



Abb. 208. LAGRANGEscher Faktor $\Theta(\eta', \lambda')$ für Bestschrauben bei Reibungsfreiheit.

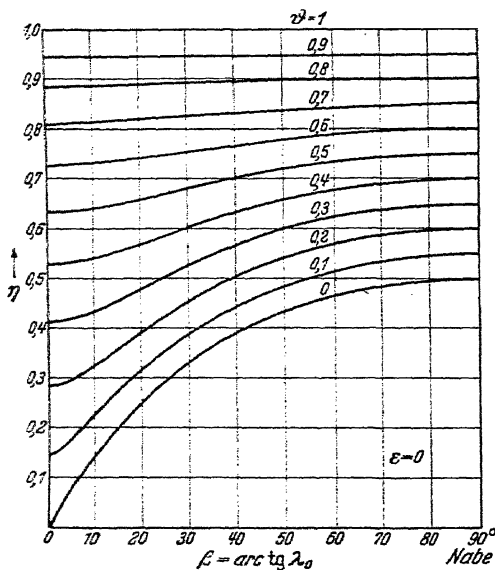



Abb. 209. Wirkungsgradverlauf $\eta'(\lambda_0')$ für Bestschrauben bei Reibungsfreiheit.

Zusatzgeschwindigkeit $\Delta \mathfrak{v}$ ist also so, als würde sich eine starre Schraubenfläche mit den Steigungswinkeln $\beta_\infty = \operatorname{arctg} \lambda'_\infty = \operatorname{arctg} \frac{v_0 + v'_a}{u}$ mit der Geschwindigkeit $2 v'_a$ in Richtung der Schraubenachse verschieben oder mit der Drehschnelle $\omega' = \frac{2 v'_u}{\;} = 2 \frac{v_r}{v_0 + v'_a} \cdot \omega$ um die Achse drehen.

Um die Verteilung des Wirkungsgrades bei größerer Belastung für günstigsten Gesamtwirkungsgrad zu ermitteln, wurde (29, 2)

$\Theta(\eta', \lambda)$

$$\frac{2 - \eta'}{1 - \eta'} - \lambda' \quad \frac{\;}{\eta'^2 + \lambda'^2} - \frac{1}{\eta' + \lambda'^2}\Big)$$

aus η' und λ' berechnet und in Abb. 208 aufgezeichnet. Durch Umzeichnung wurde dann die in Abb. 209 dargestellte η'-Verteilung gefunden.

Um den ganzen λ'-Bereich zu erfassen, wurde dabei $\operatorname{arctg} \lambda'$ als Abszisse gewählt. Dieses Resultat für die beliebig belastete Schraube gilt, wie gezeigt werden könnte, auch unter Berücksichtigung der Änderung der Durchflußgeschwindigkeit infolge der Strahldrehung der äußeren Schraubenelemente.

Die Abweichungen der einer besten Schubverteilung entsprechenden η'-Verteilung von $\eta' = \text{konst.}$ sind, aber auch für größere Belastungen noch so klein, daß man selbst hier praktisch $\eta' = \text{konst.}$ als Bedingung bester Schubverteilung angenähert zugrunde legen kann.

b) Der Wirkungsgrad der Gesamtschraube bei günstigster Schubverteilung. Der Schub muß nach vorstehendem bei kleinem Gesamtschub über den Schraubenkreis so verteilt sein, daß

$$\eta' = \frac{1 + \sqrt{1 - k_s'}}{1 + \sqrt{1 + c_s'}} = \eta = \text{konst.}$$

ist. Die Auflösung nach c_s' gibt diese Schubverteilung explizite (12, 40)

$$c_s' = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\frac{\left(1 + \frac{\lambda'}{\eta}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\lambda'}{\eta}\right)^2\right)^2} = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\frac{1 + \frac{1}{x^2}\frac{\lambda^2}{\eta}}{1 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\Big)^2},$$

$$c_s' = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\frac{x^2\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{\eta}\right)}{x^2 + \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\Big)^2}. \tag{29, 5}$$

Der zu einem gegebenen Wirkungsgrad gehörige größtmögliche Schubbelastungsgrad ist damit mit $\lambda_\infty = \lambda/\eta$

$$c_s = \int^1 c_s'\,dx^2 = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\int^1 \frac{x^2\,(x^2 + \eta\,\lambda_\infty^2)}{(x^2 + \lambda_\infty^2)^2}\,dx^2.$$

Mit $\mathfrak{K}_{mn} = \int_0^1 \frac{x^m}{(x^2 + \lambda_\infty^2)^n}\,dx$ wird

$$c_s = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,(2\,\mathfrak{K}_{52} + 2\,\eta\,\lambda_\infty^2\,\mathfrak{K}_{32}) = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,(2\,\eta\,\mathfrak{K}_{31} + 2\,(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{52}) \tag{29, 6}$$

oder nach Einsetzen der $\mathfrak{K}_{mn}$ (Zahlentafel 6)

$$c_s = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left(1 - (2-\eta)\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 \ln\frac{1 + \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2} + (1-\eta)\,\frac{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right). \tag{29, 7}$$

Für $\lambda \to 0$ wird wieder $c_s = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}$; da in diesem Falle die Drehverluste verschwinden, stellt also der Klammerfaktor in obiger Gleichung für c_s wieder den Einfluß ψ_d der Strahldrehung dar.

Leider läßt sich diese Gleichung nicht nach η auflösen. $\eta(c_s)$ ist also nur implizit durch obige Gleichung darstellbar.

Aus der gefundenen Gleichung $c_s(\eta, \lambda)$ lassen sich auch Schubziffer und Leistungsziffer in Abhängigkeit von Wirkungsgrad und Fortschrittsgrad gewinnen:

$$k_s = \lambda^2 c_s = 4\lambda^2 \frac{1-\eta}{\eta^2}\left(1-(2-\eta)\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 \ln\frac{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2} + (1-\eta)\frac{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right), \quad (29, 8)$$

$$k_d = \frac{\lambda}{\eta} k_s = 4\lambda^3 \frac{1-\eta}{\eta^3}\left(1-(2-\eta)\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 \ln\frac{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2} + (1-\eta)\frac{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right). \quad (29, 9)$$

Der Zusammenhang wird für k_d durch die Abb. 210 veranschaulicht.

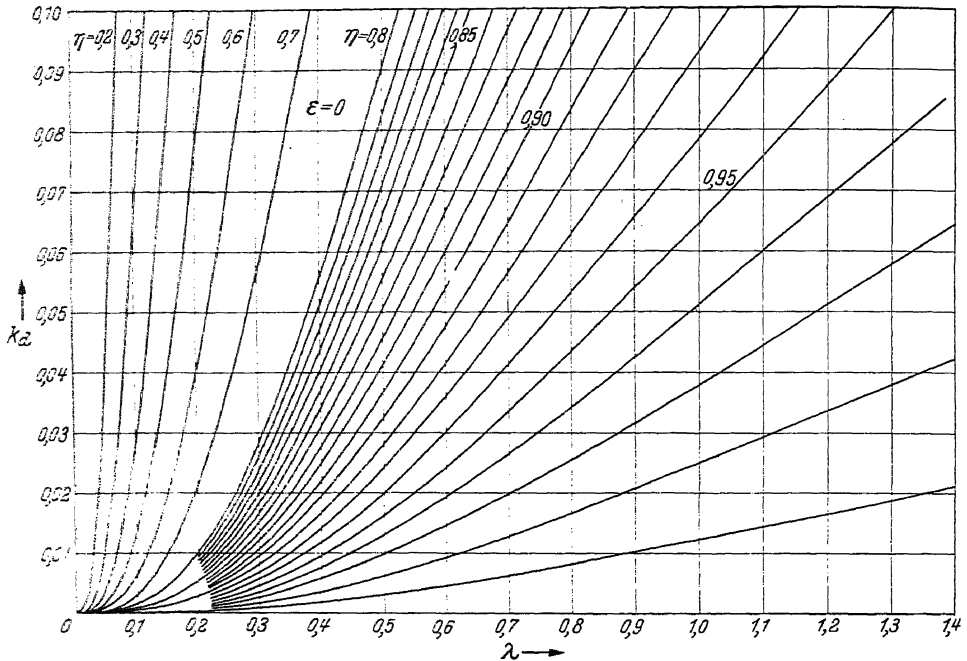



Abb. 210. Wirkungsgrad η in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad λ und von der Leistungsziffer k_d bei Reibungsfreiheit ($\varepsilon = 0$).

c) Die Zirkulationsverteilung und der Blattbreitenverlauf bei günstigster Schubverteilung. Soll eine Schraube bei kleinem Schub die günstigste Schubverteilung haben und zwar auch bei einer kleinen Änderung des Fortschrittsgrades, so muß der Schub dS längs des Schraubenradius beim Gesamtschub $S = 0$ ebenfalls $dS = 0$ sein. Eine solche Schraube muß also eine konstante aerodynamische Steigung $H^*/D = \pi\lambda^*$ haben: Es muß also sein

$$\lambda'^* = \frac{\lambda^*}{\;}. \quad (29, 10)$$

Es ist zweckmäßig, die Zirkulationsverteilung dimensionslos darzustellen. Es ist, wenn $\Gamma_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z} \cdot \Gamma$ die Zirkulation um alle $\mathfrak{z}$ Flügel bedeutet,

$$\mathfrak{z}\,\Gamma = 2\pi r v_u$$

oder mit $\omega r = u$ dimensionslos

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{z}\,\Gamma\omega}{4\pi v_a' (v_0 + v_a')} \qquad \frac{u\, v_u}{2(v_0 + v_a') v_a'} . \tag{29, 11}$$

Die hierbei eingeführte Größe v_a' ist die in Abb. 207 gekennzeichnete Größe, welche bei kleiner Belastung und konstanter Steigung konstant sein muß für günstigste Schubverteilung:

$$v_a' = \frac{v_a/2}{\cos^2 \beta_\infty} . \tag{29, 12}$$

Hiermit wird, da

$$\frac{v_u}{v_a} = \operatorname{tg} \beta_\infty ,$$

$$\overline{v_0 + v_a'} = \overline{\operatorname{tg} \beta_\infty} ,$$

$$\frac{v_0}{u} = \operatorname{tg} \beta_0 ,$$

$$\mathfrak{G} = \frac{u}{v_0} \cdot \frac{v_u}{v_a} \cdot \frac{v_a}{2\, v_a'} \cdot \frac{v_0}{v_0 + v_a'}$$

$$= \cos^2 \beta_\infty = \overline{\operatorname{tg}^2 \beta_\infty + 1} . \tag{29, 13}$$

und da

$$\operatorname{tg} \beta_\infty = \lambda_\infty = \frac{\lambda_0'}{\eta} = \frac{\lambda_0}{\eta x} ,$$

die Zirkulationsverteilung für $\eta =$ konst.:

Abb. 211. Dimensionslose Zirkulationsverteilung $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ für verschiedene λ_∞ bei günstigster Schubverteilung.

$$\mathfrak{G} = \quad x^2 \quad \frac{x^2}{\lambda_\infty^2 + x^2} \quad \text{(Abb. 211).} \tag{29. 14}$$

Für sehr kleine Belastung wird $\eta \to 1$, $\lambda_\infty \to \lambda^*$ und damit hierfür die günstigste dimensionsfrei gemachte Zirkulationsverteilung

$$\tag{29, 15}$$

Hiermit wird (29, 11)

$$\Gamma = \frac{4\pi v_a' R}{\mathfrak{z}} \cdot \lambda_0 \cdot \frac{v_0 + v_a'}{v_0} \cdot \mathfrak{G} = \frac{4\pi v_a' R}{\mathfrak{z}} \frac{\lambda_\infty x^2}{\lambda_\infty^2 + x^2} \tag{29, 16}$$

oder für $\eta \to 1$, $\lambda_0 \to \lambda_\infty \to \lambda^*$

$$\Gamma = \frac{4\pi v_a' R}{\mathfrak{z}} \frac{\lambda^* x^2}{\lambda^{*2} + x^2} . \tag{29, 17}$$

Für kleinen Schlupf hatten wir für das Schraubenelement gefunden (16, 10)

$$k_s' = 4\,\lambda'^{*2}\,\frac{1-\dfrac{\lambda'}{\lambda'^*}}{1+\dfrac{\lambda'^*}{\operatorname{tg}\vartheta}}.$$

Mit obigem Werte für $\operatorname{tg}\vartheta$ wird dies

$$k_s' = \frac{4\,\lambda^{*2}}{x^2}\,\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\lambda^*\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\chi_0\lambda^*+\lambda^{*2}+x^2}{\dfrac{\pi}{2}\chi_0 x^2}} = \frac{4\,\lambda^*}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\cdot\frac{1}{x^2+\lambda^{*2}}. \quad (29, 26)$$

Durch Integration erhalten wir hieraus die Schubziffer für die Gesamtschraube (28, 2)

$$k_s = \int k_s' x^2\,d\,x^2 = \frac{4\,\lambda^{*2}}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\int\frac{x^2\,d\,x^2}{x^2+\lambda^{*2}} = \frac{4\,\lambda^{*2}}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\cdot 2\,\mathfrak{K}_{31}, \quad (29, 27)$$

$$k_s = \frac{4\,\lambda^*}{1+\lambda^*\dfrac{4\,R_0}{\pi t_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(1-\lambda^{*2}\ln\frac{1+\lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right). \quad (29, 28)$$

Die Leistungsziffer eines Schraubenelementes war bei kleinem Schlupf (16, 12) gefunden zu

$$k_d' = 4\,\lambda'^{*3}\,\frac{1-\dfrac{\lambda'}{\lambda^*}}{1+\dfrac{\lambda'^*}{\operatorname{tg}\vartheta}}\left(\frac{\lambda'}{\lambda'^*}+(1+\lambda'^{*2})\,\frac{1-\dfrac{\lambda'}{\lambda'^*}}{1+\dfrac{\lambda'^*}{\operatorname{tg}\vartheta}}\right).$$

Somit mit obigem Werte für $\operatorname{tg}\vartheta$ (29, 25)

$$k_d' = 4\,\frac{\lambda^{*3}}{x^3}\,\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\lambda^*\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\chi_0\lambda^*+\lambda^{*2}+x^2}{\dfrac{\pi}{2}\chi_0 x^2}}\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\left(1+\frac{\lambda^{*2}}{x^2}\right)\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\lambda^*\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\chi_0\lambda^*+\lambda^{*2}+x^2}{\dfrac{\pi}{2}\chi_0 x^2}}\right)$$

$$k_d' = \frac{4\,\lambda^{*3}}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right)\frac{1}{x\,(x^2+\lambda^{*2})}. \quad (29, 29)$$

Die Integration liefert die Leistungsziffer der Gesamtschraube (28, 3)

$$\left.\begin{aligned} k_d = \int k_d' x^3 \cdot d x^2 &= \frac{4\lambda^{*3}}{1+\frac{2\lambda^*}{\pi \chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\frac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right)\int \frac{x^2\,d x^2}{x^2+\lambda^{*2}} \\ &= \frac{4\lambda^{*3}}{1+\frac{2\lambda^*}{\pi \chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\frac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right)\cdot 2\,\mathfrak{K}_{31}\,. \end{aligned}\right\} \quad (29, 30)$$

$$k_d = \frac{4\lambda^{*3}}{1+\lambda^*\frac{4R_0}{\mathfrak{z}\,t_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\lambda^*\frac{4R_0}{\mathfrak{z}\,t_0}}\right)\left(1-\lambda^*\ln\frac{1+\lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right). \quad (29, 31)$$

Der Wirkungsgrad der Gesamtschraube wird somit in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad

$$\eta = \lambda\frac{k_s}{k_d} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda^*}}{\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\lambda^*\frac{4R_0}{\mathfrak{z}\,t_0}}} = \frac{1}{1+\frac{\frac{\lambda^*}{\lambda}-1}{1+\lambda^*\frac{4R_0}{\mathfrak{z}\,t_0}}}\,. \quad (29, 32)$$

Für ein Schraubenelement ist (16, 11) (29, 25)

$$\eta' = \frac{1}{1+(1+\lambda'^{*2})\frac{\frac{\lambda'^*}{\lambda'}-1}{1+\frac{\lambda'^*}{\mathrm{tg}\,\vartheta}}} = \frac{1}{1+\left(1+\frac{\lambda^{*2}}{x^2}\right)\frac{\frac{\lambda^*}{\lambda}-1}{1+\lambda^*\frac{\frac{\pi}{2}\chi_0\lambda^*+\lambda^{*2}+x^2}{\frac{\pi}{2}\chi_0 x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(1+\frac{\lambda^{*2}}{x^2}\right)\frac{\frac{\lambda^*}{\lambda}-1}{\left(\lambda^*+\frac{\pi}{2}\chi_0\right)(x^2+\lambda^{*2})}\cdot\frac{\pi}{2}\chi_0 x^2}\,.$$

$$\eta' = \frac{1}{1+\frac{\frac{\lambda^*}{\lambda}-1}{1+\lambda^*\frac{4R_0}{\mathfrak{z}\,t_0}}}\,. \quad (29, 33)$$

Der Wirkungsgrad der Gesamtschraube ist also, wie für die günstigste Schubverteilung verlangt, gleich dem Wirkungsgrad der Schraubenelemente. Die Schubziffer der Gesamtschraube k_s verhält sich zu der Schubziffer $k_s'(1)$ der Schraubenelemente auf $r = R$, $(x = 1)$, wie

$$\frac{k_{s(\mathfrak{z}=\infty)}}{k_s'(1)} = \left(1-\lambda^{*2}\ln\frac{1+\lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right)(1+\lambda^{*2})\,. \quad (29, 34)$$

Das Verhältnis der Leistungsziffer k_d der Gesamtschraube zu dem des Elementes auf $r = R$, $(x = 1)$, ist ebenfalls

$$\frac{k_{d(\mathfrak{z}=\infty)}}{k'_d(1)} = \left(1 - \lambda^{*2} \ln \frac{1+\lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right)(1+\lambda^{*2}) . \qquad (29, 35)$$

Mit (Zahlentafel 6)

$$1 - \lambda^* \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^{*2}}\right) = 2\,\mathfrak{K}_{31}; \quad \frac{1}{1+\lambda^{*2}} = 2\,\mathfrak{K}'_{31}, \quad \frac{\mathfrak{K}'_{31}}{\mathfrak{K}_{31}} = \gamma'_{31}$$

ist also

$$\frac{k'_s(1)}{k_{s(\mathfrak{z}=\infty)}} = \frac{k'_d(1)}{k_{d(\mathfrak{z}=\infty)}} = \frac{\mathfrak{K}'_{31}}{\mathfrak{K}_{31}} = \gamma'_{31}. \qquad (29, 36)$$

Für große λ^* nähert sich dieses Verhältnis dem Werte $\frac{1}{2}$, für kleine λ^* dem Werte 1. Es ist in Abhängigkeit von λ^* in Abb. 206 dargestellt. Mit Hilfe dieses Quotienten ist es leicht, die an der Elementarschraube gewonnenen Ergebnisse, zunächst wenigstens für kleine Belastung, auf die Gesamtschraube zu übertragen. Da bei gleichem Wirkungsgrad k_d und k_s bzw. c_s um das obige Verhältnis kleiner sind, so ergibt sich unter der genannten Voraussetzung für den Wirkungsgrad dieser Schrauben

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 - \dfrac{k_s}{\left(1 - \lambda^{*2} \ln \dfrac{1+\lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right)(1+\lambda^{*2})}}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{c_s}{\left(1 - \lambda^{*2} \ln \dfrac{1+\lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right)(1+\lambda^{*2})}}} . \qquad (29, 37)$$

Hieraus ergibt sich, daß der Wirkungsgrad einer gegebenen Gesamtschraube nicht nur von der Belastung c_s und dem Fortschrittsgrad $(k_s = \lambda^2 c_s)$ abhängt, sondern auch von dem aerodynamischen Steigungsgrad λ^* und damit vom Schlupf. Das kommt daher, weil die Schubverteilung bei zunehmender Belastung eben immer ungünstiger wird. Der in (29, 37) angegebene Wirkungsgrad gilt nach unseren Voraussetzungen für solche Schrauben, die konstante aerodynamische Steigung und bei kleinem Schub günstigste Schubverteilung besitzen. Es entsteht nun die Frage, ob man mit dem Quotienten $\frac{k_{s(\mathfrak{z}=\infty)}}{k'_s(1)}$ auch bei größeren Belastungen rechnen darf. Dies kann exakt nur beantwortet werden, wenn man unter Verwendung der Gleichungen (15, 19), (16, 4), (16, 5) k_s und k_d für eine solche Gesamtschraube bei größerer Belastung errechnet. Es ist aber anzunehmen, daß man keinen großen Fehler begeht, wenn man mit dem in (29, 36) angegebenen Verhältnis von den in (16, 4) und (16, 5) angegebenen Gleichungen der Schubziffer k'_s und der Leistungsziffer k'_d der Elementarschraube ausgehend die Schub-

ziffer k_s und die Leistungsziffer k_d der Gesamtschraube berechnet. Es dürfte demnach genügen, zu schreiben

$$k_s = 4(\Lambda - \lambda_0)\Lambda \cdot \left(1 - \lambda^{*2} \ln \frac{1 + \lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}\right)(1 + \lambda^{*2}), \tag{29, 38}$$

$$k_d = 4 \operatorname{tg}\vartheta (\lambda^* - \Lambda)\Lambda \cdot \left(1 - \lambda^* \ln \frac{1 + \lambda^*}{\lambda^{*2}}\right)(1 + \lambda^{*2}), \tag{29, 39}$$

wobei für die Gesamtschraube zu setzen ist (29, 25)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\lambda^*} \frac{1}{1 + \lambda^* \frac{4 R_0}{\mathfrak{z}\, t_0} \cdot \frac{1 + \lambda^{*2}}{\lambda^{*2}}}, \tag{29, 40}$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_0 - \operatorname{tg}\vartheta (1 - 2 \operatorname{tg}\vartheta \lambda^*)}{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \operatorname{tg}\vartheta \lambda^* (1 - \operatorname{tg}\vartheta \lambda^*)(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)}{(\lambda_0 - \operatorname{tg}\vartheta (1 - 2 \operatorname{tg}\vartheta \lambda^*))^2}}\right).$$

Der zugehörige Wirkungsgrad ist in den Abb. 157—161 angegeben.

Da der Schlupf um so kleiner ist, je größer die Blattbreite ist, und da man damit nach obigem einen etwas besseren Wirkungsgrad bekommen kann, so ergibt sich hieraus, daß ein Teil des mit der größeren Breite der Blätter verbundenen Reibungsverlustes hierdurch wieder etwas ausgeglichen wird. Dies näher zu untersuchen hat natürlich nur einen Sinn, wenn man eine bei mehreren Betriebszuständen brauchbare Schraube zu entwerfen hat, da man bei Anpassung an einen einzigen Betriebszustand mit der günstigsten Schubverteilung und mit einem günstigsten Gleitwert rechnen darf.

e) Der Blattbreitenverlauf bei konstantem Anstellwinkel der Flügelprofile. Wir haben bisher die Schraube betrachtet, die in Nähe des Schubs Null für beliebigen Schub günstigste Schubverteilung besaß. Wir wollen nunmehr auf diese Forderung verzichten, welche auf konstante aerodynamische Steigung führte. Wir wollen nunmehr nur fordern, daß die Schubverteilung für einen einzigen Betriebszustand die günstigste sei, verlangen dabei aber, daß der Anstellwinkel α_∞ der Flügelprofile konstant sein soll. Wenn wir nämlich später den Einfluß der Reibung in unsere Untersuchungen mit einbeziehen, so entspricht diese Forderung im wesentlichen der Forderung eines konstanten Gleitwertes ε. Die günstigste Zirkulationsverteilung ist für kleinen Schub (29, 14)

$$\mathfrak{G} = \frac{x^2}{\lambda_\infty^2 + x^2}.$$

Ihr entspricht ein Blattbreitenverlauf (wenn wir $w_\infty \approx w_0 = v/\sin\beta_0$ setzen) (29, 18)

$$t_{\text{red}} = 4 \mathfrak{G} \frac{v_a'}{\mathfrak{z}\, \omega} \frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_\infty},$$

oder mit

$$v_a' = v_0 \frac{1 - \eta}{\eta}; \quad \omega = \frac{u}{R}, \quad \sin\beta_0 = \frac{\lambda_0'}{\sqrt{1 + \lambda_0'^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{x^2 + \lambda_0^2}},$$

$$t_{\text{red}} = \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{4 R}{\mathfrak{z} \sin\alpha_\infty} \mathfrak{G} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\sqrt{x^2 + \lambda_0^2}}. \tag{29, 41}$$

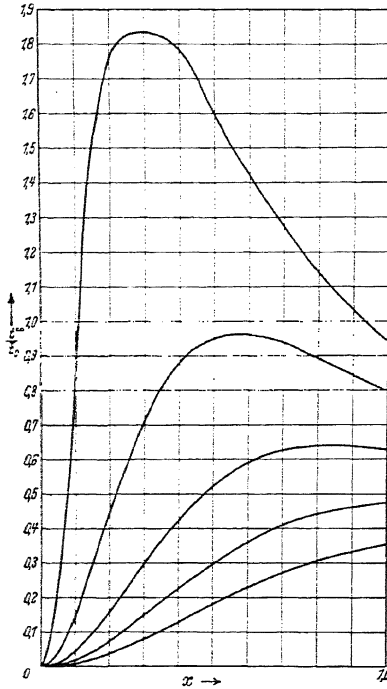



Abb. 213. Blattbreitenverlauf $t'^{\infty}_{\text{red}}/\bar{t}_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei konstantem α_∞ über den Schraubenradius ($\mathfrak{z} = \infty$), für $\lambda_0 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$.

Setzen wir

$$\bar{t}_0 = \frac{1-\eta}{\eta}\,\frac{4R}{\mathfrak{z}\sin\alpha_\infty}\,\lambda_0^2\,, \qquad (29,42)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} t_{\text{red}} &= \bar{t}_0\,\mathfrak{S}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda_0^2}} \\ &= \bar{t}_0\,\frac{x^2}{\left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2 + x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda_0^2}}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (29,43)$$

oder mit $\eta \to 1$

$$t_{\text{red}} = \bar{t}_0\,\frac{x^2}{(x^2+\lambda_0^2)^{3/2}} \quad \text{(Abb. 213).} \qquad (29,44)$$

Die sich damit ergebende Schraube ist eine Schraube konstanter Schränkung $\delta = \alpha_\infty$. Der Nullsteigungsgrad ist λ_0/η. Der Blattbreitenverlauf ist von dem vorhin ermittelten wesentlich verschieden.

Für $\lambda_0 = 0$ ist der Blattbreitenverlauf durch eine Hyperbel $t_{\text{red}} = \bar{t}_0 x^{-1}$ gegeben. Für endliche λ_0 bleibt die Blattbreite unter diesem Wert, sie nimmt von innen nach außen zunächst zu, um dann wenigstens bei kleinem λ wieder abzunehmen.

30. Die Berücksichtigung der Reibung.

a) Die günstigste Schubverteilung unter Berücksichtigung der Reibung. Unter Berücksichtigung der Reibung gilt (13,30)

$$k_s' = 4\lambda'^2\,\frac{1-\eta'}{\eta'^2}\,\frac{1+\frac{\lambda'^2}{\eta'}}{\left(1+\left(\frac{\lambda'}{\eta'}\right)^2\right)^2}\cdot\left(1-\varepsilon\frac{\eta'}{\lambda'}\right)\left(1-\varepsilon\frac{\eta'}{\lambda'}\,\frac{1+\frac{\lambda'^2}{\eta'}}{1-\eta'}\right),$$

also ist (28,11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln k_s'}{\partial \ln \eta'} &= -\frac{2-\eta'}{1-\eta'} + \lambda'^2\left(\frac{4\eta'^2}{\eta'^2+\lambda'^2} - \frac{\eta'}{\eta'+\lambda'^2}\right) \\ &\quad + \eta'\left\{\frac{-\frac{\varepsilon}{\lambda'}}{1-\varepsilon\frac{\eta'}{\lambda'}} + \frac{-\frac{\varepsilon}{\lambda'}\,\frac{(1-\eta')+\lambda'^2+\eta'}{(1-\eta')^2}}{1-\frac{\varepsilon}{\lambda'}\,\frac{\lambda'^2+\eta'}{1-\eta'}}\right\}, \\ \frac{\partial \ln k_s'}{\partial \ln \eta'} &= -\left\{\frac{2-\eta'}{1-\eta'} - \lambda'^2\left(\frac{4\eta'^2}{\eta'^2+\lambda'^2} - \frac{\eta'}{\eta'+\lambda'^2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \varepsilon\eta'\left(\frac{1}{\lambda'-\varepsilon\eta'} + \frac{1+\lambda'^2}{(1-\eta')(\lambda'(1-\eta')-\varepsilon(\lambda'^2+\eta'))}\right)\right\}. \end{aligned} \qquad (30,1)$$

Für die günstigste Schubverteilung gilt also (28, 10)

$$\Theta = \frac{1}{1+\dfrac{2}{\dfrac{2-\eta'}{1-\eta'}-\lambda'^2\left(\dfrac{4\,\eta'^2}{\eta'^2+\lambda'^2}-\dfrac{\eta'}{\eta'+\lambda'^2}\right)+\varepsilon\,\eta'\left(\dfrac{1}{\lambda'-\varepsilon\,\eta'}+\dfrac{1-\lambda'^2}{(1-\eta')(\lambda'(1-\eta')-\varepsilon(\lambda'^2+\eta'))}\right)}} \tag{30, 2}$$

Für über den Schraubenradius konstante ε wurde hieraus $\Theta(\eta'\lambda')$ berechnet und in Abb. 214 und Abb. 215 aufgetragen. Hieraus ließ sich dann die Verteilung des Wirkungsgrades η' über den Schraubenradius, die der günstigsten Schubverteilung der Gesamtschraube entspricht, in Abb. 216 und 217 darstellen.

Für kleine Belastung und gutes ε ergibt sich, daß auch bei Berücksichtigung der Reibung $\eta' =$ konst. über dem Schraubenradius im wesentlichen als Vorschrift günstigster Schubverteilung gelten darf. Nur in Nähe der Nabe und bei sehr kleinem Fortschrittsgrad in Nähe der Flügelspitzen trifft dies nicht zu. Da bei der Ableitung nicht $\varepsilon =$ konst. über dem Schraubenradius vorausgesetzt wurde, so gilt diese Näherungsbedingung für günstigsten Gesamtwirkungsgrad auch für kleines aber über den Schraubenradius veränderliches ε.

Bei nicht konstantem ε kann man also durch Rechnung oder durch Interpolation aus Abb. 208, 214, 215 auch hierfür $\Theta(\eta'\lambda')$ bestimmen und durch Umzeichnen die günstigste η'-Verteilung bestimmen.

b) Der Wirkungsgrad der Gesamtschraube bei konstantem Gleitwert und konstantem Wirkungsgrad der Schraubenelemente. Nach vorstehendem ist also die Schubverteilung in guter Annäherung auch unter Berücksichtigung der Reibung dann am günstigsten, wenn der Wirkungsgrad über dem Schraubenradius konstant ist.

Die Schubziffer k_s' der Schraubenelemente ist (13, 30), (13, 33), (13, 34)

$$k_s' = 4\,\lambda'^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\frac{1+\dfrac{\lambda'^2}{\eta}}{\left(1+\left(\dfrac{\lambda'}{\eta}\right)^2\right)^2}\left(1-\varepsilon\,\frac{\eta}{\lambda'}\right)\left(1-\varepsilon\,\frac{\eta}{\lambda'}\,\frac{1+\dfrac{\lambda'^2}{\eta}}{1-\eta}\right),$$

$$k_s' = 4\,\lambda'^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\frac{1+\dfrac{\lambda'^2}{\eta}}{\left(1+\left(\dfrac{\lambda'}{\eta}\right)^2\right)^2}$$

$$-\,\varepsilon\cdot 4\,\frac{\lambda'}{\eta}\,\frac{\left(1+\dfrac{\lambda'^2}{\eta}\right)\left(2-\eta+\dfrac{\lambda'^2}{\eta}\right)}{\left(1+\left(\dfrac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}+\varepsilon^2\cdot 4\,\frac{\left(1+\dfrac{\lambda'^2}{\eta}\right)^2}{\left(1+\left(\dfrac{\lambda'}{\eta}\right)^2\right)^2},$$

oder mit $\lambda' = \lambda/x$

$$\left.\begin{aligned} k_s' &= 4\lambda^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\cdot\frac{x^2+\eta\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{\left(x^2+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2} \\ &- \varepsilon\cdot 4\cdot\frac{\lambda}{\eta}\,\frac{\left(x^2+\eta\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)\left((2-\eta)x^2+\eta\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)}{x\left(x^2+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}+\varepsilon^2\cdot 4\cdot\frac{\left(x^2+\eta\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}{\left(x^2+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}\,. \end{aligned}\right\}\quad(30,3)$$

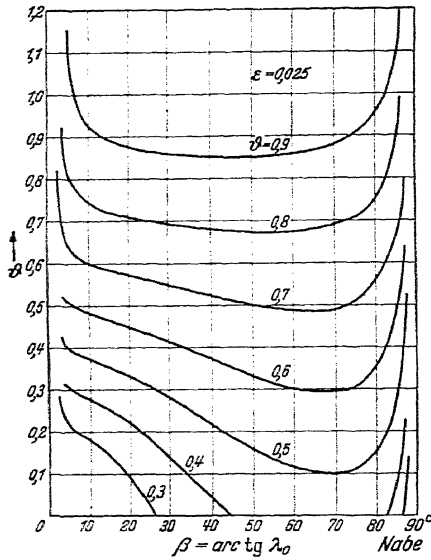



Abb. 214.
LAGRANGEscher Faktor $\Theta\left(\eta'_{(\varepsilon=0{,}025)}\,\lambda'\right)$ für Bestschrauben bei $\varepsilon = 0{,}025$.

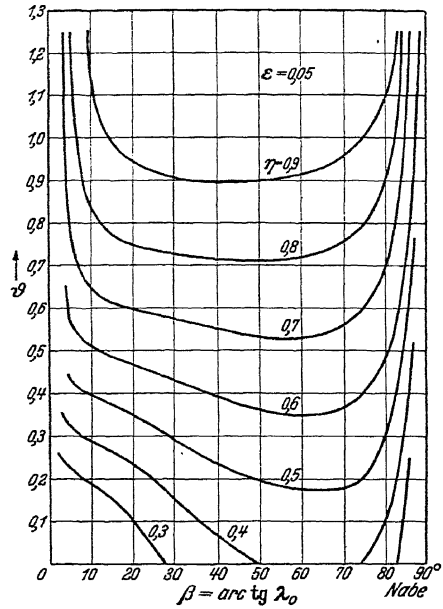



Abb. 215.
LAGRANGEscher Faktor $\Theta\left(\eta'_{(\varepsilon=0{,}050)}\,\lambda'\right)$ für Bestschrauben bei $\varepsilon = 0{,}050$.

Die Schubziffer der Gesamtschraube wird bei konstantem ε mit $\frac{\lambda}{\eta} = \lambda_p$

$$k_s = 2\int k_s' x^3\,dx = \int k_s' x^2\,dx^2 = 4\lambda^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\int\limits_0^1\frac{x^2(x^2+\eta\lambda_p^2)}{(x^2+\lambda_p^2)^2}\,dx^2 \qquad (28,2)$$

$$-\varepsilon\cdot 8\lambda_p\int\limits_0^1\frac{(x^2+\eta\lambda_p^2)\,((2-\eta)\,x^2+\eta\lambda_p^2)\,x^2}{\left(x^2+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\right)^2}\,dx+\varepsilon^2\cdot 4\int\limits_0^1\frac{x^2(x^2+\eta\lambda_p^2)^2}{(x^2+\lambda_p^2)^2}\,dx^2.$$

Die Integration ergibt mit (28,12) (28,13)

$$\int\limits_0^1\frac{x^m}{(x^2+\lambda_p)^n}\,dx = \mathfrak{K}_{m,n}(\lambda_p)\,,$$

$$k_s = 4\lambda^2 \frac{1-\eta}{\eta^2}\{2\mathfrak{K}_{52} + 2\eta\lambda_p^2\mathfrak{K}_{32}\}$$
$$- \varepsilon\cdot 4\lambda_p\{2(2-\eta)\mathfrak{K}_{62} + 2(3-\eta)\eta\lambda_p^2\mathfrak{K}_{42} + 2\eta^2\lambda_p^4\mathfrak{K}_{22}\}$$
$$+ \varepsilon^2\cdot 4\cdot\{2\mathfrak{K}_{72} + 4\eta\lambda_p^2\mathfrak{K}_{52} + 2\eta^2\lambda_p^4\mathfrak{K}_{32}\}.$$

$$\left.\begin{aligned} k_s = {} & 4\lambda^2\frac{(1-\eta)}{\eta^2}\{2\eta\,\mathfrak{K}_{31} + 2(1-\eta)\mathfrak{K}_{52}\} \\ & - \varepsilon\cdot 4\lambda_p\{2\eta^2\mathfrak{K}_{20} + 6\eta(1-\eta)\mathfrak{K}_{41} + 4(1-\eta)\mathfrak{K}_{62}\} \\ & + \varepsilon^2\cdot 4\cdot\{2\eta^2\mathfrak{K}_{30} + 4\eta(1-\eta)\mathfrak{K}_{51} + 2(1-\eta)^2\mathfrak{K}_{72}. \end{aligned}\right\} \quad (30,4)$$

Abb. 216. Wirkungsgradverlauf $\eta'(\lambda')$ für Bestschrauben bei $\varepsilon = 0{,}025$.

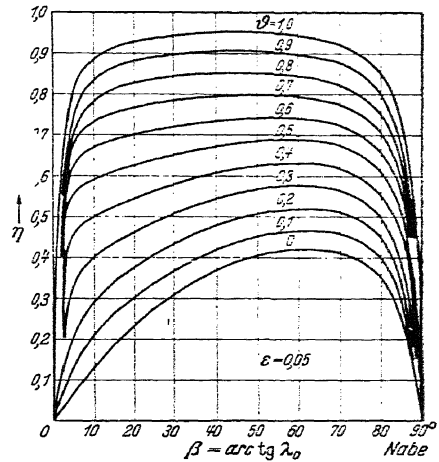



Abb. 217. Wirkungsgradverlauf $\eta'(\lambda')$ für Bestschrauben bei $\varepsilon = 0{,}050$.

und nach Einsetzen der $\mathfrak{K}_{m,n}$ (Zahlentafel 6)

$$\left.\begin{aligned} k_s = {} & 4\lambda^2\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{1 - (2-\eta)\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2 \ln\frac{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2} + (1-\eta)\frac{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right\} \\ & - \varepsilon\cdot 8\frac{\lambda}{\eta}\left\{\frac{2-\eta}{3} - \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2[(2-\eta)^2-\eta] - 2(1-\eta)^2\frac{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^4}{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^3[2\cdot(2-\eta)^2-(3-\eta)]\operatorname{arctg}\frac{1}{\frac{\lambda}{\eta}}\right\} \\ & + \varepsilon^2\cdot 4\left\{\frac{1}{2} - 2\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2\cdot(1-\eta) - (1-\eta)^2\frac{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^4}{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^4[(2-\eta)^2-1]\ln\frac{1+\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (30,5)$$

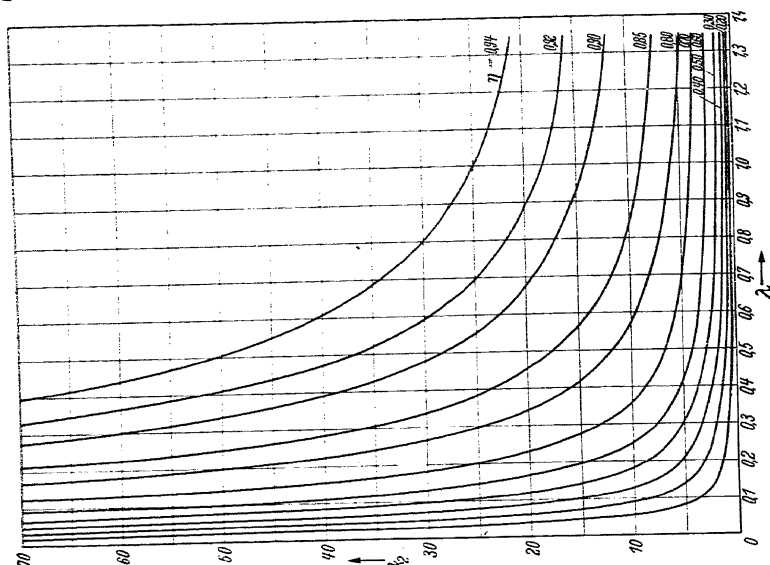



Abb. 219. Hilfsgröße $k_2^{(\infty)}$ zur Berücksichtigung der Reibung beim Wirkungsgrad.

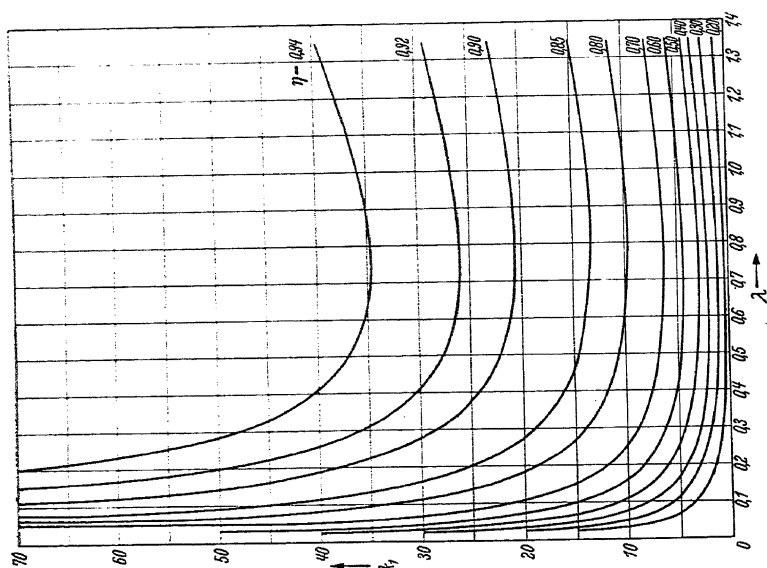



Abb. 218. Hilfsgröße $k_1^{(\infty)}$ zur Berücksichtigung der Reibung beim Wirkungsgrad.

oder bei sinngemäßer Abkürzung

$$k_s = k_{s(\varepsilon=0)} - \varepsilon k_{s_\varepsilon} + \varepsilon^2 k_{s_{\varepsilon\varepsilon}} = k_{s(\varepsilon=0)}\left(1 - \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2\right) \qquad (30,6)$$

und entsprechend $\quad k_d = k_{d(\varepsilon=0)}(1 - \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2)\,. \qquad (30,7)$

Die Größen $k_{d(\varepsilon=0)}$, k_1, k_2 sind in Abb. 210 und Abb. 218 und 219 wiedergegeben. In Abb. 220 und 221 ist für $\varepsilon = 0{,}025$ und $\varepsilon = 0{,}050$ $k_d(\lambda, \eta)$ dargestellt.

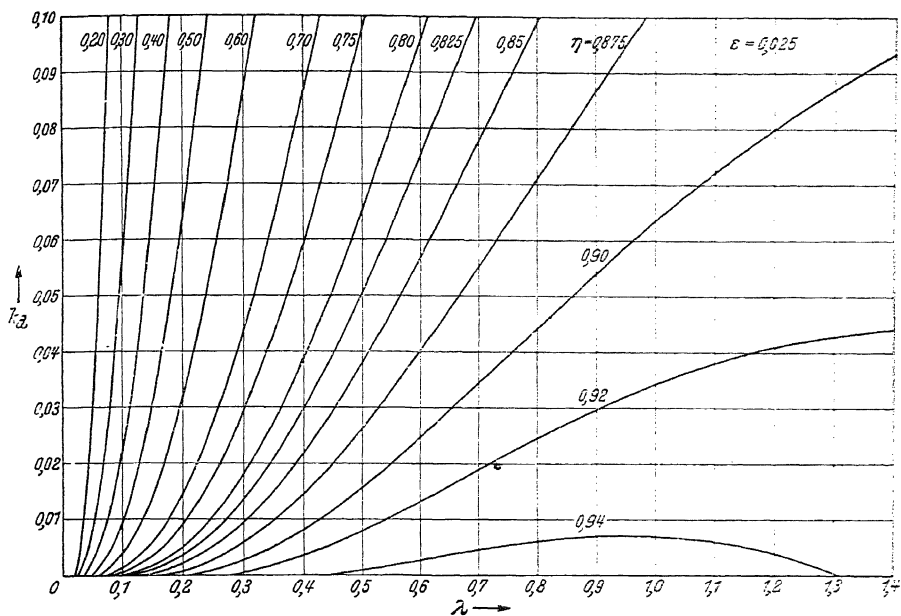



Abb. 220. Wirkungsgrad η in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad λ und von der Leistungsziffer k_d für $\varepsilon = 0{,}025$.

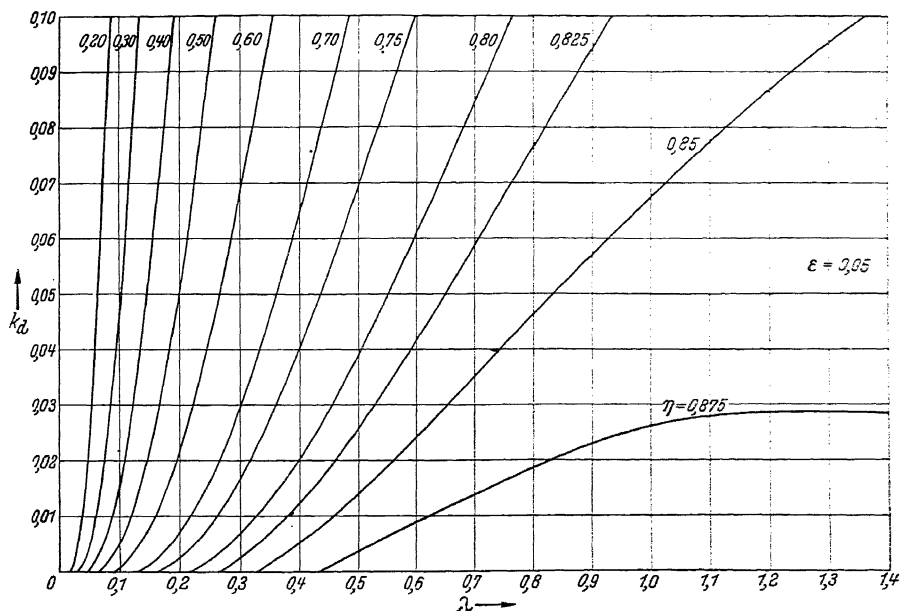



Abb. 221. Wirkungsgrad η in Abhängigkeit vom Fortschrittsgrad λ und von der Leistungsziffer k_d für $\varepsilon = 0{,}05$.

H. Die Theorie der Luftschraube endlicher Flügelzahl.

31. Die Bedingungen für eine Schraube kleinster Austrittsverluste.

a) Der Vergleich zwischen Schraube und Tragflügel. Man ist offenbar berechtigt die Flügel einer Schraube mit den Tragflügeln eines Flugzeugs zu vergleichen. In beiden Fällen werden Kräfte auf die umgebende Luft ausgeübt, indem ihr ein Impuls erteilt wird. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Fortbewegung eines Tragflügels, abgesehen vom Kurvenflug, eine geradlinige, die der Luftschraubenflügel eine schraubende ist. In beiden Fällen entspricht der Erteilung des Impulses eine Zufuhr von kinetischer Energie, welcher eine aufzubringende Leistung entspricht. Beim Tragflügel stellt man sich nun die Aufgabe, einen Auftrieb senkrecht zur Flugrichtung zu erzeugen unter möglichst kleinem Aufwand der hierzu aufzubringenden Leistung, bei der Luftschraube einen Schub in Flugrichtung unter gleichen Bedingungen.

Beim Tragflügel hängt der Widerstand

$$W = \frac{N}{v}$$

außer von Auftrieb A, Spannweite b, Fluggeschwindigkeit v und Luftdichte ϱ von der Verteilung des Auftriebs über die Spannweite ab. Der Widerstand ist nun nach einem von MUNK bewiesenen Satze bei gegebenem A, b, v, ϱ dann ein Minimum, wenn die der Luft von der Tragfläche erteilte Vertikalgeschwindigkeit an den von der Tragfläche durchlaufenen Stellen weit hinter dem Tragflügel über die Spannweite konstant ist. Die Strömung hinter einer Tragfläche mit günstigster Auftriebsverteilung ist also so, wie wenn die von der sehr dünn und zu einer tragenden Linie zusammengefaßt zu denkenden Tragfläche durchlaufene Fläche, die Spur der Tragfläche, erstarrt wäre und sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit abwärts bewegte.

Es liegt nun nahe, bei der günstigsten Schubverteilung einer Schraube ähnliches zu erwarten. Bei der schon untersuchten Schraube sehr großer Flügelzahl hatte sich als günstigste Schubverteilung bei kleiner Belastung jene ergeben, bei welcher die zu den Schraubenflächen normalen Komponenten der Störgeschwindigkeiten $\Delta \mathfrak{v}$ gerade so groß sind, wie dies einer Verschiebung dieser Schraubenflächen mit einer konstanten Geschwindigkeit $w = 2 v_a'$ entspricht (Abb. 207). Bei endlicher Flügelzahl ist das gleiche der Fall, wie dies von BETZ bewiesen werden konnte.

Die Strömung hinter einer Schraube *mit geringstem Energieverlust* ist also so, wie wenn die von jedem sehr dünn und zu einer tragenden Linie zusammengefaßt zu denkenden Schraubenflügel durchlaufene

Schraubenfläche (Abb. 222) erstarrt wäre und sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach hinten verschöbe oder sich mit einer bestimmten Drehschnelle ω' um die Schraubenachse drehte:

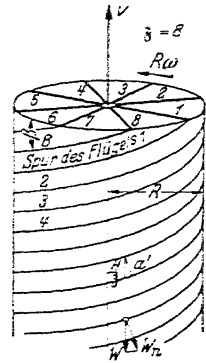
$$\omega' = \frac{2 v'_n}{\;} = 2 \cdot \frac{v'_n}{v_0} \cdot \omega . \qquad (31,1)$$

Abb. 222. Schema der von der Schraube durchlaufenen Schraubenfläche und Erläuterung der Bedingung geringsten Energieverlustes. (Beispiel $z = 8$.)

Letzteres ist bei einer Schraubenfläche nur eine andere Ausdrucksweise für erstere Bewegungsart, man kann ja durch eine entsprechende Bewegung eine Schraubenfläche in sich selbst verschieben. Eine beliebige schraubende Bewegung kann man nun durch eine solche Verschiebung in der Schraubenfläche und eine reine Drehung oder eine reine Verschiebung darstellen, so daß einer solchen reinen Drehung und einer solchen reinen Verschiebung die gleichen Normalkomponenten entsprechen.

Dieser Satz über die günstigste Schubverteilung in einer Schraube entspricht also vollkommen dem über die günstigste Auftriebsverteilung an einem Tragflügel und stellt seine Verallgemeinerung auf drehende Bewegung dar.

b) Das Wesen des Einflusses endlicher Flügelzahl. Der hauptsächliche Unterschied zwischen einer Schraube endlicher Flügelzahl und einer Schraube sehr großer Flügelzahl mit gleicher Verteilung des Wirkungsgrades der Elemente über den Schraubenradius besteht darin, daß infolge des Druckausgleichs zwischen Saug- und Druckseite, der genau wie bei einem Tragflügel nach den Flügelenden zu notwendig ist, schon um so weiter von den Flügelenden entfernt einsetzt, je weiter die Flügelenden der einzelnen Flügel untereinander entfernt sind und je größer der Fortschrittsgrad der Schraube ist. Bei gleicher Wirkungsgradverteilung über den Schraubenradius möge nun Schub und Drehkraft eines Schraubenelementes der endlichvielflügligen Schraube das $\varkappa$-fache von dem der Schraube sehr großer Flügelzahl sein.

Macht man die praktisch bewährte, theoretisch aber nicht streng zu begründende Annahme, daß $\varkappa$ nur von der Flügelzahl und dem Fortschrittsgrade abhängig sei, so ist es, wenn man $\varkappa$ kennt, nicht schwer, eine gegebene Schraube endlicher Flügelzahl auf ihr Verhalten nachzurechnen oder eine Schraube gegebener Leistung bzw. gegebenen Schubs zu entwerfen mit Hilfe der für die Elementarschraube schon gewonnenen Kenntnisse. Im ersteren Falle hat man statt des gegebenen Blattbreitenverhältnisses das $1/\varkappa$-fache zu nehmen und Leistungs- und Schubziffer der sich ergebenden Elementarschrauben unendlicher Flügelzahl zu berechnen. Das $\varkappa$-fache davon sind dann Leistungs- und Schubziffer der Elemente der gegebenen Schraube endlicher Flügelzahl.

Integration liefert Leistungs- und Schubziffer der ganzen Schraube und wegen $\eta = \lambda \frac{k_s}{k_d}$ auch deren Wirkungsgrad. Im zweiten Falle wählt man eine Verteilung der Leistungsziffer bzw. der Schubziffer der Elemente der gesuchten Schraube endlicher Flügelzahl. Das $1/\varkappa$fache gibt dann die Leistungsziffer bzw. die Schubziffer der Elemente der Schraube unendlicher Flügelzahl, die nun berechnet werden können. Das erhaltene Blattbreitenverhältnis der Schraube unendlicher Flügelzahl ergibt durch das $\varkappa$-fache das Blattbreitenverhältnis der gesuchten Schraube. Mit der gemachten Annahme über $\varkappa$ wird unter Berücksichtigung der Flügelzahl, der Reibung, der axialen und der tangentialen Austrittsverluste

$$k_s'^{(\mathfrak{z})} = \varkappa \cdot k_s'^{(\infty)} . \tag{31, 2}$$

Hiermit wird aber

$$\frac{\partial \ln k_s'^{(\mathfrak{z})}}{\partial \ln \eta} = \frac{\partial \ln k_s'^{(\infty)}}{\partial \ln \eta} . \tag{31, 3}$$

Die hochgestellten Indizes (∞) bzw. $(\mathfrak{z})$ sollen von hier ab zur Unterscheidung der Beziehungen für die unendlichvielflügelige und die endlichvielflügelige ($\mathfrak{z} = 2, 3, 4$) dienen, während $'$ auf das Schraubenelement hinweisen soll.

Auch unter Berücksichtigung der Flügelzahl nach obiger Annahme über $\varkappa$ wird also die beste Schubverteilung über den Radius so, daß der Wirkungsgrad den für unendliche Flügelzahl gefundenen Bedingungen entspricht. Für Reibungsfreiheit und kleine Belastung ist dies Ergebnis unserer Annahme bezüglich $\varkappa$ in Übereinstimmung mit der exakten Optimalbedingung, wie aus dem folgenden hervorgeht.

Bei der Beschaffenheit gebräuchlicher Schrauben dürfte diese Annahme immer zureichen. Eine Verbesserung der Theorie, wie sie möglich wäre durch Berücksichtigung der von der Schraube abgehenden freien schraubenförmigen Wirbel, wie dies ja beim Tragflügel mit seinen abgehenden freien geraden Wirbeln in der Tragflügeltheorie geschieht, würde praktisch zu großen Schwierigkeiten führen ohne die Ergebnisse irgendwie noch zu verbessern. Deshalb ist hier von der Darlegung einer ausführlichen Schraubenwirbeltheorie abgesehen und diese im folgenden nur soweit angedeutet, als notwendig erschien für das Verständnis der Bestimmung von $\varkappa$ im Falle der schwachbelasteten Schraube günstigster Schubverteilung. Im folgenden wird $\varkappa^{(\mathfrak{z})}$ als Abminderungsfaktor bezeichnet, da $\varkappa^{(\mathfrak{z})}$ angibt, um wieviel die Zirkulation bzw. der Schubanteil und der Leistungsanteil der $\mathfrak{z}$-flügeligen Schraube bei gleichem Wirkungsgrad in dem betreffenden Schraubenelement verringert sind gegenüber einer unendlichvielflügeligen Schraube. Die Bedeutung von $\varkappa^{(\mathfrak{z})}$ kann aber auch noch anders beschrieben werden. $\varkappa^{(\mathfrak{z})}$ gibt nämlich auch an, wie groß im Mittel die Umfangskomponente v_u ist

gegenüber v_u am Orte des Schraubenflügels. Deshalb wird für $\varkappa^{(5)}$ auch die Bezeichnung Mittelwertfaktor gebraucht. Während im äußeren Teil des Schraubenflügels $\varkappa^{(5)}$ immer kleiner als 1 ist, zeigen die späteren Untersuchungen, daß in Nähe der Schraubenachse $\varkappa^{(5)}$ auch größer als 1 wird und sogar dem Werte ∞ zustrebt. Im Mittel ist jedoch $\varkappa^{(5)}$ immer kleiner als 1, wie die Gleichwertigkeitszahlen $\gamma^{(5)}$ zeigen, welche im folgenden noch eingeführt werden.

c) Bestimmung der günstigsten Schubverteilung durch Variationsrechnung. Mit Hilfe der Variationsrechnung soll nun die Bedingung günstigster Schubverteilung der Schraube schwacher Belastung und Reibungsfreiheit hergeleitet werden. Ist N_v der Leistungsverlust der Schraube infolge der von ihr der Strömung zugeführten kinetischen Energie und ist S der Schub der Schraube, so ist mit Θ als LAGRANGEschem Faktor die Bedingung günstigster Schubverteilung

$$\delta N_v - \Theta \delta S = 0 . \tag{31, 4}$$

Der Schubanteil dS, den jedes Schraubenflügelelement liefert, ist die in Fortschrittsrichtung fallende Komponente der auf dieses Element ausgeübten Luftkräfte dP. Diese läßt sich aus dem Satze von KUTTA und JOUKOWSKI berechnen aus der Zirkulation Γ zu

$$dP = \varrho \Gamma w_\infty dr . \tag{31, 5}$$

Mit $w_\infty = u/\cos\beta$, $dS = dP\cos\beta$, $df' = r\,dr\,d\alpha$, $\Gamma_\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\Gamma$ wird der Schub

$$S = \mathfrak{z}\varrho \int_0^R \Gamma u\,dr = \mathfrak{z}\frac{\omega}{2\pi}\varrho \int_{F'} \Gamma\,df', \tag{31, 6}$$

wobei das Integral über sämtliche $\mathfrak{z}$ Schraubenflügelflächen F' $(0 < r < R$, $0 < \alpha < 2\pi)$ zu erstrecken ist. Die Variation δS ist damit

$$\delta S = \mathfrak{z}\frac{\omega}{2\pi}\varrho \int_{F'} \delta\Gamma\,df' . \tag{31, 7}$$

Der Leistungsverlust N_v einer Schraube ist das Produkt aus Drehzahl $\omega/2\pi$ und der je Umdrehung zugeführten kinetischen Energie T. Da die absolute Strömung außerhalb der hinter jedem Schraubenflügel zurückbleibenden schraubenförmigen Wirbelfläche eine Potentialströmung ist, deren Potential Φ sei, ist

$$T = \frac{\varrho}{2}\int_\mathfrak{R} (\operatorname{grad}\Phi)^2\,d\tau .$$

Das Integral ist dabei über einen Raum $\mathfrak{R}$ zu erstrecken, der seitlich unbegrenzt ist, in Richtung der Schraubenachse aber die Ausdehnung des Weges besitzt, den die Schraube bei einer Umdrehung zurücklegt. Damit wird

$$N_v = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{\varrho}{2}\int (\operatorname{grad}\Phi)^2\,d\tau \tag{31, 8}$$

und die Variation
$$\delta N_v = \frac{\omega}{2\pi}\varrho\int(\operatorname{grad}\Phi\cdot\operatorname{grad}\delta\Phi)\,d\tau\,. \qquad (31,9)$$

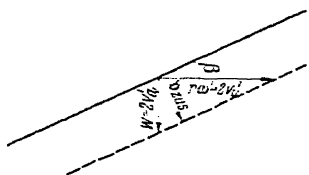
Dieses Raumintegral kann mit Hilfe des GREENschen Satzes
$$\int\limits_{\mathfrak{R}} U\,\Delta V\,d\tau = \int\limits_{F} U\frac{\partial V}{\partial n}\,df - \int\limits_{\mathfrak{R}}(\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V)\,d\tau$$
n ein Oberflächenintegral umgeformt werden. Für unseren Zweck ist $V = \Phi$ und damit $\Delta V = 0$, ferner $U = \delta\Phi$ zu setzen. Das Oberflächenintegral haben wir dann über die Berandung F des Regularitätsgebietes von Φ zu erstrecken. Diese ist gegeben durch die Vorder- und Rückseiten der hinter der Schraube zurückbleibenden Schraubenwirbelflächen, deren Elemente df seien. Wir erhalten
$$\int(\operatorname{grad}\Phi\cdot\operatorname{grad}\delta\Phi)\,d\tau = \mathfrak{z}\int\delta\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,df\,, \qquad (31,10)$$
also
$$\delta N_v = \mathfrak{z}\frac{\omega}{2\pi}\varrho\int\limits_{F}\delta\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,df\,. \qquad (31,11)$$

Da nun, wenn der Index $+$ die Vorderseite, der Index $-$ die Hinterseite der Schraubenwirbelflächen kennzeichnet,
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_+} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n_-}\,,\qquad \Phi_+ = -\Phi_-\,,$$
o wird
$$\delta N_v = \mathfrak{z}\frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\varrho\int\limits_{F_+}\delta\Phi_+\frac{\partial\Phi}{\partial n_+}\,df_+\,. \qquad (31,12)$$

$\partial\Phi/\partial n_+$ dürfen wir nun als Komponente v_{zus} einer in Achsenrichtung der Schraube fallenden Geschwindigkeit $w = 2\,v_a'$ auffassen (vgl. Abb. 223). Da die Normale n zur Schraubenfläche mit der Schraubenachse den örtlichen Steigungswinkel β bildet, so ist

Abb. 223. Veranschaulichung der Verschiebung bzw. Drehung der Schraubenspurflächen.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_+} = v_{\text{zus}} = 2\,v_a'\cos\beta\,. \qquad (31,13)$$

Entsprechend ist mit $df' = r\,dr\,d\alpha$
$$df = \frac{df'}{\cos\beta}\,. \qquad (31,14)$$

Der Unterschied des Potentials auf Vorder- und Rückseite ist Γ, wenn Γ die auf jeden der $\mathfrak{z}$ Flügel entfallende Zirkulation ist. Wir erhalten also
$$\delta N_v = \mathfrak{z}\frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\varrho\int\limits_{F'}\delta\Gamma\cdot 2v_a'\,df' \qquad (31,15)$$
und damit als Optimalbedingung (31,4)
$$\delta N_v - \Theta\,\delta S = \mathfrak{z}\frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\varrho\int\delta\Gamma(2v_a' - \Theta)\,df' = 0\,. \qquad (31,16)$$

Damit dies zutrifft, muß
$$2 v_a' = \Theta \tag{31, 17}$$
sein, d. h. v_a' muß konstant sein.

Daraus folgt zunächst, daß die Verteilung des Potentials Φ über den Schraubenwirbelflächen so sein muß, als ob sich diese mit der nunmehr als konstant erhaltenen Geschwindigkeit $2 v_a'$ in Richtung der Schraubenachse verschieben würden.

Da die Schraubenwirbelflächen erst in der Schraubenkreisebene selbst beginnen, ist, wie man aus Symmetriegründen einsieht, die durch die Schraubenwirbelflächen an den Schraubenflügeln selbst hervorgerufene Störgeschwindigkeit nur halb so groß wie an den Schraubenwirbelflächen weit hinter der Schraube. Sie entspricht der halben Verschiebegeschwindigkeit, die v_a' ist. Da nun die Strömungskräfte an den Schraubenflügeln senkrecht stehen zur örtlichen Anströmgeschwindigkeit, so ergibt sich hieraus mit
$$\operatorname{tg} \beta_\infty = \frac{v_0 + v_a'}{u}, \qquad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{v_0}{u}$$
als Wirkungsgrad eines Schraubenelementes der endlichvielflügeligen Schraube genau wie bei der Elementarschraube
$$\eta' = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \beta_\infty} = \frac{v_0}{v_0 + v_a'} . \tag{31, 18}$$
Da aber $v_a' = \text{konst.}$ ist für eine Schraube günstigster Schubverteilung, so folgt hieraus, daß für eine solche Schraube auch bei endlicher Flügelzahl der Wirkungsgrad η' über den Schraubenradius konstant sein muß und gleich dem Wirkungsgrade η der Gesamtschraube.

32. Die näherungsweise Ermittlung der günstigsten Schubverteilung.

a) Die Ermittlung der günstigsten Zirkulationsverteilung als Randwertaufgabe und die Grenzfälle. Die Ermittlung der günstigsten Zirkulationsverteilung führt nach den gemachten Ausführungen auf die Aufgabe, die Potentialverteilung auf einem Gebilde von kongruenten Schraubenflächen zu finden, welche mit konstanter Geschwindigkeit $2 v_a'$ in ihrer Achsenrichtung verschoben oder mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um ihre Achse verdreht werden. Man hat es also mit der Lösung einer Randwertaufgabe erster Art zu tun, was bei der Art des Randes zwar keine elementare, jedoch immer noch mit den Hilfsmitteln der Mathematik lösbare Aufgabe ist. Zum Verständnis der Ergebnisse dieser noch darzulegenden exakten Lösung erscheint es jedoch zweckmäßig, zunächst einmal die Grenzfälle unserer Aufgabe zu untersuchen. Durch einige kleine Kunstgriffe kann man aus ihnen sogar schon Näherungslösungen für die allgemeinere Aufgabe herleiten, welche, wie wir dann noch zeigen werden, recht brauchbar sind. Solche Grenzfälle sind die Untersuchung:

a) der unendlichvielflügeligen Schraube,

b) des Verhaltens der Flügelenden einer endlichvielflügeligen Schraube sehr kleiner Steigung,

c) der endlichvielflügeligen Schraube sehr großer Steigung.

b) Die günstigste Zirkulationsverteilung der unendlichvielflügeligen Schraube. Unter Einführung einer dimensionslosen Zirkulationsverteilung (29, 11)

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{z}\,\Gamma\,\omega}{4\pi v_a'(v_0 + v_a')}$$

haben wir diese Größe schon in Abschn. 29 für unendliche Flügelzahl und kleine Belastung bestimmt zu (29, 14)

$$\mathfrak{G}^{(\infty)} = \frac{x^2}{\lambda_\infty^2 + x^2}\,. \qquad (\mathfrak{z} \to \infty)$$

Sie ist in Abb. 211 dargestellt.

c) Die günstigste Zirkulationsverteilung an den Flügelenden einer endlichvielflügeligen Schraube kleiner Steigung. Bei endlicher Flügelzahl muß wie bei einem Tragflügel nach den Flügelenden zu, wegen des dort zum Druckausgleich nötigen Umströmens, ein Zirkulationsabfall auftreten. Bei nicht zu großer Steigung fallen auch bei einer endlichvielflügeligen Schraube die Schraubenwirbelflächen noch recht dicht zusammen. Man kann daher die Strömung an den Flügelenden durch eine ebene Strömung annähern, und zwar um so besser, je kleiner die Steigung und je größer die Flügelzahl ist.

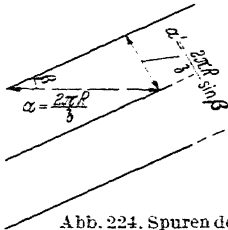



Abb. 224. Spuren der Schraubenflügel.

Der gegenseitige senkrechte Abstand a' der Schraubenwirbelflächen ist außen nahe hinter der Schraube bei kleiner Belastung (Abb. 224) mit $v = v_0 + v_a'$

$$a' = \frac{2\pi R}{\mathfrak{z}}\sin\beta = \frac{2\pi R}{\mathfrak{z}}\,\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad (32, 1)$$

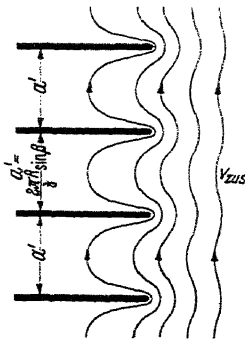



Abb. 225. Strömung am Rande der Schraubenspurflächen bei deren Verschiebung in Richtung der Schraubenachse mit der Geschwindigkeit v_{zus}.

Um den Abfall der Zirkulation nach den Flügelenden zu zu berechnen, haben wir also ein ungestaffeltes Gitter aus Halbgeraden in einer Z-Ebene, wie dies in Abb. 225 veranschaulicht wird, mit der Geschwindigkeit

$$= \frac{2 v_a'}{\cos\beta} = 2 v_a'\,\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} \qquad (32, 2)$$

in Richtung der Gitterachse anzuströmen. Die gesuchte Zirkulationsverteilung ist gleich dem sich auf den Halbgeraden ergebenden Potentialsprung.

Die gesuchte Strömung der Z-Ebene erhalten wir durch konforme Abbildung aus einem in der ξ-Achse einer ζ-Ebene gelegenen Streckenprofil der Länge $t = 2$, dessen Mittelpunkt in $\zeta = 0$ liegt (vgl. Abb. 226) und das zirkulatorisch mit der Zirkulation

$$\Gamma_0 = 2\,a' \cdot \frac{2\,v_a'}{\cos\beta} = \frac{8\,\pi R}{\mathfrak{z}}\, v_a' \,\frac{v}{u} \qquad (32,3)$$

Abb. 226. Konforme Abbildung zur Ermittlung der Zirkulationsverteilung am Ende der Schraubenflügel.

umströmt wird. Die Strömung in der ζ-Ebene ist gegeben durch das komplexe Potential

$$\chi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \arccos\zeta = \frac{4\,R}{\mathfrak{z}}\, v_a' \,\frac{v}{u} \arccos\zeta\,. \qquad (32,4)$$

Die Abbildungsfunktion ist, da die Periode in Y-Richtung der Z-Ebene a, die zyklische Periode der ζ-Ebene π ist

$$Z = \frac{a'}{\pi} \ln\zeta\,, \qquad \zeta = e^{\frac{\pi}{a'}\cdot Z}\,. \qquad (32,5)$$

Das Bild der Flügelenden fällt also in die Y-Achse der Z-Ebene.

Auf den Flügeln ist $X < 0$. Der gesuchte Potentialsprung $\Gamma = 2 \cdot \Re(\chi)$ ist also mit $Z = -R\,(1 - x)$

$$\Gamma = \frac{8\,R}{\mathfrak{z}}\, v_a' \,\frac{v}{R\omega} \arccos e^{-\mathfrak{z}\,\frac{1-x}{2}\,\frac{\sqrt{R^2\omega^2+v^2}}{v}}$$

oder mit $v/R\omega = \lambda$

$$\Gamma = \frac{8\,R}{\mathfrak{z}}\, v_a'\,\lambda \arccos e^{-\mathfrak{z}\,\frac{1-x}{2}\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}}\,. \qquad (32,6)$$

Der Abfall der dimensionsfrei gemachten Zirkulationsverteilung nach den Flügelenden zu ist also bei kleiner Steigung und Belastung

$$\mathfrak{G}^{(\lambda\to 0)} = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\mathfrak{z}\,\frac{1-x}{2}\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}}\,. \qquad (32,7)$$

Hierbei ist dann

$$\lambda = \frac{v_0 + v_a'}{u} = \lambda_\infty = \frac{\lambda_0}{\eta_{id}}$$

zu setzen. Damit erscheint auch die Anwendbarkeit bei größerer Belastung möglich [Lit. 72].

d) Die günstigste Zirkulationsverteilung bei sehr großem Fortschrittsgrad. Im Grenzfalle sehr großen Fortschrittsgrades wird der Steigungswinkel der Schraubenwirbelflächen unabhängig vom Radius $\beta = 90°$. Die Bestimmung der günstigsten Zirkulationsverteilung, welche der Potentialsprungverteilung entspricht, durch Verschieben in Achsenrichtung durchzuführen ist dann nicht mehr möglich. Man muß dafür den Potentialsprung der Absolutströmung feststellen, welcher der Drehung des Sterns der Schraubenspurflächen mit der Drehschnelle $2\,\omega'$ entspricht, die jetzt in ebene Flächen ausgeartet sind:

$$2\,\omega' = \frac{2\,v_u'}{R} = \lim \frac{2\,v_a'}{\lambda R}\,. \tag{32, 8}$$

Wir nehmen als Radius wieder $R = 1$. Die Stromfunktion der ebenen Absolutströmung ist auf der Berandung

$$\psi_a = \omega' r^2. \tag{32, 9}$$

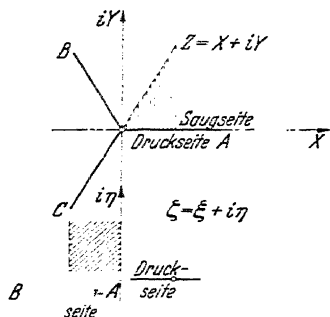



Abb. 227. Konforme Abbildung des Äußeren eines Schaufelsterns ($\mathfrak{z} = 3$) auf eine Halbebene.

Zur Berechnung des Potentials bilden wir das Äußere des Sterns der $\mathfrak{z}$-Schraubenflügelspuren in der $z = x + i\,y$-Ebene auf die obere Hälfte einer $\zeta = \xi + i\,\eta$-Ebene konform ab (vgl. Abb. 227). Diese wird, wie man leicht nachprüfen kann, vermittelt durch

$$\zeta = \operatorname{arc}\cos z^{\mathfrak{z}/2}, \qquad z = \cos^{2/\mathfrak{z}} \zeta\,. \tag{32, 10}$$

Für $x = 1$ wird $\zeta = \xi = 0 \pm n\pi$,

$x = 0$ wird $\zeta = \xi = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

$(n = 0, 1, 2, 3 \ldots)$

Auf der Berandung, der ξ-Achse, ist die Stromfunktion mit $r = |Z|\,R$

$$\psi_a = \omega' \left| \cos^{2/\mathfrak{z}} \xi \right|^2 \cdot R^2\,. \tag{32, 11}$$

ψ_a ist der auf der Berandung gegebene Imaginärteil des komplexen Potentials χ_a, das nun zu bestimmen ist. Der Realteil φ_a ergibt durch seinen Wert auf der Berandung ($\eta = 0$) nach Verdoppelung die gesuchte Zirkulationsverteilung Γ. Besonders leicht ist die Durchführung für $\mathfrak{z} = 2$ und $\mathfrak{z} = 1$. Für $\mathfrak{z} = 2$ erhalten wir

$$\psi_a = \omega' \left| \cos \xi \right|^2 R^2 = \omega' \cos^2 \xi\, R^2 = \frac{\omega'}{2} (1 + \cos 2\,\xi)\, R^2, \tag{32, 12}$$

$$\varphi_a = \frac{\omega'}{2} \sin 2\,\xi\, R^2 = \omega' \cos \xi \sin \xi\, R^2 \tag{32, 13}$$

oder mit $\cos \xi = x$, $\sin \xi = \sqrt{1 - x^2}$, $\Gamma_{\mathfrak{z}} = 2\,\mathfrak{z}\,\varphi_a = 4\,\varphi_a$

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = 4\,\omega' x \sqrt{1 - x^2}\, R^2 = 4\pi\,\omega' \cdot \mathfrak{H}^{(2)}(x)\, R^2, \tag{32, 14}$$

Für $\mathfrak{z} = 1$ erhalten wir

$$\psi_a = \omega' \,|\cos^2 \xi\,|^2 R^2 = \omega' \cos^4 \xi\, R^2 = \frac{\omega'}{8}\,(\cos 4\xi + 4\cos 2\xi + 3)\, R^2, \quad (32,15)$$

$$\varphi_a = \frac{\omega'}{8}\,(\sin 4\xi + 4 \sin 2\xi)$$

$$= \frac{\omega'}{8}\,(4 \sin\xi \cos^3\xi - 4 \sin^3\xi \cos\xi + 8 \sin\xi \cos\xi)\,, \quad (32,16)$$

oder mit $\cos\xi = x^{1/2}$, $\sin\xi = \sqrt{1-x}$, $\Gamma_{\mathfrak{z}} = 2\,\mathfrak{z}\,\varphi_a = 2\,\varphi_a$

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = \omega' x^{1/2} \sqrt{1-x}\,(1+2x)\, R^2 = 4\pi\omega' \cdot \mathfrak{H}^{(1)}(x)\, R^2\,. \quad (32,17)$$

Für andere Flügelzahlen $\mathfrak{z}$ erhält man kein so einfaches Ergebnis. Allgemein erhält man (32, 11)

$$\psi_a = \omega' \,|\cos^{2/\mathfrak{z}} \xi\,|^2 R^2 = \omega' \,|\cos \xi\,|^{4/\mathfrak{z}} R^2\,. \quad (32,18)$$

Durch harmonische Analyse erhält man hieraus für ψ_a $\cos\xi$-Reihen und damit φ_a als $\sin\xi$-Reihen und damit auch [Lit. 81]

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = 2\,\mathfrak{z}\,\varphi_a = 4\pi\,\omega'\,\mathfrak{H}^{(\mathfrak{z})}(x) \cdot R^2.$$

Nur für $\mathfrak{z} = 4$ ist außer für $\mathfrak{z} = 2$ und $\mathfrak{z} = 1$ das Ergebnis noch durch elementare Funktionen geschlossen darstellbar. Für $\mathfrak{z} = 4$ wird

$$\psi_a = \omega' R^2 \cdot |\cos\xi\,| = \omega' R^2\, \mathfrak{J}\left\{\frac{2}{\pi}\cos\zeta\left(i\,\frac{\pi}{2} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\zeta}{2}\right)\right)\right\}_{\zeta=\xi}, \quad (32,19)$$

und damit wegen $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\zeta}{2}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}$,

$$\varphi_a = \frac{2\,\omega'}{\pi}\, R^2 \cos\xi \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}}\,, \quad (32,20)$$

oder mit $\cos\xi = x^2$, $\ln \dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}} = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^4}}{x^2}$, $\Gamma_{\mathfrak{z}} = 2\,\mathfrak{z}\,\varphi_a$,

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} = \frac{16}{\pi}\,\omega' x^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^4}}{x^2}\, R^2 = 4\pi\omega' \cdot \mathfrak{H}^{(4)}(x)\, R^2. \quad (32,21)$$

Die dimensionslos gemachte Zirkulationsverteilung ist damit für sehr großen Fortschrittsgrad λ

$$\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} = \frac{\mathfrak{z}\,\Gamma\omega}{4\pi\, v_a'\, v_0} = \frac{\mathfrak{H}^{(\mathfrak{z})}}{\lambda^2}\,. \quad (32,22)$$

Aus (32, 17), (32, 14), (32, 21), (29, 15) ergibt sich

$$\mathfrak{H}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\, x^{1/2} \sqrt{1-x}\,(1+2x)\,, \quad (32,23)$$

$$\mathfrak{H}^{(2)} = \frac{1}{\pi}\, x \sqrt{1-x^2}\,, \quad (32,24)$$

$$\mathfrak{H}^{(4)} = \frac{4}{\pi^2}\, x^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^4}}{x^2}\,, \quad (32,25)$$

$$\mathfrak{H}^{(\infty)} = x^2\,. \quad (32,26)$$

Für einige $\mathfrak{z}$ ist $\mathfrak{H}^{(\mathfrak{z})}$ in Abb. 228 wiedergegeben.

Für die späteren Anwendungen mögen noch die Abminderungsfaktoren

$$\varkappa^{(\mathfrak{z})} = \frac{\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})}}{\mathfrak{G}^{(\infty)}} = \frac{\mathfrak{H}^{(\mathfrak{z})}}{\mathfrak{H}^{(\infty)}} \tag{32, 27}$$

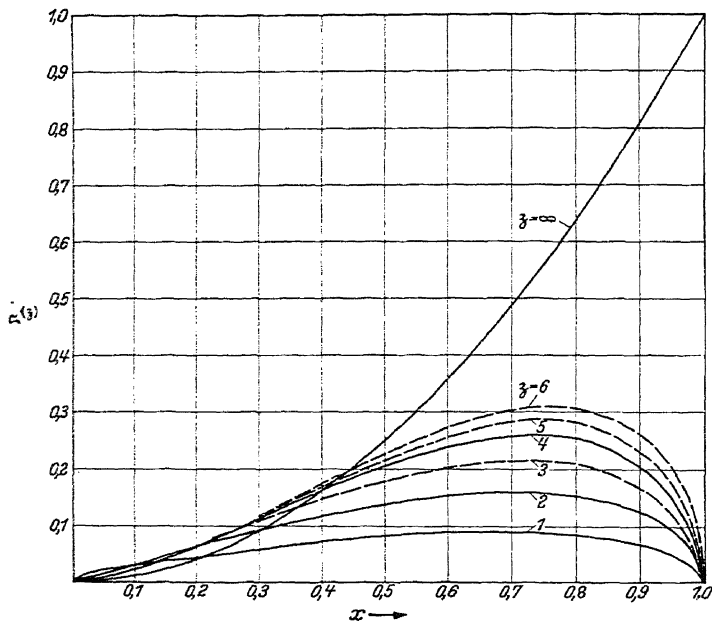



Abb. 228. Die günstigste Zirkulationsverteilung $\mathfrak{H}^{(\mathfrak{z})}$ bei sehr großem Fortschrittsgrad für verschiedene Flügelzahlen $\mathfrak{z}$.

bestimmt werden. Diese sind für $\mathfrak{z} = 1, 2, 4$

$$\varkappa^{(1)} = \frac{1}{4\pi} x^{-3/2} \sqrt{1-x}\,(1+2x)\,, \tag{32, 28}$$

$$\varkappa^{(2)} = \frac{1}{\pi} x^{-1} \sqrt{1-x^2}\,, \tag{32, 29}$$

$$\varkappa^{(4)} = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}\,. \tag{32, 30}$$

Man erkennt hieraus, daß aus der Abminderung im Schraubeninneren eine Vergrößerung wird gegenüber den Verhältnissen bei der unendlichvielflügeligen Schraube. Wie die späteren genaueren Untersuchungen für beliebige λ zeigen, ist dies auch bei endlichem Fortschrittsgrade der Fall.

Es mögen nun noch für $\lambda \to \infty$ die Integrale

$$\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n} = \int^{1} \varkappa^{(\mathfrak{z})} \frac{x^m}{(x^2+\lambda^2)^n} \cdot dx$$

bestimmt werden. Für $\lambda \to \infty$ erhält man allgemein

$$\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) = \frac{1}{\lambda^{2n}} \int_0^1 \varkappa^{(\mathfrak{z})} x^m \, dx\,, \tag{32, 31}$$

also für $\mathfrak{z} = 1, 2, 4$

$$\mathfrak{K}_{m,n}^{(1)}(\lambda \to \infty) = \frac{1}{\lambda^{2n}} \cdot \frac{1}{4\pi} \int x^{m-\frac{3}{2}} \sqrt{1-x}\,(1+2x)\, dx\,, \tag{32, 32}$$

$$\mathfrak{K}_{m,n}^{(2)}(\lambda \to \infty) = \frac{1}{\lambda^{2n}} \cdot \frac{1}{\pi} \int x^{m-1} \sqrt{1-x^2}\, dx\,, \tag{32, 33}$$

$$\mathfrak{K}_{m,n}^{(4)}(\lambda \to \infty) \doteq \frac{1}{\lambda^{2n}} \cdot \frac{4}{\pi^2} \int \ln \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}\, dx\,. \tag{32, 34}$$

Die Auswertung dieser Integrale und ihre Interpolation für andere $\mathfrak{z}$ ergibt für $\lambda \to \infty$ die in Zahlentafel 7 angegebenen Werte.

Zahlentafel 7. Grenzwerte $\lambda^{2n}\mathfrak{K}_{3n}^{(\mathfrak{z})}$ und $\lambda^{2n}\mathfrak{K}_{5n}^{(\mathfrak{z})}$ für $\lambda \to \infty$.

Für $\mathfrak{z}$							
$\lambda^{2n}\mathfrak{K}_{3n}^{(\mathfrak{z})} =$	9:256	1:16	0,0846	$1:\pi^2$	0,127	0,1455	1:4
$\lambda^{2n}\mathfrak{K}_{5n}^{(\mathfrak{z})} =$	35:2048	1:32	0,044	$1:6\pi^2$	0,069	0,0809	1:6

Hiermit werden die Gleichwertigkeitszahlen $\gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})} = \dfrac{\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})}}{\mathfrak{K}_{m,n}^{(\infty)}}$ für λ in Zahlentafel 8 gefunden.

Zahlentafel 8. Grenzwerte $\gamma_{3n}^{(\mathfrak{z})}$ und $\gamma_{5n}^{(\mathfrak{z})}$ für $\lambda \to \infty$.

Für $\mathfrak{z}$:					6	
$\gamma_{3n}^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) =$	0,1406	0,2500	0,338	0,4053	0,51	0,582
$\gamma_{5n}^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) =$	0,1025	0,1875	0,264	0,3183	0,41	0,485

In erster Näherung kann, wie aus den Zahlenwerten zu ersehen ist, $\gamma_{3n}^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) \approx \left(\dfrac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}+6}\right)$ gesetzt werden.

e) Näherungsgleichung für die günstigste Zirkulationsverteilung bei endlicher Flügelzahl. Bei nicht zu großem λ kann die dimensionslose Zirkulationsverteilung, welche sich bei großer Flügelzahl ergibt, im Äußern als nahezu konstant angesehen werden, und zwar ist der Wert für kleine λ und $x \to 1$ nahezu 1 (29, 15):

$$\mathfrak{G}^{(\infty)} = \frac{x^2}{\lambda^2 + x^2} \to \frac{1}{1+\lambda^2} \quad \text{für } x \to 1\,.$$

Bei nicht zu großem λ ist aber auch die den Zirkulationsabfall nach den Flügelenden zu berücksichtigende dimensionslose Zirkulationsverteilung im Innern nahezu konstant (32, 7):

$$\mathfrak{G}^{(\lambda \to 0)} = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-x}{2}\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}}$$

Man ist deshalb zu der von PRANDTL vorgeschlagenen Annahme berechtigt, daß die günstigste dimensionslose Zirkulationsverteilung $\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})}$ bei nicht zu großem Fortschrittsgrad und bei endlicher Flügelzahl sich in guter Annäherung durch das Produkt $\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} \approx \mathfrak{G}^{(\lambda \to 0)} \cdot \mathfrak{G}^{(\infty)}$ darstellen läßt [Lit. 72]:

$$\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} \approx \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{\lambda^2 + x^2} \arccos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-x}{2}\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}}$$

Bei größerem Fortschrittsgrad λ ist allerdings nicht anzunehmen, daß diese Verteilung dem exakten Ergebnis entspricht. Insbesondere in Nähe der Nabe wird eine prinzipielle Abweichung auftreten, welche

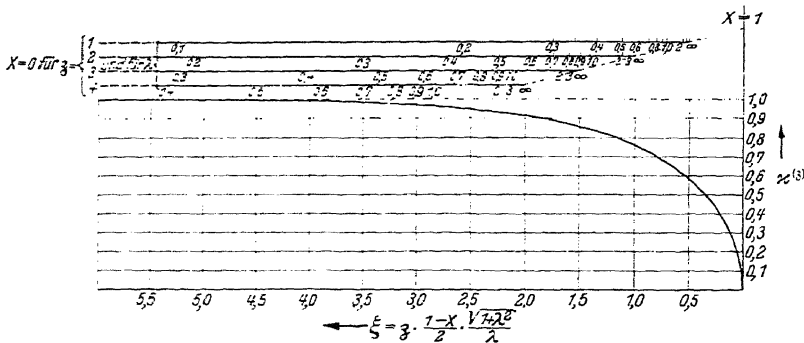



Abb. 229. Näherungsweise Erfassung der Zirkulationsverminderung $\varkappa^{(\mathfrak{z})}$ an den Flügelenden.

sich aber leicht aus der schon untersuchten günstigsten Zirkulationsverteilung bei sehr großem Fortschrittsgrad erklärt.

Die sich mit dieser Näherungslösung ergebenden dimensionslosen Zirkulationsverteilungen sind sehr ähnlich den für $\mathfrak{z} = 2, 3, 4$ in Abb. 230, 231, 232 wiedergegebenen genauen Lösungen, deren Herleitung im folgenden kurz beschrieben werden soll.

Schreiben wir

$$\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} = \varkappa^{(\mathfrak{z})} \cdot \mathfrak{G}^{(\infty)}, \qquad (32, 35)$$

so entspricht damit obiger Näherungslösung ein angenähertes

$$\varkappa^{(\mathfrak{z})} \approx \mathfrak{G}^{(\lambda \to 0)} = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-x}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}}, \qquad (32, 36)$$

das in Abb. 229 dargestellt ist.

Zur Berücksichtigung auch größerer Belastung ist dabei

$$\lambda = \frac{[illegible]}{\omega\,[illegible]} = \lambda_\infty = \frac{\lambda_0}{\eta_{i\,d}}$$

zu setzen.

Aus dieser Näherung (32, 36) ergibt sich

$$\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^1 \arccos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-x}{2}\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}} \cdot \frac{x^m}{(x^2+\lambda^2)^n}\, dx. \qquad (32, 37)$$

Wir wollen nun dieses Integral mit Hilfe des Mittelwertsatzes abschätzen. Wäre $\mathfrak{z}$ sehr groß oder λ sehr klein, so erhielten wir wegen $\operatorname{arc}\cos e^{-\infty} = \pi/2$ wieder die Integrale $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{m,n}$. In Anlehnung an die hierfür für $\mathfrak{z} = \infty$ (28, 16) durchgeführte Abschätzung schreiben wir:

$$\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n} \quad \frac{1}{(\bar{x}^2 + \lambda^2)^n} \operatorname{arc}\cos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-\bar{\bar{x}}\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}} \int x^m \, dx . \qquad (32, 38)$$

Hierbei sind $\bar{x}$ und $\bar{\bar{x}}$ zwei Mittelwerte, für welche gilt

$$0 < \bar{x} < 1 ,$$
$$0 < \bar{\bar{x}} < 1 .$$

Für $\bar{x}^2$ nehmen wir wieder den Wert (28, 17)

$$\bar{x}^2 = \sqrt{\frac{m+1-2n}{m+1}} .$$

Für $\bar{\bar{x}}$ wählen wir nun bei $\lambda \to \infty$ nicht jenen Wert, welcher das Integral in der Näherungsgleichung (32, 37) befriedigt, sondern gleich jenen Wert, welcher Übereinstimmung schafft mit den Werten, die den Gleichungen (32, 32), (32, 33), (32, 34) genügen. Damit wird allerdings $\bar{\bar{x}}$, wenn auch nicht sehr, von $\mathfrak{z}$ abhängig, was nicht der Gleichung (32, 37) entspricht. Die Gleichung (32, 37) gilt aber nur für kleine λ und dies auch nur näherungsweise. Für kleine λ wird aber durch die von $\mathfrak{z}$ abhängige Annahme von $\bar{\bar{x}}$ als Näherungswert kaum etwas geändert. Man erhält damit eine über den ganzen Bereich der λ brauchbare Abschätzung. Im einzelnen ergeben sich die in Zahlentafel 9 zusammengestellten Werte.

Zahlentafel 9. Mittelwerte $\bar{\bar{x}}$ zur angenäherten Bestimmung von $\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n}$ und $\gamma^{(\mathfrak{z})}_{m,n}$.

Für $\mathfrak{z}$ =	1	2	3	4	6	8
Für $m = 3$	$\bar{\bar{x}} = 0{,}9484$	0,9197	0,9015	0,8910	0,879	0,878
Für $m = 5$	$\bar{\bar{x}} = 0{,}9714$	0,9545	0,9318	0,9345	0,9273	0,9195

An Stelle der Näherungsgleichung (32, 38) kann unter Benutzung der genauen $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{m,n}$ (Zahlentafel 6) die bessere Näherung treten

$$\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n} \approx \operatorname{arc}\cos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-\bar{\bar{x}}\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}} \cdot \mathfrak{K}^{(\infty)}_{m,n} . \qquad (32, 39)$$

Als Annäherung für die Gleichwertigkeitszahlen $\gamma^{(\mathfrak{z})}_{m,n}$ erhalten wir damit für beliebige λ

$$\gamma^{(\mathfrak{z})}_{m,n} \approx \operatorname{arc}\cos e^{-\mathfrak{z}\frac{1-\bar{\bar{x}}\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}} \qquad (32, 40)$$

Diese Näherungen sind allerdings von n unabhängig, während die später durchgeführten genaueren Rechnungen eine wenn auch kleine Abhängigkeit von n ergeben.

33. Die exakte Ermittlung der günstigsten Zirkulationsverteilung.

a) Die Formulierung der Randwertaufgabe. Nachdem wir die näherungsweise Ermittlung der günstigsten Zirkulationsverteilung mit einfachen Hilfsmitteln beschrieben haben, wollen wir hier wenigstens andeuten, wie man zur exakten Lösung kommt. Wir haben es, wie schon gezeigt, mit der Bestimmung des Potentialsprungs auf einem Gebilde von Schraubenflächen zu tun, wenn dieses mit einer konstanten Geschwindigkeit $\mathsf{w} = 2\,v_a'$ in Achsenrichtung verschoben oder mit konstanter Drehschnelle $2\,\omega' = \frac{2\,v_a'}{\lambda R}$ um seine Achse gedreht wird. Die Gleichung der Schraubenflächen ist bei Benutzung von Zylinderkoordinaten r, Θ, z

$$\Theta - \frac{\omega z}{v} = p\frac{2\pi}{\mathfrak{z}} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots . \mathfrak{z} - 1)\,. \tag{33, 1}$$

Die Verschiebegeschwindigkeit der Schraubenfläche in ihrer Achsenrichtung ist $\mathsf{w} = 2\,v_a'$. Der Steigungswinkel an irgendeiner Stelle sei $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{\omega r}$. Dann sind die Randbedingungen für das Potential Φ durch folgende Gleichung auszudrücken entsprechend der Verschiebung

$$\mathsf{w}\cos\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial \Phi}{r\,\partial \Theta}\sin\beta \tag{33, 2}$$

oder entsprechend der Drehung

$$\omega r \mathsf{w} = \omega r\frac{\partial \Phi}{\partial z} - v\frac{\partial \Phi}{r\,\partial \Theta}\,. \tag{33, 3}$$

Für $r = \infty$ muß $\operatorname{grad}\Phi$ verschwinden.

Aus den geometrischen Verhältnissen ergibt sich, daß die Strömungsgeschwindigkeiten nur von r und $\Theta - \frac{\omega z}{v}$ abhängig sind. Es herrscht also eine Schraubensymmetrie. Wir führen daher als neue Variable [Lit. 73]

$$\zeta = \Theta - \frac{\omega z}{v} \tag{33, 4}$$

ein.

Für die Spuren der Schraubenflügel ist dann

$$\zeta = p\frac{2\pi}{\mathfrak{z}} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots \mathfrak{z} - 1) \tag{33, 5}$$

und für die Winkelhalbierenden

$$\zeta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\mathfrak{z}}\,. \tag{33, 6}$$

Mit Hilfe von (33,4) schreibt sich die Randbedingung (33, 3) alsdann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{\omega r^2}{v^2 + \omega^2 r^2}\,\frac{w\,v}{\omega} \tag{33, 7}$$

Statt des Potentials Φ selbst bestimmen wir nun eine dimensionslose Größe φ

$$\varphi = \frac{\omega}{w\, r} \Phi . \tag{33, 8}$$

Dann erhalten wir, wenn wir noch $\mu = \frac{\omega r}{v}$ einführen, als Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \ldots \quad \mu^2 \tag{33, 9}$$

für (33, 5)

$$\zeta = p \, 2\pi$$

In den Koordinaten ζ, μ wird nun die Differentialgleichung, der φ genügen muß,

$$\Delta \varphi = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \varphi + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 . \tag{33, 10}$$

Hierbei ist zur Abkürzung symbolisch

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \quad \mu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \varphi$$

geschrieben.

Im folgenden wird nur die Lösung für $\mathfrak{z} = 2$ beschrieben. Die Lösung für andere Flügelzahlen wird aber ganz entsprechend erhalten.

b) Lösung der Potentialgleichung für Schraubensymmetrie im allgemeinen. Wir wollen zunächst eine partikuläre Lösung der Potentialgleichung bei Schraubensymmetrie suchen:

$$\frac{1}{1 + \mu^2} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 .$$

Diese Lösung möge von der Form

$$\varphi = F(\mu) \cdot f(\zeta) \tag{33, 11}$$

sein. Es ist

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \varphi = f(\zeta) \cdot \left(\mu \frac{d}{d \mu}\right)^2 F(\mu), \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = F(\mu) \frac{d^2 f(\zeta)}{d \zeta^2}$$

Es muß also sein

$$\frac{1}{1 + \mu^2} \left(\mu \frac{}{d \mu}\right)^2 F(\mu) \cdot f(\zeta) + \frac{d^2 f(\zeta)}{d \zeta^2} \cdot F(\mu) = 0.$$

Oder nach Division durch $F(\mu) \cdot f(\zeta)$

$$\frac{1}{1 + \mu^2} \frac{\left(\mu \frac{d}{d \mu}\right)^2 F(\mu)}{F(\mu)} + \frac{\frac{d^2 f(\zeta)}{d \zeta^2}}{f(\zeta)} = 0 .$$

Der erste Summand wie der zweite müssen also konstant und entgegengesetzt gleich sein, so daß

$$\frac{d^2 f(\zeta)}{d \zeta^2} = -k^2 f(\zeta), \tag{33, 12}$$

$$1 + \mu^2 \left(\mu \frac{d}{d \mu}\right)^2 F(\mu) = +k^2 \cdot F(\mu) . \tag{33, 13}$$

Für reelle k ist $f(\zeta)$ eine harmonische Funktion. Die allgemeine Lösung ist also

$$f_k(\zeta) = a_k \sin k\zeta + b_k \cos k\zeta . \tag{33, 14}$$

Für reelle k ist $F(\mu)$ eine modifizierte Besselfunktion. Die allgemeine Lösung ist also in der von G. N. WATSON benutzten Schreibweise für die Besselfunktionen [Lit. 291]

$$F_k(\mu) = A_k \mathsf{I}(k\mu) + B_k \mathsf{K}(k\mu) . \tag{33, 15}$$

c) Anpassung der Lösung an die Randbedingungen für $r > R$. Man sieht leicht ein, daß für $r > R$ auf den Fortsetzungen der Spuren der Schraubenflügel ($\zeta = p \cdot \pi$, $p = 0,1$) und für die Winkelhalbierenden ($\zeta = (p + \frac{1}{2})\pi$, $p = 0,1$)

$$\varphi = 0 \tag{33, 16}$$

sein muß. Die Lösung der Potentialgleichung für $\mathfrak{z} = 2$ muß also unter Beachtung, daß für $r \to \infty$, $\varphi \to 0$ sein muß, für $r > R$ sein

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\mathsf{K}_{2n}(2n\mu)}{\mathsf{K}_{2n}(2n\mu_0)} \cdot \sin 2n\zeta , \qquad \mu_0 = \frac{\omega R}{\;}) \tag{33, 17}$$

wobei die c_n noch näher zu bestimmende Koeffizienten sind.

d) Anpassung der Lösung an die Randbedingungen für $r < R$. Für $r < R$ setzen wir $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ und verlangen, daß schon φ_0 der Randbedingung (33, 9) genügt. Mit

$$\varphi_0 = -\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\zeta$$

wird dann

$$\frac{\mu^2}{\mu^2}\zeta + \varphi_1 . \tag{33, 18}$$

Dann gilt für φ_1 die Differentialgleichung

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \varphi_1 + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \zeta^2} = \left(\mu \frac{d}{d\mu}\right) \left(\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\right) \cdot \zeta \tag{33, 19}$$

und die Randbedingung für φ_1 lautet

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} = 0 . \quad (\text{für } \zeta = p\pi ,\ p = 0,1) \tag{33, 20}$$

Im Bereiche $0 < \zeta < \pi$, für den wir zunächst nach einer Lösung suchen wollen, kann man nun von folgender Entwicklung Gebrauch machen

$$\zeta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\zeta}{(2m+1)^2} \tag{33, 21}$$

Wir setzen in Analogie für die Lösung im Außenraum, wobei wir beachten, daß dort für $\zeta = 0$, $\pi/2$, π $\varphi = 0$ sein muß,

$$\varphi_1 = f_0(\mu) + \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\mu) \cos(2m+1)\zeta . \tag{33, 22}$$

Jedes einzelne Glied hiervon erfüllt die Randbedingungen. Wir wollen nun für jedes einzelne Glied auch die Differentialgleichung erfüllen. Dann muß sein

$$\left(\mu \frac{d^2}{d\mu}\right) f_0(\mu) = \frac{\pi}{2}\left(\mu \frac{d}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right) \tag{33.23}$$

und

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu}\right)^2 f_m(\mu) - (2m+1)^2 (1+\mu^2) f_m(\mu) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2m-1)^2}\left(\mu \frac{d}{d\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right). \tag{33.24}$$

Wir erhalten also

$$f_0(\mu) = \frac{\pi}{2} \frac{\mu^2}{1-\mu^2}. \tag{33.25}$$

Wir setzen

$$f_m(\mu) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2m+1)^2}\left\{\frac{\mu^2}{1-\mu^2} - g_m(\mu)\right\}. \tag{33.26}$$

Dann gilt für $g_m(\mu)$

$$\left(\mu \frac{d}{d\mu}\right)^2 g_m(\mu) - (2m+1)^2 (1+\mu^2) g_m(\mu) = -(2m+1)^2 \mu^2. \tag{33.27}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung für μ wird durch eine Abart T_{2m+1} der BESSELschen Funktionen geliefert. Durch Einsetzen der Gl. (33, 25) und (33, 26) in Gl. (33, 22) ergibt sich als Lösung für $r < R$, unter Beachtung, daß φ für $r \to 0$ nicht uneigentlich sein darf, (33, 18)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g(\mu)}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)\zeta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi} \frac{\mathsf{T}_{2m+1}((2m+1)\mu)}{(2m+1)^2} + a_m \frac{\mathsf{I}_{2m+1}((2m+1)\mu)}{\mathsf{I}_{2m+1}((2m+1)\mu_0)}\right] \cos(2m-1)\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{33.28}$$

Hierbei sind die a_m noch näher zu bestimmende Konstanten. Mit

$$t_\nu(z) = \frac{z^2}{2^2-\nu^2} + \frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)} + \frac{z^6}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)(6^2-\nu^2)} + \cdots \tag{33.29}$$

ist

$$\mathsf{T}_\nu(z) = \frac{\nu\pi}{2\sin\frac{\nu}{2}\pi} \mathsf{I}_\nu(z) - t_\nu(z). \tag{33.30}$$

e) Die Anschlußbedingung in $r = R$ für die Lösungen in $r < R$ und $r > R$. Die Koeffizienten c_n in (33, 17) und a_m in (33, 28) müssen nun so bestimmt werden, daß beim Übergang $r = R$ des Innenraums in den Außenraum φ stetig bleibt. Für beliebige ζ müssen also φ und $\partial\varphi/\partial\mu$ für $r = R$, d. h. $\mu = \mu_0$, aus der für den Außenraum gefundenen Lösung die gleichen Werte annehmen wie aus der für den Innenraum. Dies geschieht mit Hilfe der für den betrachteten Bereich $0 < \zeta < \pi$ gültigen Beziehung

$$\cos(2m+1)\zeta = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-(2m+1)^2} \sin 2n\zeta. \tag{33, 31}$$

Man erhält damit φ für das Innengebiet $0 < r < R$ in Form einer Doppelreihe. Die Summe der $\sin 2n\zeta$ enthaltenden Glieder muß nun gleich dem $\sin 2n\zeta$ enthaltenen Gliede des Ausdruckes für φ für das

Außengebiet sein. Das gleiche gilt für die nach μ differenzierten Ausdrücke. Man erhält also die Beziehungen

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{4}{\pi(2m+1)^2} + a_m\right\}\frac{8n}{4n^2-(2m+1)^2} = \pi c_n \qquad (33, 32)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{T'_{2m+1}}{\pi(2m+1)^2} + a_m\frac{I'_{2m+1}}{I_{2m+1}}\right\}\frac{4(2m+1)}{4n^2-(2m+1)^2} = \pi c_n \frac{K'_{2n}}{K_{2n}} \qquad (33, 33)$$

Abb. 230. Dimensionslose Zirkulationsverteilung $\mathfrak{G}^{(2)}$ für zweiflügelige Schrauben.

Durch Elimination von c_n ergibt sich hiermit ein unendliches Gleichungssystem für die a_m. Die Durchführung möge jedoch hier unterlassen werden. Jene Leser, welche sich nicht mit der hier gegebenen Beschreibung des Lösungsweges begnügen wollen, seien auf die Originalarbeit von GOLDSTEIN verwiesen [Lit. 73].

f) Der Potentialsprung auf den Flügelspuren als die gefundene günstigste Zirkulationsverteilung. Hat man die Koeffizienten a_m bestimmt, so kann man das Potential φ längs den Flügelspuren berechnen. Der Sprung des Potentials beim Durchgang durch die Flügelspuren ist das Zweifache des Absolutwertes von Φ auf jeder Seite. Die gesuchte Zirkulationsverteilung ist also für $\mathfrak{z} = 2$

$$\Gamma = 2\,|\Phi| = 2\,\frac{w\,v}{\omega}\,|\varphi|$$

$$= \frac{w\,v}{\omega}\left\{\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{T_{2m+1}((2m+1)\mu)}{(2m+1)^2} + 2\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{I_{2m+1}((2m+1)\mu)}{I_{2m+1}((2m+1)\mu_0)}\right. . \quad (33, 34)$$

Das Ergebnis ist in den Abb. 230, 231, 232 dargestellt [Lit. 73, 76, 78].

Für unendliche Flügelzahl hatte sich für $\eta =$ konst., der auch für nicht mehr verschwindende Belastung mit guter Näherung günstigster Schubverteilung entsprechenden Bedingung, mit (29, 11)

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{z}\,\Gamma\omega}{4\pi v'_a(v_0+v'_a)}$$

als dimensionslose Zirkulationsverteilung (29, 14)

$$\mathfrak{G}^{(\infty)} = \frac{}{\lambda_\infty^2 + x^2}$$

Abb. 231. Dimensionslose Zirkulationsverteilung $\mathfrak{G}^{(3)}$ für dreiflügelige Schrauben.

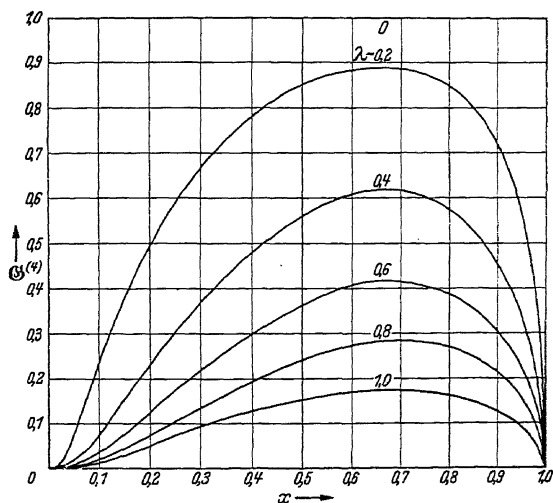



Abb. 232. Dimensionslose Zirkulationsverteilung $\mathfrak{G}^{(4)}$ für vierflügelige Schrauben.

gefunden. Diese Verteilung war also außer von x nur von λ_∞ abhängig. Dies entspricht einem Steigungsgrad der Schraubenwirbelflächen von

$$\lambda_\infty = \frac{v}{u} = \frac{v_\infty}{u} = \frac{v_0 - v_a'}{u}.$$

Man legt also zweckmäßig bei nicht mehr verschwindender Belastung auch bei endlicher Flügelzahl jene Zirkulationsverteilung als günstigste zugrunde, welche sich durch $v = v_0 + v_a'$ ergibt, indem man

$$\mu_0 = \frac{u}{v_0 + v_a'}$$

$$\frac{u}{v_0}\,\frac{v_0}{v_0 + v_a'} = \frac{u}{v_0}\cdot\eta$$

zur Bestimmung von Γ bzw. $\mathfrak{G}$ heranzieht. Damit wird

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{z}}{\pi}\,|\varphi|. \qquad (33, 35)$$

34. Wirkungsgrad und Leistung bzw. Schub der endlichvielflügeligen Schraube.

a) Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Leistung bzw. Schub bei endlicher Flügelzahl bei Vernachlässigung der Reibung. Mit Hilfe des für jedes Schraubenelement geltenden Abminderungsfaktors (32, 27)

$$\varkappa^{(\mathfrak{z})} = \frac{\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})}}{\mathfrak{G}^{(\infty)}} \qquad \text{(vgl. Abb. 233, 234, 235)} \qquad (34, 1)$$

kann man die Ergebnisse der unendlichvielflügeligen Schraube ziemlich einfach auf die endlichvielflügelige übertragen. Es gilt für

$$\eta'^{(\mathfrak{z})} = \eta'^{(\infty)}$$

$$k_s'^{(\mathfrak{z})} = \varkappa^{(\mathfrak{z})}\,k_s'^{(\infty)}, \qquad k_d'^{(\mathfrak{z})} = \varkappa^{(\mathfrak{z})}\,k_d'^{(\infty)} \quad \text{usw.} \qquad (34, 2)$$

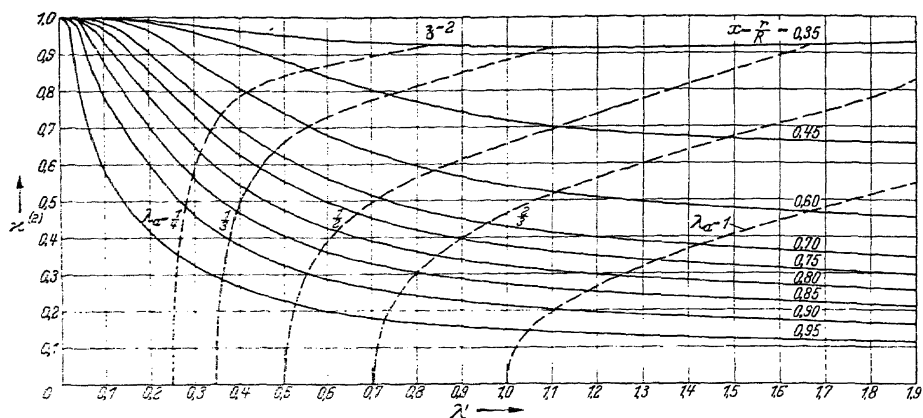



Abb. 233. Abminderungsfaktoren $\varkappa^{(2)}$.

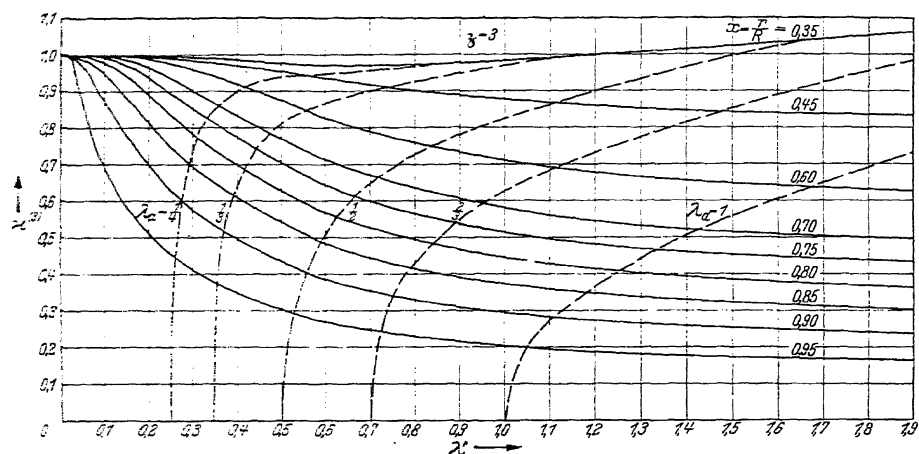



Abb. 234. Abminderungsfaktoren $\varkappa^{(3)}$.

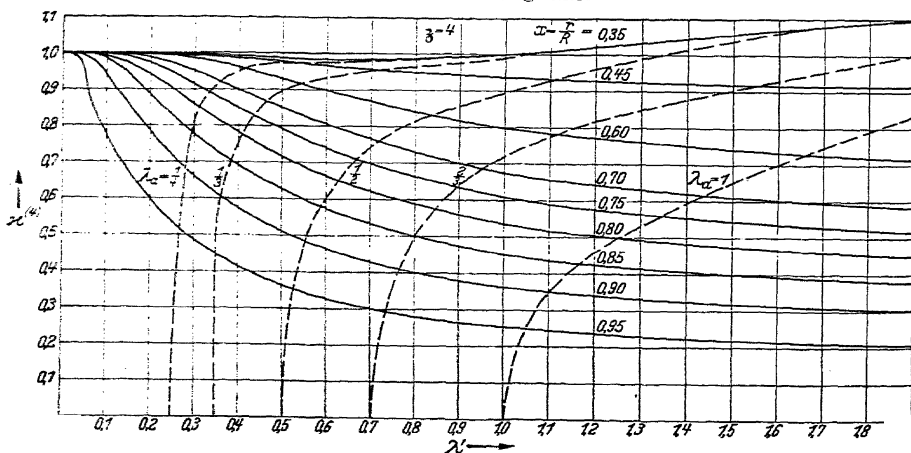



Abb. 235. Abminderungsfaktoren $\varkappa^{(4)}$.

Für die Gesamtschraube gilt bei $\eta' = \text{konst.}$, also entsprechend Gleichung (29, 6) mit $\lambda_0/\eta = \lambda_\infty$,

$$c_s^{(\mathfrak{z})} = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{\int_0^1 2\,\varkappa^{(\mathfrak{z})}\,\frac{x^5}{(x^2+\lambda_\infty^2)^2}\,dx + \eta\,\lambda_\infty^2\int_0^1 2\,\varkappa^{(\mathfrak{z})}\,\frac{x^3}{(x^2+\lambda_\infty^2)^2}\,dx\right\}. \qquad (34,3)$$

Es ist zweckmäßig, von folgenden Abkürzungen Gebrauch zu machen:

$$\int_0^1 \varkappa^{(\mathfrak{z})}\,\frac{x^m}{(x^2+\lambda_\infty^2)^n}\,dx = \mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})} \quad \text{(vgl. Abb. 236, 237, 238).} \qquad (34,4)$$

$$\frac{\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})}}{\mathfrak{K}_{m,n}^{(\infty)}} = \gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})} \quad \text{(vgl. Abb. 239, 240, 241).} \qquad (34,5)$$

Diese $\gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ können Gleichwertigkeitszahlen genannt werden. Sie geben an, um wieviel sich bei gleichem Wirkungsgrad η_{id} der Integralwert $\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ der $\mathfrak{z}$-flügeligen Schraube gegenüber dem entsprechenden der unendlichvielflügeligen $\mathfrak{K}_{m,n}^{(\infty)}$ ändert. Die Berechtigung zu dieser Bezeichnung geht aus dem folgenden unmittelbar hervor.

Zwischen den $\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ besteht dann noch folgende ihre Berechnung erleichternde Beziehung (28, 13)

$$\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})} = \mathfrak{K}_{m-2,\,n-1}^{(\mathfrak{z})} - \lambda_\infty^2\,\mathfrak{K}_{m-2,\,n}^{(\mathfrak{z})}. \qquad (34,6)$$

Damit wird

$$c_s^{(\mathfrak{z})} = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{2\,\mathfrak{K}_{52}^{(\mathfrak{z})} + 2\,\eta\,\lambda_\infty^2\,\mathfrak{K}_{32}^{(\mathfrak{z})}\right\} = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{2\,\gamma_{52}^{(\mathfrak{z})}\,\mathfrak{K}_{52}^{(\infty)} + 2\,\eta\,\lambda_\infty^2\,\gamma_{32}^{(\mathfrak{z})}\,\mathfrak{K}_{32}^{(\infty)}\right\} \qquad (34,7)$$

oder wegen Gl. (34, 6)

$$\left.\begin{aligned} c_s^{(\mathfrak{z})} &= 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{2\,\eta\,\mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})} + 2\,(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{52}^{(\mathfrak{z})}\right\} \\ &= 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{2\,\eta\,\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}\,\mathfrak{K}_{31}^{(\infty)} + 2\,(1-\eta)\,\gamma_{52}^{(\mathfrak{z})}\,\mathfrak{K}_{52}^{(\infty)}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (34,8)$$

Hieraus lassen sich auch $k_s^{(\mathfrak{z})}$ und $k_d^{(\mathfrak{z})}$ ohne weiteres berechnen. In Abb. 242 und 243 ist $\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}$ und $\gamma_{52}^{(\mathfrak{z})}$ für verschiedene Flügelzahlen dargestellt.

Für $\gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ wurden schon (32, 40) Näherungswerte angegeben. Hieraus geht hervor, daß $\gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ im wesentlichen nur von $\frac{2}{\mathfrak{z}}\,\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ abhängig ist. Deshalb wurde in den Abb. 242 und 243 diese Größe als Abszissenmaßstab gewählt. Damit ergibt sich allerdings für jede Flügelzahl ein besonderer Abszissenmaßstab, der jedoch, wie in Abb. 242 und 243 gezeigt ist, einfach zu konstruieren ist. Die Linien der $\gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ für die verschiedenen Flügelzahlen sind dicht benachbart. Würde man mit dem in Zahlentafel 9 angegebenen Näherungswerte $\overline{x}$ als Abszissenmaßstab $\frac{2}{\mathfrak{z}(1-\overline{x})}\,\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ wählen, so würden diese Linien noch etwas näher zusammenrücken.

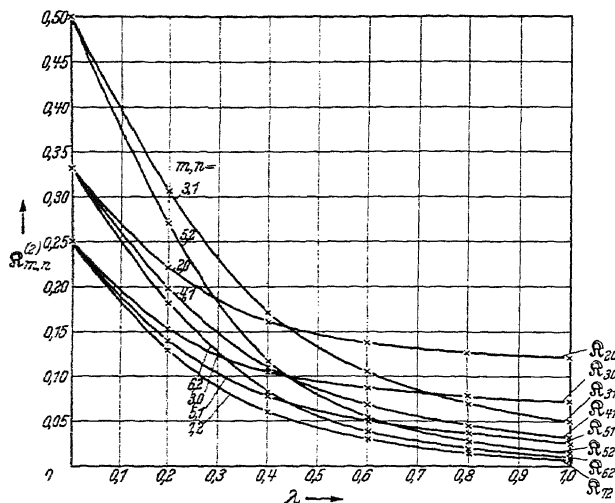



Abb. 236. Hilfsgrößen $\mathfrak{K}^{(2)}_{m\,n}$.

Für sehr große Fortschrittsgrade ergibt sich aus (34, 8) mit Hilfe von (32, 32), (32, 33), (32, 34) bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern mit $\lambda = \frac{\lambda_0}{\eta}$, $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{31}(\lambda \to \infty) = \frac{1}{4\,\lambda^2}$

$$c_s^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) = 2\,\frac{(1-\eta)\,\eta}{\lambda_0^2} \cdot \gamma^{(\mathfrak{z})}_{3\,1}(\lambda \to \infty)\,, \tag{34, 9}$$

also mit

$$\gamma^{(\mathfrak{z})}_{3\,1}(\lambda \to \infty) \qquad \frac{}{\mathfrak{z}+6}$$

$$c_s^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) \approx \frac{2\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}+6}\,\frac{\eta\,(1-\eta)}{\lambda_0^2}\,.$$

Der Höchstwert von c_s ergibt sich dabei zu

$$c^{(\mathfrak{z})}(\lambda \to \infty) = \frac{\gamma_{3\,1}}{2\,\lambda_0^2} \approx \frac{}{2\,(\mathfrak{z}+6)\,\lambda_0^2}\,. \tag{34, 10}$$

Diese Begrenzung des Schubbelastungsgrades ist also wesentlich größer als die der Elementarschraube, für welche sich (12, 31)

$$c'_{s_{gr}}(\lambda \to \infty) = \frac{1}{\lambda_0^2}$$

ergab. Der Wirkungsgrad ist bei großem Fortschrittsgrad

$$\eta_{id}(\lambda \to \infty) = \frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{\gamma^{(\mathfrak{z})}_{3\,1}}\,\lambda_0^2 c_s} \approx \frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(2 + \frac{12}{\mathfrak{z}}\right)\lambda_0^2 c_s}\,. \tag{34, 11}$$

Das Vorzeichen — hat ebenso wie bei der Elementarschraube keine Bedeutung.

Da $\gamma^{(\mathfrak{z})}_{52}$ für kleine λ_∞ nur sehr wenig von $\gamma^{(\mathfrak{z})}_{31}$ verschieden ist und da für große λ_∞ $\mathfrak{K}^{(\infty)}_{52} \ll \mathfrak{K}^{(\infty)}_{31}$ ist, ohne daß der Unterschied zwischen $\gamma^{(\mathfrak{z})}_{52}$

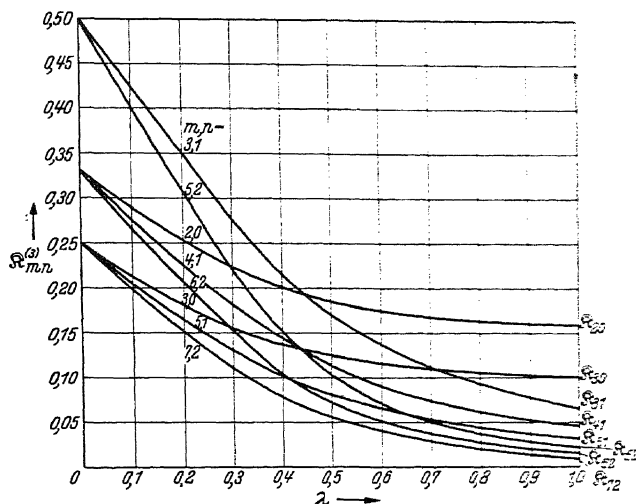



Abb. 237. Hilfsgrößen $\mathfrak{K}_{mn}^{(3)}$.

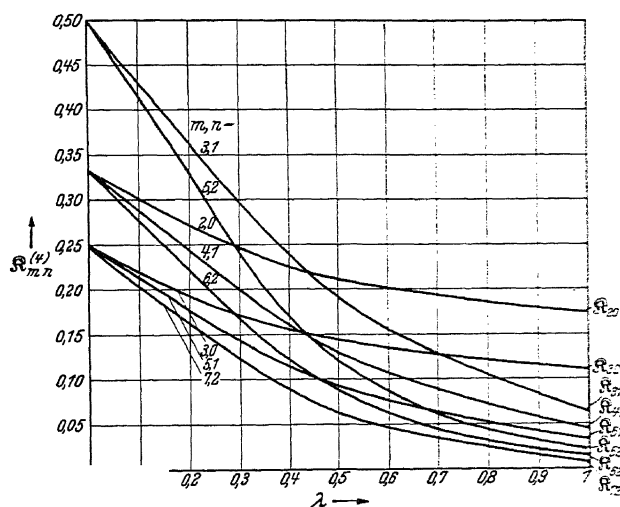



Abb. 238. Hilfsgrößen $\mathfrak{K}_{mn}^{(4)}$

und $\gamma_{31}^{(3)}$ erheblich würde, darf man nicht nur für $\eta \to 1$, also kleine Belastung, sondern auch für größere Belastung in guter Näherung schreiben:

$$c_s^{(3)} = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\,\gamma_{31}^{(3)}\left\{2\,\eta\,\mathfrak{K}_{31}^{(\infty)} - 2\,(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{52}^{(\infty)}\right\} = \gamma_{31}^{(3)}\cdot c_s^{(\infty)}. \quad (34,\,12)$$

Entsprechend wäre mit der gleich guten Annäherung

$$c_l^{(3)} = \gamma_{31}^{(3)}\,c_l^{(\infty)}, \qquad k_s^{(3)} = \gamma_{31}^{(3)}\,k_s^{(\infty)}, \qquad k_d^{(3)} = \gamma_{31}^{(3)}\,k_d^{(\infty)}. \quad (34,\,13)$$

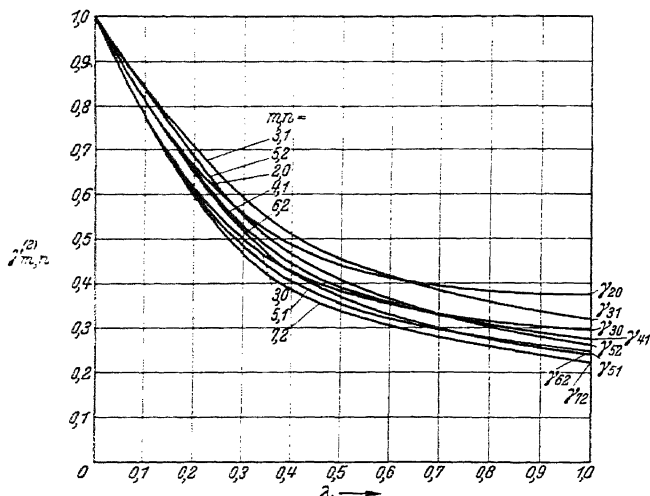



Abb. 239. Gleichwertigkeitszahlen $\gamma^{(2)}_{m\,n}$.

Im Hinblick auf Gleichheit des Wirkungsgrades η_{id} sind also $\mathfrak{z}$-flügelige Schrauben unendlichvielflügeligen gleichwertig, wenn sie die $\gamma^{(\mathfrak{z})}_{31}$-fachen Schübe und Leistungen haben.

Obwohl diese Zurückführung der Ergebnisse für beliebige Flügelzahl auf die Ergebnisse für unendliche Flügelzahl schon recht einfach ist und sich für viele Zwecke sehr gut eignet, ist es erfreulich, daß es noch eine andere Möglichkeit gibt [Lit. 76].

Zeichnet man nämlich für gleiches (m, n) die Werte $\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n}$ in Abhängigkeit von λ_∞ in einem doppelt logarithmischen Netz auf, so findet man, daß die entsprechenden Kurven durch Verschieben in Richtung λ_∞ praktisch zur Deckung gebracht werden können, wie als Beispiel aus Abb. 244 an $\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{31}$ mit $\mathfrak{z} = 2$ bzw. $\mathfrak{z} = \infty$ ersichtlich ist. Entsprechendes gilt für in $\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{m,n}$ lineare Ausdrücke.

In Abb. 245 und 246 sind für $\mathfrak{K}_{31}$ bzw. $\mathfrak{K}_{31} + \mathfrak{K}_{52}$ die Verschiebungen dargestellt, welche sich für verschiedene Flügelzahlen in Abhängigkeit von λ_∞ ergeben. Für unendlichen Fortschrittsgrad sind diese Verschiebungen in Abb. 245 und Abb. 246 genau die gleichen, da für unendlichen Fortschrittsgrad $\mathfrak{K}_{52}$ von höherer Ordnung kleiner wird als $\mathfrak{K}_{31}$. Die Verschiebung berechnet sich aus

$$\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{31}\left(\lambda^{(\mathfrak{z})}_\infty\right) = \gamma^{(\mathfrak{z})}_{31}\left(\lambda^{(\mathfrak{z})}_\infty\right) \mathfrak{K}^{(\infty)}_{31}\left(\lambda^{(\mathfrak{z})}_\infty\right) = \mathfrak{K}^{(\infty)}_{31}\left(\lambda^{(\infty)}_\infty\right). \qquad (34, 14)$$

Für $\lambda_\infty \to \infty$ gilt

$$\mathfrak{K}^{(\infty)}_{31}\left(\lambda^{(\infty)}_\infty\right) = \frac{1}{4}\,\lambda^{(\infty)2}_\infty, \qquad \mathfrak{K}^{(\infty)}_{31}\left(\lambda^{(\mathfrak{z})}_\infty\right) = \frac{1}{4}\,\lambda^{(\mathfrak{z})2}_\infty, \qquad (34, 15)$$

also wird hierfür

$$\frac{\lambda^{(\mathfrak{z})2}_\infty}{\lambda^{(\infty)2}_\infty} = \gamma^{(\mathfrak{z})}_{31}\,(\lambda_\infty \to \infty) = \frac{\lambda^{(\mathfrak{z})2}_0}{\lambda^{(\infty)2}_0}. \qquad (34, 16)$$

Abb. 240. Gleichwertigkeitszahlen $\gamma^{(3)}_{m\,n}$.

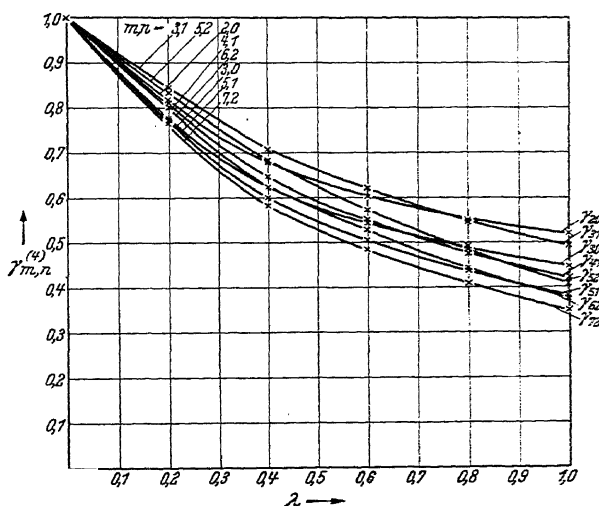



Abb. 241. Gleichwertigkeitszahlen $\gamma^{(4)}_{m\,n}$.

Entsprechendes gilt auch, wenigstens bei hinreichend großem Fortschrittsgrad, für den Übergang von den Ergebnissen der unendlichvielflügeligen Schraube auf die Elementarschraube (Abb. 206). Für den Übergang von der Elementarschraube auf die endlichvielflügelige gilt also

$$\frac{\lambda^{(3)\,2}_{(\infty)}}{\lambda'^{\,2}_{(\infty)}} = \frac{\gamma^{(3)}_{31}}{\gamma'_{(31)}}\,(\lambda_\infty \to \infty) = \frac{\lambda_0^{(3)\,2}}{\lambda_0'^{\,2}}\,. \qquad (34,\ 17)$$

Für andere Fortschrittsgrade ist aber, wie aus den Abb. 245 und 246 zu erkennen ist, die Verschiebung nicht sehr viel verschieden. In den Gleichungen für c_s bzw. c_l kommt λ nun aber nur in Verbindung mit $\mathfrak{K}_{31}$ bzw. $\mathfrak{K}_{52}$ vor. Deshalb besteht die Möglichkeit, mit praktisch ausreichender Näherung das $c_s(\eta)$- bzw. $c_l(\eta)$-Verhalten einer Schraube

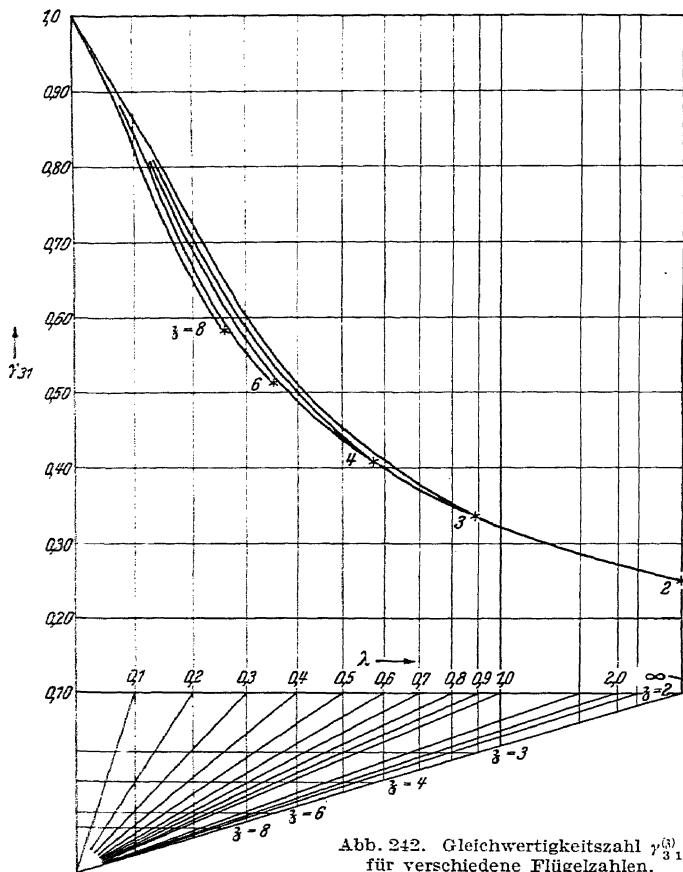
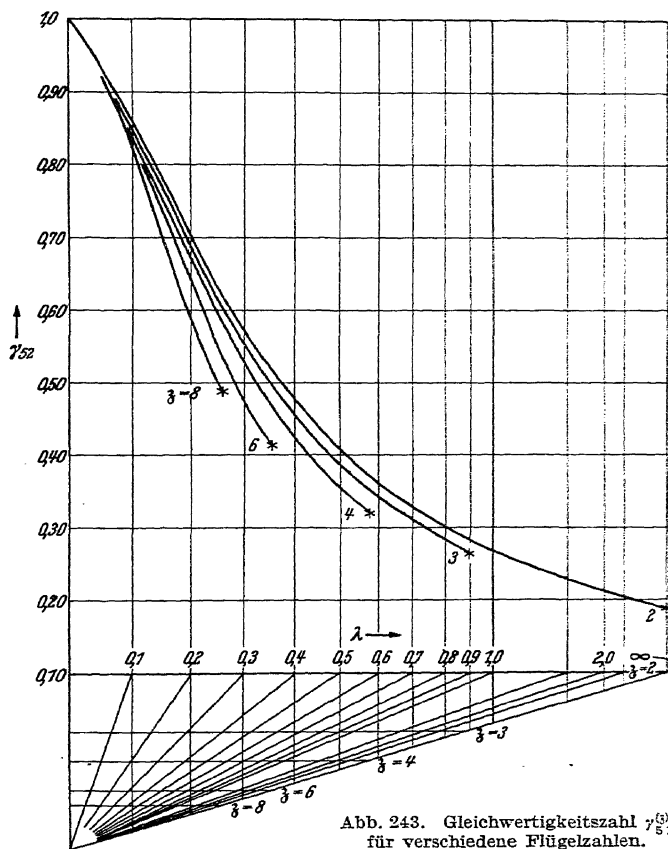



Abb. 242. Gleichwertigkeitszahl $\gamma_{31}^{(z)}$ für verschiedene Flügelzahlen.

für verschiedene Flügelzahlen in einem einzigen Schaubild zu vereinigen. Man hat nur den Abszissenmaßstab der λ_0 für jedes $\mathfrak{z}$ entsprechend zu ändern. Genau genommen ist diese Maßstabänderung von η abhängig, wie aus dem Unterschied der Abb. 245 und 246 hervorgeht. In den Schaubildern Abb. 247 und Abb. 248 ist der Abszissenmaßstab für $\mathfrak{z} = 2$ für alle Wirkungsgrade genau. Die Abszissenänderung für andere $\mathfrak{z}$ ist für $\eta = 0{,}8$ und für sehr große λ_0 genau. Für andere η und kleinere λ_0 dürfte sie jedoch im Rahmen der Ablesegenauigkeit ausreichen.

Durch die Abb. 247 bzw. Abb. 248 ist der Zusammenhang zwischen Fortschrittsgrad λ, Blattzahl $\mathfrak{z}$, Schubbelastungsgrad c_s bzw. Leistungsbelastungsgrad c_l und ideellem Wirkungsgrad η_{id} der freifliegenden Bestluftschraube dargestellt. Sind z. B. $\lambda_0, \mathfrak{z}, c_l$ gegeben und ist η_{id} gesucht, dann geschieht die Verwendung nach folgender Weise:

Abb. 243. Gleichwertigkeitszahl $\gamma_{51}^{(5)}$ für verschiedene Flügelzahlen.

Man trage den gegebenen Wert von λ_0 zuerst auf der Achse $\mathfrak{z} = 2$ ein und gehe parallel zur nächstliegenden der eingezeichneten Geraden bis zu der in Frage kommenden Achse $\mathfrak{z}$ ($= 2, 3, 4, 6, 8, \infty$). Senkrecht über dem Schnittpunkt ist bei der Ordinate, welche dem gegebenen Belastungsgrade entspricht, der ideelle Wirkungsgrad η_{id} an den Parameterkurven abzulesen. Zugleich erhält man den Axialwirkungsgrad η_a bei derselben Ordinate in dem links gezeichneten Teil an den horizontalen Asymptoten der Wirkungsgradkurven. Die Differenz von η_a und η_{id} stellt die Verluste dar, die durch den

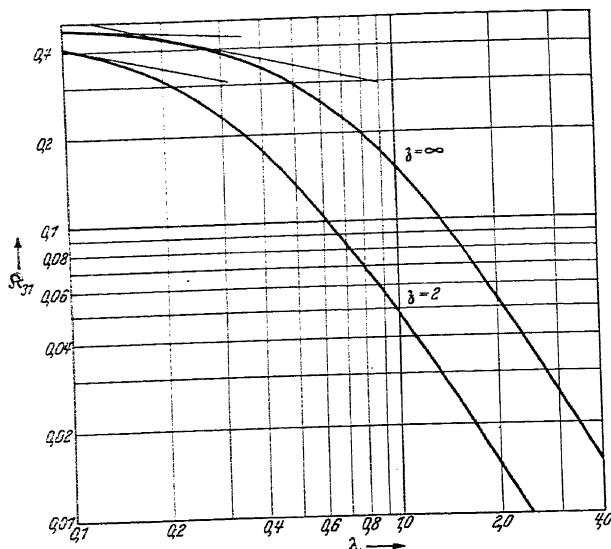



Abb. 244. Hilfsgrößen $\mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})}$ für $\mathfrak{z}=2$ und $\mathfrak{z}=\infty$ in logarithmischer Darstellung.

Drall des Schraubenstrahles und die Endlichkeit der Blattzahl bedingt sind.

Die Asymptoten in den Abb. 247 und 248 werden erhalten für kleine λ_0 aus der Gleichung (29, 6)

$$c_s = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2}$$

und für große λ_0 aus der Gleichung (34, 9)

$$c_s = \frac{2\,(1-\eta)\,\eta}{\lambda_0^2}\,\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})};$$

sie sind also für kleine λ_0 waagerecht und haben für große λ_0 in der gewählten logarithmischen Darstellung bei gleichem Ordinaten- und Abszissenmaßstab die Neigung $-2:1$.

b) Wirkungsgrad unter Berücksichtigung der Reibung. Entsprechend Gl. (30, 4) erhalten wir unter Berücksichtigung der Reibung bei endlicher Blattzahl mit $\lambda_0/\eta = \lambda_p$

$$\begin{aligned}
k_s^{(\mathfrak{z})} &= 4\,\lambda^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{2\,\mathfrak{K}_{52}^{(\mathfrak{z})} + 2\eta\,\lambda_p^2\,\mathfrak{K}_{32}^{(\mathfrak{z})}\right\}\\
&\quad - \varepsilon\cdot 4\,\lambda_p\left\{2\,(2-\eta)\,\mathfrak{K}_{62}^{(\mathfrak{z})} + 2\eta\,(3-\eta)\,\lambda_p^2\,\mathfrak{K}_{42}\right.\\
&\quad + \varepsilon^2\cdot 4\left\{2\,\mathfrak{K}_{72}^{(\mathfrak{z})} + 4\eta\,\lambda_p^2\,\mathfrak{K}_{52}^{(\mathfrak{z})} + 2\eta^2\,\lambda_p^4\,\mathfrak{K}_{32}^{(\mathfrak{z})}\right\}\\
k_s^{(\mathfrak{z})} &= 4\,\lambda^2\,\frac{1-\eta}{\eta^2}\left\{2\,\eta\,\mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})} + 2\,(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{52}^{(\mathfrak{z})}\right\}\\
&\quad - \varepsilon\cdot 4\,\lambda_p\left\{2\,\eta^2\,\mathfrak{K}_{20}^{(\mathfrak{z})} + 6\,\eta\,(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{41}^{(\mathfrak{z})\prime} + 4\,(1-\eta)^2\,\mathfrak{K}_{62}\right.\\
&\quad + \varepsilon^2\cdot 4\left\{2\,\eta^2\,\mathfrak{K}_{30}^{(\mathfrak{z})} + 4\,\eta\,(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{51}^{(\mathfrak{z})} + 2\,(1-\eta)^2\,\mathfrak{K}_{72}^{(\mathfrak{z})}\right\}
\end{aligned} \qquad (34, 18)$$

Abb. 245. Die zu gleichen Werten $\mathfrak{K}_{31}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_{31}^{(\infty)}$ bei logarithmischer Darstellung gehörende Abszissenverschiebung in mm, wenn die Einheit des logarithmischen Maßstabes 125 mm ist. Der zweite Ordinatenmaßstab zeigt das Verhältnis $\lambda^{(\infty)} : \lambda^{(\mathfrak{z})}$ der bei kleiner Belastung ($\eta_{id} \to 1$) einander zugeordneten Fortschrittsgrade.

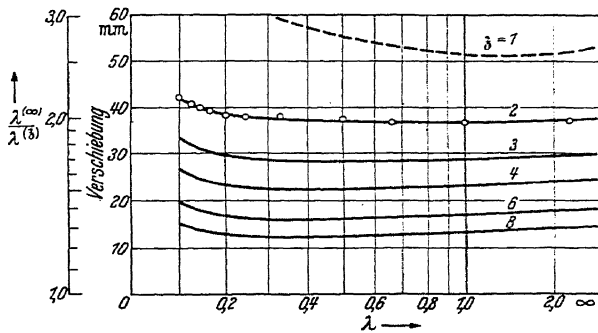



Abb. 246. Die zu gleichen Werten $(\mathfrak{K}_{31}^{(2)} + \mathfrak{K}_{52}^{(2)})$ und $(\mathfrak{K}_{31}^{(\infty)} + \mathfrak{K}_{52}^{(\infty)})$ bei logarithmischer Darstellung gehörende Abszissenverschiebung in mm, wenn die Einheit des logarithmischen Maßstabes 125 mm ist. Der zweite Ordinatenmaßstab zeigt das Verhältnis $\lambda^{(\infty)} : \lambda^{(\mathfrak{z})}$ der beim Wirkungsgrad $\eta_{id} = 0{,}5$ einander zugeordneten Fortschrittsgrade.

oder mit Benutzung der $\gamma_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$

$$
\begin{aligned}
k_s = 4\,\frac{1-\eta}{\eta^2} & \left\{ 2\eta\,\mathfrak{K}_{31}^{(\infty)} + 2(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{52}^{(\infty)}\,\frac{\gamma_{52}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} \right\} \cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})} \\
& - \varepsilon 4 \lambda_p \left\{ 2\eta^2\,\mathfrak{K}_{20}^{(\infty)} + 6\eta(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{42}^{(\infty)}\,\frac{\gamma_{41}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{20}^{(\mathfrak{z})}} + 4(1-\eta)^2\,\mathfrak{K}_{62}^{(\infty)}\,\frac{\gamma_{62}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{20}^{(\mathfrak{z})}} \right\} \gamma_{20}^{(\mathfrak{z})} \qquad (34, 19) \\
& + \varepsilon^2 \cdot 4 \left\{ 2\eta^2\,\mathfrak{K}_{30}^{(\infty)} + 4\eta(1-\eta)\,\mathfrak{K}_{51}^{(\infty)}\,\frac{\gamma_{52}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{30}^{(\mathfrak{z})}} + 2(1-\eta)^2\,\mathfrak{K}_{72}\,\frac{\gamma_{72}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{30}^{(\mathfrak{z})}} \right\} \gamma_{30}^{(\mathfrak{z})}.
\end{aligned}
$$

Hierbei sind die $\mathfrak{K}_{m,n}^{(\mathfrak{z})}$ für die Werte λ_p einzusetzen, wie aus der Herleitung der Gleichung (30, 4) hervorgeht.

Für $\lambda \to 0$ wird $\frac{\gamma_{52}}{\gamma_{31}} \to 1$, $\frac{\gamma_{41}}{\gamma_{20}}$ 1, $\frac{\gamma_{62}}{\gamma_{20}} \to 1$, $\frac{\gamma_{51}}{\gamma_{30}} \to 1$, $\frac{\gamma_{32}}{\gamma_{30}}$

Für $\lambda \to \infty$ wird $\mathfrak{K}_{52} \ll \mathfrak{K}_{31}$, $\mathfrak{K}_{62} \ll \mathfrak{K}_{41} \ll \mathfrak{K}_{20}$, $\mathfrak{K}_{72} \ll \mathfrak{K}_{51} \ll \mathfrak{K}_{30}$.

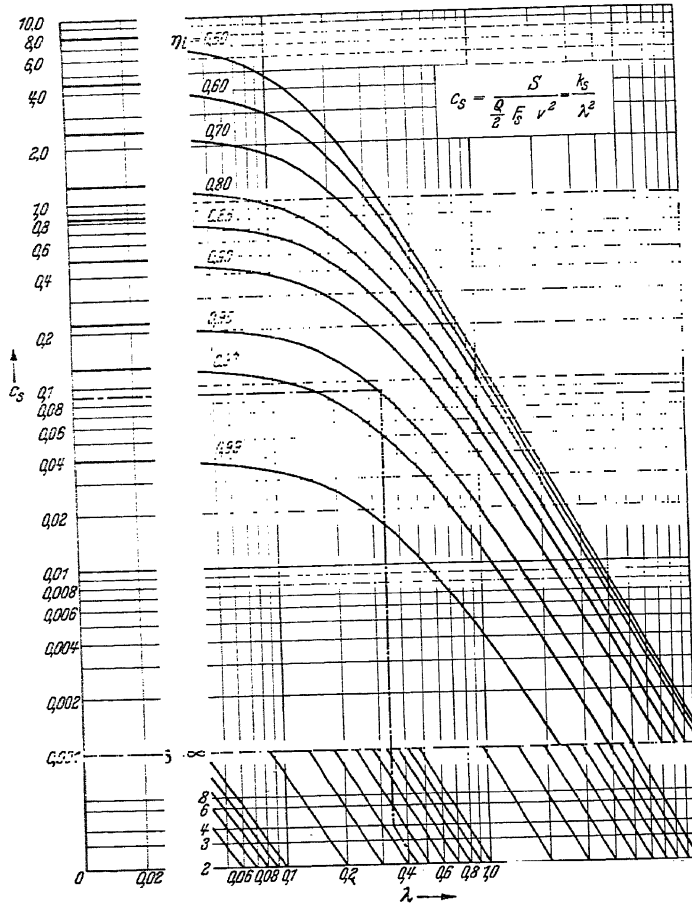



Abb. 247. Zusammenhang zwischen Fortschrittsgrad λ_0, Flügelzahl $\mathfrak{z}$, ideellem Wirkungsgrad η_{id} und Schubbelastungsgrad c_s bei bester Zirkulationsverteilung. Z. B. ergibt sich für $\lambda_0 = 0{,}45$, $\mathfrak{z} = 4$, $c_s = 0{,}09$, $\eta_{id} = 0{,}950$ und $\eta_a = 0{,}978$.

Deshalb darf für $\lambda \to 0$ oder für $\lambda \to \infty$ oder für $\eta \to 1$ geschrieben werden

$$k_s^{(\mathfrak{z})} = k_{s(\varepsilon=0)}^{(\infty)} \cdot \gamma_{31} \left[1 - \varepsilon \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{31}} k_1^{(\infty)} + \varepsilon^2 \frac{\gamma_{30}}{\gamma_{31}} k_2^{(\infty)}\right], \qquad (34, 20)$$

wobei die $k_1^{(\infty)}$ und $k_2^{(\infty)}$ die durch (30, 6) angegebene Bedeutung haben. Dies ist aber offenbar auch für andere Zustände eine brauchbare Näherung.

$\frac{\gamma_{20}}{\gamma_{31}}$ und $\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{31}}$ sind in Abb. 249 und 250 dargestellt.

Damit ist k_s bzw. c_s, k_d, c_l für gegebenes ε und η leicht zu berechnen. Von Interesse ist aber auch die Abhängigkeit des Wirkungsgrades bei

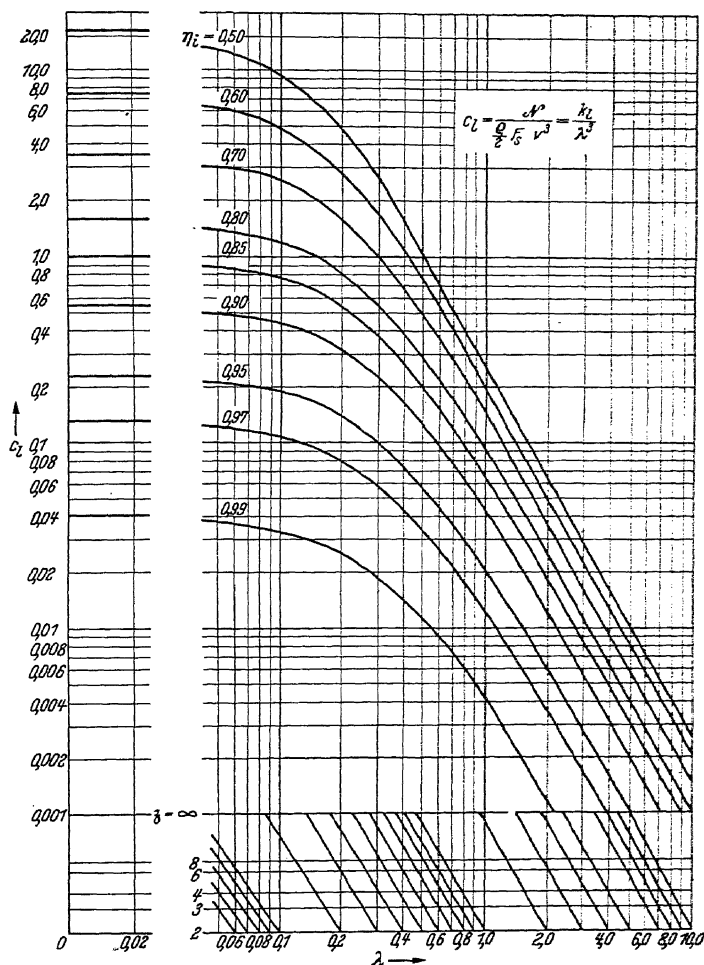



Abb. 248. Zusammenhang zwischen Fortschrittsgrad λ_0, Flügelzahl $\mathfrak{z}$, ideellem Wirkungsgrad η_{id} und Leistungsbelastungsgrad c_l bei bester Zirkulationsverteilung.

gegebener Blattreibung, die ja bei einer gegebenen Schraube in den wichtigsten Betriebszuständen als konstant angesehen werden darf.

Schreibt man entsprechend noch folgender Darlegungen, wie dies für kleine Belastung und kleine Reibungsverluste zulässig ist, den mittleren Auftriebsbeiwert (36, 10)

$$c_a = \frac{2\pi R}{\mathfrak{z} t} \cdot \frac{k_s}{F(\lambda_p)},$$

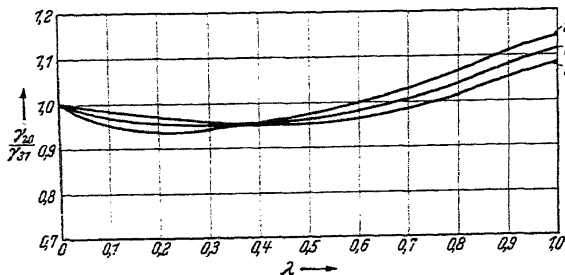



Abb. 249. $\gamma_{20}^{(3)}/\gamma_{31}^{(3)}$.

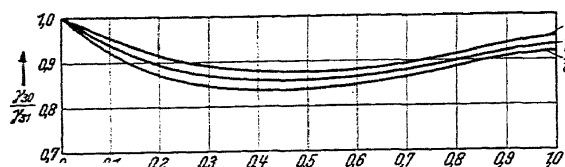



Abb. 250. $\gamma_{30}^{(3)}/\gamma_{31}^{(3)}$.

wobei mit den in Abschn. 36 b eingeführten Bezeichnungen

$$F(\lambda_p) = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2\lambda_p^2},$$

$$\frac{\bar{t}}{R} = \int^1 \frac{t}{R}\, d x^3$$

ist, und führt man als Blattreibungszahl (13, 35)

$$\tau = c_w \cdot \frac{\mathfrak{z}\bar{t}}{2\pi R}$$

ein, so wird

$$\varepsilon = \frac{c_w}{c_a} = \tau \frac{F(\lambda_p)}{k_s} \qquad (34, 21)$$

und $$k_s = k_{s(\varepsilon=0)}^{(\infty)} \cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})} \left[1 - \tau \frac{F(\lambda_p)}{k_s} \frac{\gamma_{20}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} k_1^{(\infty)} + \tau^2 \frac{F^2(\lambda_p)}{k_s^2} \cdot \frac{\gamma_{30}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} k_2^{(\infty)}\right]. \qquad (34, 22)$$

Diese kubische Gleichung für k_s könnte man auflösen und man würde dann

$$k_s = k_s(\eta_i, \lambda_p, \tau) \qquad (34, 23)$$

erhalten. Die sich daraus ergebenden Wirkungsgradschaubilder haben außerordentliche Ähnlichkeit mit den Wirkungsgradschaubildern, die sich aus Versuchen mit Verstellschrauben ergeben. Der Unterschied ist nur darauf zurückzuführen, daß eben τ für eine Verstellschraube nicht im Bereiche aller Betriebszustände als konstant angesehen werden darf.

Abb. 251. Blattbreitenverlauf $t_{\text{red}}^{(2)}/t_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei kleinem Schub und Reibungsfreiheit ($\mathfrak{z} = 2$) für $\lambda^* = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0.

Immerhin geben solche Wirkungsgradschaubilder für konstante τ einen guten Anhaltspunkt zur Beurteilung des Verhaltens einer gegebenen Schraube bei veränderten Betriebszuständen, während Wir-

kungsgradschaubilder für konstantes ε sich mehr für die Auswahl einer Schraube für einen vorgegebenen Betriebszustand eignen.

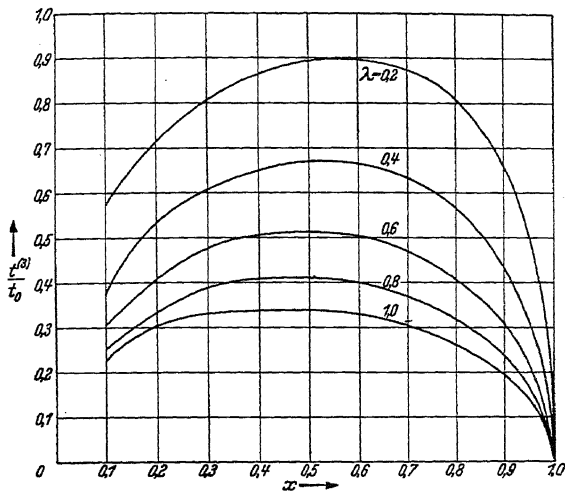



Abb. 252. Blattbreitenverlauf $t^{(3)}_{red}/t_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei kleinem Schub und Reibungsfreiheit ($\mathfrak{z} = 3$) für $\lambda^* = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0.

Abb. 253. Blattbreitenverlauf $t^{(4)}_{red}/t_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei kleinem Schub und Reibungsfreiheit ($\mathfrak{z} = 4$) für $\lambda^* = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0.

Auf die Wiedergabe solcher Schaubilder wird hier jedoch verzichtet.

c) Der Blattbreitenverlauf bei günstigster Schubverteilung. Mit einer Bezugsblattbreite (29, 23)

$$t_0 = \frac{4 R \lambda^*}{\mathfrak{z}} \frac{v_a'}{v_a''}$$

findet man entsprechend Gl. (29, 24) als Blattbreitenverlauf für bei Reibungsfreiheit in Nähe des Zustandes der Schubfreiheit günstigste Schubverteilung

$$t_{red} = t_0 \, \mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} \sqrt{x^2 + \lambda^{*2}}$$

$$= t_0 \, \varkappa^{(\mathfrak{z})} \cdot \mathfrak{G}^{(\infty)} \sqrt{x^2}$$

oder mit (29, 15)

$$\mathfrak{G}^{(\infty)} = \frac{x}{\lambda^{*2}}.$$

$$t_{red} = t_0 \frac{}{\sqrt{x^2 + \lambda^{*2}}} \varkappa^{(\mathfrak{z})}. \qquad (34, 24)$$

Die sich damit ergebenden Blattbreitenverteilungen sind in Abb. 251, 252, 253 zusammengestellt. Die aerodynamische Steigung dieser Schrauben ist konstant.

Fordert man dagegen, daß die Schubverteilung nur für einen bestimmten Betriebszustand die günstigste sei und verlangt man dazu, daß dabei der Anstellwinkel α_∞ der Flügelprofile konstant ist, was im wesentlichen einem konstanten Gleitwert ε entspricht, so findet man mit (29, 42)

$$\bar{t}_0 = \frac{1 - \eta_{i a}}{\eta_{i a}} \frac{4 R}{\mathfrak{z} \sin \alpha_\infty} \lambda_0^2,$$

als Bezugsblattbreite entsprechend Gl. (29, 41)

$$t_{\text{red}} = \bar{t}_0\, \mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \lambda_0^2}} = \bar{t}_0\, \varkappa^{(\mathfrak{z})}\, \mathfrak{G}^{(\infty)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \lambda_0^2}}$$

oder (29, 43)

$$t_{\text{red}} = \bar{t}_0 \frac{x^2}{(x^2 + \lambda_0^2)^{3/2}} \cdot \varkappa^{(\mathfrak{z})} \tag{34, 25}$$

Die sich damit ergebenden Blattbreitenverteilungen sind in Abb. 254, 255, 256 zusammengestellt. Die aerodynamische Steigung dieser Schrauben ist nicht konstant. Der Nullsteigungsgrad ist λ_0/η und ihre Schränkung ist α_∞ = konst.

Mit der wirklichen Blattbreite

$$t = \frac{2\pi \sin \alpha_\infty}{c_a}\, t_{\text{red}}$$

ergibt sich die günstigste $c_a \cdot t$-verteilung aus

$$c_a \frac{\mathfrak{z}\, t}{2\pi R} \cdot \frac{\eta_{id}}{4\lambda_0^2(1-\eta_{id})} = \frac{t_{\text{red}}}{\bar{t}_0} = \frac{x^2}{(x^2+\lambda_0^2)^{3/2}}\, \varkappa^{(\mathfrak{z})},$$

so daß auch diese den Abb. 254, 255, 256 entnommen werden kann.

d) Das Verhalten einer Bestschraube bei Änderung des Fortschrittsgrades. Für eine Schraube konstanter aerodynamischer Steigung kleinen Schubs und günstigster Schubverteilung ist mit

$$\chi_0 = \frac{\mathfrak{z}\, t_0}{2\pi R} \tag{34, 26}$$

Abb. 254. Blattbreitenverlauf $t_{\text{red}}^{(3)}/\bar{t}_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei konstantem α_∞ über den Radius ($\mathfrak{z} = 2$) für $\lambda_0 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$.

als Bezugsblattbreitenverhältnis die Schubziffer entsprechend Gl. (29, 27)

$$k_s = \frac{4\lambda^{*2}}{1 + \dfrac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) 2\, \mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})} \tag{34, 27}$$

oder mit $\mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})} = \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})} \mathfrak{K}_{31}^{(\infty)}$

$$k_s = \frac{4\lambda^{*2}}{1 + \dfrac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})} \cdot 2\, \mathfrak{K}_{31}^{(\infty)}. \tag{34, 28}$$

Für die Leistungsziffer gilt entsprechend Gl. (29, 30)

$$k_d = \frac{4\lambda^{*3}}{1 + \dfrac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} + \frac{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1 + \dfrac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right) \cdot 2\, \mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})} \tag{34, 29}$$

oder mit $\mathfrak{K}_{31}^{(\mathfrak{z})} = \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}\,\mathfrak{K}_{31}^{(\infty)}$

$$k_d = \frac{4\,\lambda^{*3}}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\,\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}+\frac{1-\dfrac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\dfrac{2\,\lambda^*}{\pi\,\chi_0}}\right)\cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}\cdot 2\,\mathfrak{K}_{31}^{\infty}. \qquad (34, 30)$$

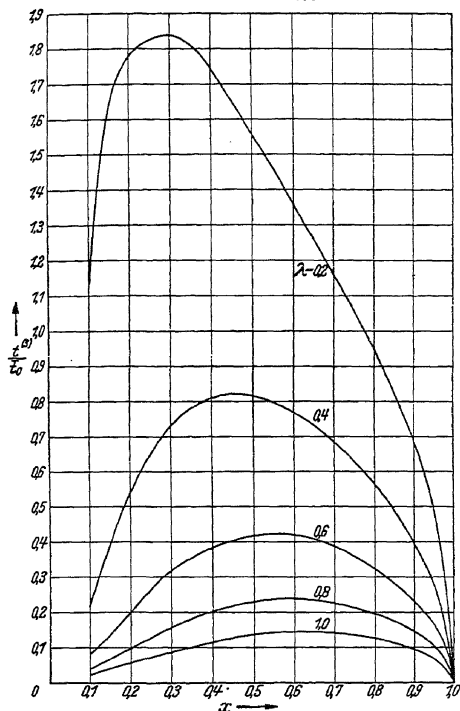



Abb. 255. Blattbreitenverlauf $t_{\text{red}}^{(3)}/t_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei konstantem α_∞ über den Radius ($\mathfrak{z} = 3$) für $\lambda_0 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$.

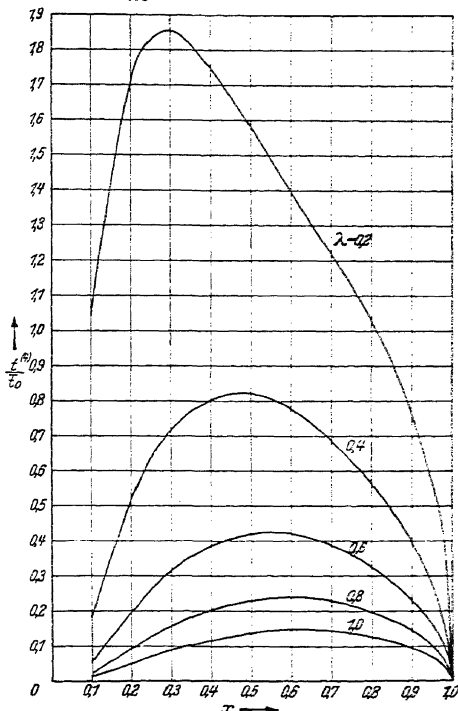



Abb. 256. Blattbreitenverlauf $t_{\text{red}}^{(4)}/t_0$ für Schrauben günstigster Schubverteilung bei konstantem α_∞ über den Radius ($\mathfrak{z} = 4$) für $\lambda_0 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$.

Versteht man unter $k_s'(1)$ bzw. $k_d'(1)$ die Schub- bzw. Leistungsziffer einer Elementarschraube mit dem Steigungsgrade λ^* und dem Werte (29, 40)

$$\lambda^*\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{\mathfrak{z}\,t_0}{4\,R}}\cdot\dfrac{\lambda^*}{1+\lambda^{*2}}},$$

so wird mit (29, 36)

$$\gamma_{31}' = \frac{1}{(1+\lambda^{*2})\left(1-\lambda^{*2}\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda^{*2}}\right)\right)}$$

$$k_s^{(\mathfrak{z})} = k_s'(1)\cdot\frac{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}'}, \qquad (34, 31)$$

$$k_d^{(\mathfrak{z})} = k_d'(1)\cdot\frac{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}'}. \qquad (34, 32)$$

Hiermit ist es leicht, die an der Elementarschraube gewonnenen Ergebnisse zunächst wenigstens für kleine Belastung auf die Gesamtschraube beliebiger Flügelzahl zu übertragen. Für größere Belastung bis in die Nähe des Standes $\lambda_0 = 0$ dürfte diese Übertragung jedoch ebenfalls ausreichend sein. Unter dieser Annahme würde der ideelle Wirkungsgrad für beliebigen Betriebszustand

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma'_{31}}{\gamma'^{(3)}_{31}} k_s}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma'_{31}}{\gamma'^{(3)}_{31}} c_s}} \tag{34, 33}$$

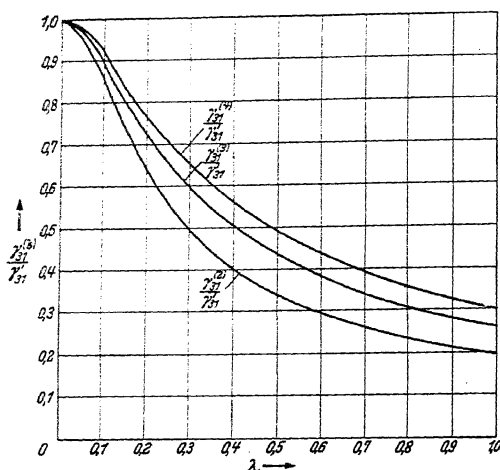



Abb. 257. Die Hilfsgröße $\gamma^{(3)}_{31}/\gamma'_{31}$ zur Berechnung des Wirkungsgrades einer gegebenen Luftschraube.

wobei $\gamma'_{31}/\gamma^{(3)}_{31}$ aus λ^*, dem Nullschubfortschrittsgrad, zu entnehmen wäre. Das Verhältnis $\gamma^{(3)}_{31}/\gamma'_{31}$ ist aus Abb. 257 zu entnehmen.

Als Abschätzung für $\gamma'_{31}/\gamma^{(3)}_{31}$ kann für nicht zu große $\mathfrak{z}$ dienen

$$\frac{\gamma'_{31}}{\gamma^{(3)}_{31}} \approx 1 + \left(1 + \frac{12}{\mathfrak{z}}\right) \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}}.$$

e) Einfluß der Reibung auf Schub und Leistung. Infolge der Flügelblattreibung ist der wirkliche Schub und die wirkliche Leistung geändert. Unter Vernachlässigung des Einflusses höherer Potenzen von ε gilt für das Schraubenelement nach Gl. (16, 16) und (16, 17)

$$k'_s = 4\lambda^{*\prime 2} \frac{1 - \frac{\lambda'_0}{\lambda^{*\prime}}}{1 + \frac{\lambda^{*\prime}}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}} \left(1 - \varepsilon \frac{\lambda'_0}{\eta_i} \left(1 + 3 \frac{1 - \eta_i}{1 + \frac{\lambda_0'^2}{\eta_i}}\right)\right),$$

$$k'_d = 4\lambda^{*\prime 3} \frac{1 - \frac{\lambda'_0}{\lambda^{*\prime}}}{1 + \frac{\lambda^{*\prime}}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}} \left(\frac{\lambda'_0}{\lambda^{*\prime}} + \frac{1 + \lambda^{*\prime 2}}{1 + \frac{\lambda^{*\prime}}{\operatorname{tg}\vartheta_{id}}} \left(1 - \frac{\lambda'_0}{\lambda^{*\prime}}\right)\right) \left(1 + \varepsilon \left(\frac{\eta_i}{\lambda'_0} - 3 \frac{\lambda'_0}{\eta_i} \frac{1 - \eta_i}{1 + \frac{\lambda_0'^2}{\eta_i}}\right)\right)$$

Die Verminderung von $k'_{s_{\varepsilon=0}}$ ist also gegeben durch

$$\frac{\Delta k'_s}{k'_{s_{\varepsilon=0}}} = \varepsilon \frac{\lambda'_0}{\eta_i} \left(1 + 3 \frac{1 - \eta_i}{1 + \frac{\lambda_0'^2}{\eta_i}}\right) = \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_i} \frac{1}{x} \frac{(4 - 3\eta_i)x^2 + \lambda_m^2}{x + \lambda_m^2}. \quad \left(\lambda_m^2 = \frac{\lambda_0^2}{\eta_i}\right) \tag{34, 34}$$

Die Vermehrung von $k'_{d_{\varepsilon=0}}$ ist gegeben durch

$$\frac{\Delta k'_d}{k'_{d_{\varepsilon=0}}} = \varepsilon\left(\frac{\eta_i}{\lambda'_0} - 3\,\frac{\lambda'_0}{\eta_i}\,\frac{1-\eta_i}{1+\frac{\lambda_0'^2}{\eta_i}}\right) = \varepsilon\left(\frac{\eta_i}{\lambda_0}\,x - 3\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,x\,\frac{1-\eta_i}{x^2+\lambda_m^2}\right). \tag{34, 35}$$

Die Integration ergibt als Änderung für die Gesamtschraube, wenn nun unter dem Integral $\lambda^* = \lambda_m$ gesetzt wird, was für kleinen Schlupf zulässig ist,

$$\Delta k_s = \int \Delta k'_s\, x^2\, d x^2$$

$$= \varepsilon\,\frac{4\,\lambda^{*2}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda^*}\right)\left\{\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,(4-3\,\eta_i)\cdot 2\int\frac{x^4}{(x^2+\lambda_m^2)^2}\,d x + \frac{\lambda_0}{\eta_i}\,\lambda_m^2\cdot 2\int\frac{x^2}{(x^2+\lambda_m^2)^2}\,d x\right\},$$

$$\Delta k_s = \varepsilon\,\frac{4\,\lambda^{*2}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left\{\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,(4-3\,\eta_i)\cdot 2\,\mathfrak{K}_{42}^{(3)}(\lambda_m) + \frac{\lambda_0}{\eta_i}\,\lambda_m^2\cdot 2\,\mathfrak{K}_{22}^{(3)}(\lambda_m)\right\} \tag{34, 36}$$

oder wegen $\lambda_m^2\,\mathfrak{K}_{22}(\lambda_m) = \mathfrak{K}_{21}(\lambda_m) - \mathfrak{K}_{42}(\lambda_m)$

$$\Delta k_s = \varepsilon\,\frac{4\,\lambda^{*2}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left\{2\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,\mathfrak{K}_{21}^{(3)} + 6\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,(1-\eta_i)\,\mathfrak{K}_{42}\right\}. \tag{34, 37}$$

Entsprechend ergibt sich

$$\Delta k_d = \int_0^1 \Delta k'_d\, x^3\, d x^2 = \varepsilon\,\frac{4\,\lambda^{*3}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*} + \frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right)$$

$$\cdot\left\{\frac{\eta_i}{\lambda_0}\,2\int\frac{x^4}{x^2+\lambda_m^2}\,d x - 3\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,(1-\eta_i)\cdot 2\int\frac{x^4}{(x^2+\lambda_m^2)^2}\,d x\right\},$$

$$\Delta k_d = \varepsilon\,\frac{4\,\lambda^{*3}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda^*}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda^*} + \frac{1-\frac{\lambda}{\lambda^*}}{1+\frac{2\,\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right)\left\{2\,\frac{\eta_i}{\lambda_0}\,\mathfrak{K}_{41}^{(3)} - 6\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\,(1-\eta_i)\,\mathfrak{K}_{42}\right\}. \tag{34, 38}$$

Damit wird mit Gl. (34, 13) bzw. (34, 28) und (34, 30)

$$k_s = k_{s_{\varepsilon=0}}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\lambda_0}{\eta_i}\cdot\frac{\mathfrak{K}_{21}^{(3)} + 3\,(1-\eta_i)\,\mathfrak{K}_{42}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}}\right), \tag{34, 39}$$

$$k_d = k_{d_{\varepsilon=0}}\left(1 + \varepsilon\,\frac{\eta_i}{\lambda_0}\cdot\frac{\mathfrak{K}_{41}^{(3)} - 3\,(1-\eta_i)\left(\frac{\lambda_0}{\eta_i}\right)^2\mathfrak{K}_{42}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}}\right) \tag{34, 40}$$

Der Wirkungsgrad wird damit

$$\eta = \lambda\,\frac{k_s}{k_d} = \lambda\,\frac{k_{s_{\varepsilon=0}}}{k_{d_{\varepsilon=0}}}\cdot\frac{\frac{k_s}{k_{s_{\varepsilon=0}}}}{\frac{k_d}{k_{d_{\varepsilon=0}}}} = \eta_i\cdot\eta_m\,.$$

Der mechanische Wirkungsgrad wird also bei Vernachlässigung von Gliedern mit ε^2 usw.

$$\eta_m = \frac{1 - \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_i} \frac{\mathfrak{K}_{21}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}} - 3\varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_i}(1-\eta_i)\frac{\mathfrak{K}_{42}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}}}{1 + \varepsilon \frac{\eta_i}{\lambda_0} \frac{\mathfrak{K}_{41}}{\mathfrak{K}_{31}} - 3\varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_i}(1-\eta_i)\frac{\mathfrak{K}_{42}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}}} \approx \frac{1 - \varepsilon \frac{\lambda_0}{\eta_i} \frac{\mathfrak{K}_{21}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}}}{1 + \varepsilon \frac{\eta_i}{\lambda_0} \frac{\mathfrak{K}_{41}^{(3)}}{\mathfrak{K}_{31}^{(3)}}}. \qquad (34, 41)$$

Von den Gleichungen (34, 37), (34, 38) bzw. (34, 39), (34, 40) hat man Gebrauch zu machen, wenn man k_s, k_d, η für $\varepsilon = 0$ berechnet hat und den Einfluß der Reibung nachträglich berücksichtigen will.

Die obigen Gleichungen gelten zunächst nur für $\lambda_0 \to \lambda^*$, sind aber praktisch auch für kleinere λ_0, also größere Belastung, brauchbar.

J. Berechnung von Luftschrauben.

35. Luftschraubenberechnung auf Grundlage der Theorie der endlichvielflügeligen Schraube.

a) Festlegung der Hauptabmessungen und überschlägiger Entwurf einer Luftschraube. Sobald man sich schlüssig geworden ist, für welche Motorleistung N und Motordrehzahl n_{Motor}, Flughöhe h bzw. Luftdichte ϱ, Fluggeschwindigkeit v_0 die Luftschraube entworfen werden soll und nachdem man sich durch vorläufige Wahl einiger Durchmesser D und Schraubendrehzahlen n_{Schraube}, wodurch das Untersetzungsverhältnis $\frac{n_{\text{Motor}}}{n_{\text{Schraube}}}$ festgelegt wird, und überschlägiges Bestimmen des Wirkungsgrades η im gewählten und in den sonst in Frage kommenden Betriebszuständen für die endgültige Schraubendrehzahl n und einen endgültigen Schraubendurchmesser D entschieden hat, entsteht die Aufgabe, die passende Schraube zu entwerfen.

Aus N, ϱ, v_0, n, D ergeben sich zunächst die dimensionalen Kenngrößen (8, 26), (8, 4)

$$C_S = \frac{v_0 \cdot \varrho^{1/5}}{N^{1/5} n^{2/5}}; \qquad c_l = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} v_0^3 \frac{\pi D^2}{4}}$$

bzw. (8, 6), (8, 7)

$$\lambda = \frac{v_0}{u_a}, \qquad k_l = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u_a^3 \frac{\pi D^2}{4}}.$$

Die Entwurfsberechnung hat außer der mittleren Steigung H, der Flügelzahl $\mathfrak{z}$ und der mittleren Blattbreite $\bar{t}$ auch den Steigungsverlauf und den Blattbreitenverlauf über dem Radius selbst zu liefern.

Überschlägig kann man nun einen zu dem gewählten Betriebszustand [illegible] übrigen in Betracht kommenden Betriebszustände

Dieser darf um so größer sein, je mehr der Berechnungs-Betriebszustand dem Steigflug entspricht und um so kleiner, je näher dieser dem Horizontalflug liegt. Er darf bei sehr großen Flughöhen größer sein als es bei kleiner Flughöhe sein würde, muß aber andererseits wieder kleiner gewählt werden, je größer die MACHsche Zahl ist. Im wesentlichen dürfte er aber im Bereiche

$$c_a = 0{,}30 \text{ bis } 0{,}60$$

zu wählen sein.

Die zugehörigen Profile der Schraubenflügel sollen nach den Flügelenden zu schlanker werden und weniger gewölbt sein. Hat man sich auf Grund der Polaren für ein Profil auf dem mittleren Radius $r = 0{,}7\ R$ entschieden, so ist auch der Anstellwinkel seiner Druckseite α_d bzw. seiner Nullauftriebsachse α_∞ durch den Auftriebsbeiwert festgelegt.

Das mittlere Steigungsverhältnis der zu entwerfenden Schraube ist dann

$$\frac{H_d}{D} = 0{,}7\,\pi\ \mathrm{tg}\left(\alpha_d + \mathrm{arc\,tg}\frac{v}{0{,}7\,u_a}\right) \tag{35, 1}$$

bzw.

$$\frac{H^*}{D} = 0{,}7\,\pi\ \mathrm{tg}\left(\alpha_\infty + \mathrm{arc\,tg}\frac{v}{0{,}7\,u_a}\right), \tag{35, 2}$$

also der aerodynamische Steigungsgrad oder Nullschubfortschrittsgrad

$$\lambda^* = \frac{H^*}{\pi D} = 0{,}7\ \mathrm{tg}\left(\alpha_\infty + \mathrm{arc\,tg}\frac{v}{0{,}7\,u_a}\right). \tag{35, 3}$$

Die Schubziffer $k_s = \dfrac{S}{\frac{\varrho}{2}\,v_0^2\,\frac{\pi D^2}{4}}$ kann man auf Grund des geschätzten Wirkungsgrades η abschätzen zu

$$k_s = \frac{\eta}{\lambda_0}\cdot k_d\,.$$

Daraus ergibt sich, entsprechend noch im Abschnitt 36b folgender Überlegungen, das mittlere Blattbreitenverhältnis (36, 10)

$$\frac{\mathfrak{z}\cdot\bar{t}}{2\pi R} = \frac{1}{c_a}\cdot\frac{k_s}{F(\lambda_p)} = \frac{k_s}{c_a}\,\frac{\sqrt{2}}{\nu\sqrt{1+2\,\lambda_p^2}}\,. \tag{35, 4}$$

Hierbei ist ν nach Abb. 260 von der Flügelzahl $\mathfrak{z}$, welche gewählt werden muß, abhängig.

Wählt man nunmehr noch einen Blattbreitenverlauf $t(x)/t(0{,}7)$, wie es für die zu entwerfende Schraube als zweckmäßig angesehen werden kann, so findet man

$$\frac{\bar{t}}{t(0{,}7)} = \frac{1}{1-x_i^3}\int_{x_i^3}^{1}\frac{t(x)}{t(0{,}7)}\,d\,x^3\,, \tag{35, 5}$$

und damit auch die der gewählten Flügelzahl $\mathfrak{z}$ entsprechende Blattbreite $t(0{,}7)$ auf $0{,}7\ R$ und entsprechend dem gewählten Blattbreitenverlauf auch die Blattbreite in jedem Radius selbst.

Auf Grund der sich ergebenden Blattbreite kann man nun entscheiden, ob die gewählte Flügelzahl $\mathfrak{z}$ z. B. hinsichtlich Gewicht und Trägheitsmoment der Schraube zweckmäßig ist oder nicht. Letzterenfalls hat man die Flügelzahl noch zu ändern.

Dieses an sich zwar roh erscheinende Entwurfsverfahren liefert doch meist praktisch recht brauchbare Ergebnisse. Gibt man sich hiermit aber nicht zufrieden, so kann man auch eine genauere und theoretisch besser begründete Schraubenberechnung durchführen auf Grund der Ergebnisse der Theorie der endlichvielflügeligen Schraube.

Trotzdem ist es immer zweckmäßig, vor einem genaueren Entwurf auch die überschlägige soeben beschriebene Berechnung durchzuführen.

b) Genauerer Luftschraubenentwurf auf Grundlage der Theorie. Bei einem genaueren Entwurf empfiehlt es sich zunächst, auf die sog. Bestschraube hinzuarbeiten. Es dürfte aber auch dabei genügen zunächst konstante aerodynamische Steigung und jene Blattbreitenverteilung zugrunde zu legen, die sich bei Reibungsfreiheit und kleiner Belastung ergibt. Für diese ist nach Gl. (34, 40), (34, 29)

$$k_{d_{\varepsilon=0}} = \frac{k_d}{1 + \varepsilon \dfrac{\eta_{id}}{\lambda_0} \dfrac{\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{41}(\lambda_m) - 3(1-\eta_{id})\left(\dfrac{\lambda_0}{\eta_{id}}\right)^2 \mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{42}(\lambda_m)}{\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{31}(\lambda^*)}}, \qquad (35, 6)$$

$$k_{d_{\varepsilon=0}} = \frac{4\lambda^{*3}}{1 + \dfrac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda^*}\right) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda^*} + \frac{1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda^*}}{1 + \dfrac{2\lambda^*}{\pi\chi_0}}\right) \cdot 2\,\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{31}(\lambda^*)\,. \qquad (35, 7)$$

Letztere Gleichung gestattet durch Auflösung die Berechnung von $\frac{\pi}{2}\chi_0 = \frac{\mathfrak{z}\, t_0}{4R}$ aus

$$\frac{1}{1 + \dfrac{4R}{\mathfrak{z}\, t_0}\lambda^*} = \frac{1}{2\left(\dfrac{\lambda^*}{\lambda_0} - 1\right)} \left\{\sqrt{1 + \frac{k_{d_{\varepsilon=0}}}{\lambda^* \lambda_0^2 \cdot 2\,\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{31}(\lambda^*)}} - 1\right\}. \qquad (35, 8)$$

Aus Abb. 251, 252, 253 ist der Blattbreitenverlauf t_{red}/t_0 zu entnehmen. k_d, λ_0 sind gegeben, ε, λ^* nach vorstehendem bestimmt worden. Um nun $k_{d_{\varepsilon=0}}$ aus dem gegebenen k_d berechnen zu können, ist an sich die Kenntnis von η_{id} und $\lambda_m = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\eta_{id}}}$ nötig. In erster Näherung darf man aber hierbei η_{id} so annehmen, als wäre $k_{d_{\varepsilon=0}} = k_d$, woraus sich dann η_{id} durch Befriedigung der Gleichung (34, 7)

$$k_{d_{\varepsilon=0}} = \frac{\lambda^3}{\eta_{id}} c_s = 4\lambda^3 \frac{1-\eta_{id}}{\eta_{id}^3} \left\{2\,\mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{52}\left(\frac{\lambda_0}{\eta_{id}}\right) + 2\,\eta_{id}\left(\frac{\lambda_0}{\eta_{id}}\right)^2 \mathfrak{K}^{(\mathfrak{z})}_{32}\left(\frac{\lambda_0}{\eta_{id}}\right)\right\} \qquad (35, 9)$$

ergibt. Nunmehr können $k_{d_{\varepsilon=0}}$ und η_{id} durch Iteration der Gl. 35, 6 und Gl. 35, 9 noch genauer bestimmt werden, wenn dies für nötig gehalten wird. Damit ist dann der Blattbreitenverlauf der zu entwerfenden Schraube auf Grund der Abb. 251, 252, 253 bestimmt.

Vorausgesetzt ist dabei aber, daß die Belastung bzw. der Schlupf $\lambda^* - \lambda_0$ nicht zu groß sind. Ist dies nicht der Fall, so können etwaige nötige Korrekturen durch Vergleich der Gl. 16, 12 mit Gl. 16, 5 bzw. mit den Abb. 167 bis 171 durchgeführt werden.

Schubziffer und Wirkungsgrad gehen aus den Gl. 34, 37 bzw. 34, 41 hervor.

Eine praktische Schwierigkeit ergibt sich in der Bestimmung der wirklichen Blattbreite t aus der berechneten t_{red}. Es ist

$$t = t_{\text{red}} \cdot \frac{2 \pi \alpha_\infty}{c_a} = t_{\text{red}} \frac{2 \pi}{d c_a / d \alpha} . \qquad (35, 10)$$

Für kleine Spitzengeschwindigkeiten, d. h. für kleinere MACHsche Zahlen, dürfte nach der PRANDTLschen Regel

$$\frac{d c_a}{d \alpha} (\mathfrak{M}) = \frac{d c_a}{d \alpha} (\mathfrak{M} = 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{M}^2}} \qquad (35, 11)$$

gesetzt werden, also mit zunehmendem $\mathfrak{M}$ größer werden. Hierbei darf die örtliche MACHsche Zahl $\mathfrak{M} = \frac{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 r^2}}{w_s}$ geschrieben werden. Die Gl. (35, 11) gilt aber nur bis etwa $\mathfrak{M} = 0{,}75$. Für größere MACHsche Zahlen tritt dann wieder eine rasche Verminderung von $d c_a / d \alpha$ auf.

c) Nachrechnen des Verhaltens der entworfenen Bestluftschraube bei anderen Betriebszuständen. Man kann auch das Verhalten der entworfenen Luftschraube in anderen Betriebszuständen nachrechnen, solange die Strömung nicht abreißt. Es ist aber zweckmäßig hierbei eine vereinfachende Annahme zu machen, nämlich die, daß $d c_a / d \alpha$ und damit χ_0 sich nicht ändert. Man kann dann zunächst aus λ^*, $\frac{\pi}{2} \chi_0 = \frac{3 t_0}{4 R}$ das Verhalten bei Reibungsfreiheit bestimmen, wenn man (29, 40) zuvor

$$\lambda^* \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3 t_0}{4 R}} \frac{\lambda^*}{1 + \lambda^{*2}}}$$

berechnet und hiermit für das gegebene λ_0 das gleichwertige Λ nach Abb. 152 bis 156 bestimmt. Nunmehr berechnet man (Abb. 257)

$$\frac{\gamma_{31}^{(3)}}{\gamma'_{31}} = \frac{k_s^{(3)}}{k'_s} = \frac{k_d^{(3)}}{k'_d}$$

und erhält damit die ideelle Standschubziffer bzw. Standleistungsziffer nach Gl. (34, 13), (29, 36), (16, 10) oder (16, 4) bzw. (16, 12) oder (16, 5) oder aus den Abb. 162 bis 166 bzw. Abb. 167 bis 171.

Nunmehr kann man aus den Abb. 157 bis 161 bzw. Abb. 162 bis 166 bzw. Abb. 167 bis 171 nach entsprechender Interpolation auch den ganzen Verlauf von η_{id}, $k_{s\,id}$, $k_{d\,id}$ über beliebige λ_0 entnehmen.

Zur Berücksichtigung der Reibung ist nun zweckmäßig eine weitere Annahme zu machen, etwa die, daß das Gleitverhältnis ε so der Profilpolaren entnommen werden darf, als würde sich der Auftriebsbeiwert c_a der Schubziffer verhältig ändern. Letztere Annahme gibt auch eine ungefähre Beschränkung des Gültigkeitsbereiches unserer Annahme, da c_a vor dem Abreißen der Strömung sein Maximum erreicht.

Damit kann dann nach Gl. 34, 37 bzw. Gl. 34, 38 bzw. Gl. 34, 41 die Verminderung der Schubziffer, die Vermehrung der Leistungsziffer und die Verminderung des Wirkungsgrades berechnet werden.

Wenn auch eine solche Rechnung theoretisch nicht unbefriedigt läßt, so werden doch die Annahmen unter Umständen als recht einschränkend empfunden.

d) Berechnung einer Luftschraube vorgeschriebener Leistungsverteilung. Wir wollen uns nun von der Einschränkung der durch die Forderung der Bestschraube vorgeschriebenen Leistungsverteilung und der vorgeschriebenen konstanten Steigungsverteilung freimachen. Dann gelangen wir zu einem Rechenverfahren, welches diese Fälle zwar einschließt, aber so viel allgemeiner ist, daß auch wichtige Nebenumstände besser berücksichtigt werden können und daß es auch die Nachrechnung des Verhaltens einer beliebig vorgegebenen Luftschraube gestattet.

Vorgeschrieben sind nunmehr nur k_d und λ_0. ε und λ^* seien aber geschätzt. Aus Gl. 35, 6 und Gl. 35, 7 kann dann $k_{d\varepsilon=0}$ und $\eta_{i\,d}$ und damit $k_{s_{i\,d}}$ gefunden werden. Diesem $k_{s_{i\,d}}$ entsprechend, wollen wir zunächst eine Schraube bei Reibungsfreiheit entwerfen. Der Rechnungsgang und seine Grundlagen sind schon im Abschnitt 31 b angedeutet worden.

Wir wählen zunächst eine Zirkulationsverteilung, wie wir sie den Umständen nach für angebracht halten, aber ohne gleich ihren Maßstab festzulegen. In jedem Schraubenelement ist dann die Schubziffer (12, 23) mit

$$\frac{v_u}{u} = \frac{\Gamma}{2\pi\omega r^2} = \frac{\Gamma/\Gamma_{\max}}{x^2}\cdot\frac{\Gamma_{\max}}{n R^2}$$

$$k'^{(3)}_{s_{i\,d}} = 2\,\frac{v_u}{u}\left(1-\frac{v_u}{2u}\right) = 2\,\frac{\Gamma}{n r^2}\left(1-\frac{\Gamma}{2 n r^2}\right), \qquad (35, 12)$$

so daß für die Schubziffer der zu entwerfenden Gesamtschraube gilt (28, 2)

$$k_{s_{i\,d}} = \frac{1}{2}\int_0^1 k'_s\,d x^4 = \int_0^1 \frac{v_u}{u}\,d x^4 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{v_u}{u}\right)^2 d x^4$$

$$= \frac{2\Gamma_{\max}}{n R^2}\int_0^1 \frac{\Gamma}{\Gamma_{\max}}\,d x^2 - \frac{2\Gamma^2_{\max}}{n^2 R^4}\int_0^1 \frac{\Gamma}{\Gamma_{\max}}\,d\ln x\,. \qquad (35, 13)$$

Nunmehr kann auch der Maßstab, d. h. $\Gamma_{\max}$, der angenommenen Zirkulationsverteilung bestimmt werden.

Wir haben nun zunächst eine unendlichvielflügelige Schraube zu berechnen, bei der

$$k'^{(\infty)}_{s_{i\,d}} = k'^{(\mathfrak{z})}_{s_{i\,d}} \cdot \frac{1}{\varkappa^{(\mathfrak{z})}} \qquad (35,\,14)$$

ist. Hierbei ist $\varkappa^{(\mathfrak{z})}$ so zu wählen, wie es sich aus dem wirksamen Fortschrittsgrad λ_∞ an den Flügelenden ergibt.

Hierbei kann auch, wenigstens wie es sich näherungsweise aus der unendlichvielflügeligen Schraube ergäbe, die Änderung der Durchflußgeschwindigkeit durch die Schraubenkreisebene berücksichtigt werden, welche von dem Unterdruck infolge Strahldrehung herrührt. Nach Gl. (12, 50) ist

$$\frac{d v_0}{v_a} \quad \frac{k'^{(\infty)}_{s_{i\,d}}}{4} \quad \frac{d r}{r},$$

so daß an Stelle der Zuflußgeschwindigkeit v_0 zu treten hat,

$$v_{0_{\text{korrig}}} = v_0 + \tfrac{1}{4}\int\limits_1^x k'^{(\infty)}_{s_{i\,d}}\, d \ln \frac{1}{x} \qquad (35,\,15)$$

bzw. an Stelle der Durchflußgeschwindigkeit

$$v_{m_{\text{korrig}}} = v_m + \tfrac{1}{4}\int\limits^x k'^{(\infty)}_{s_{i\,d}}\, d \ln \frac{1}{x}\,. \qquad (35,\,16)$$

An der Flügelspitze bleibt also die Durchflußgeschwindigkeit ungeändert. Nun ist (12, 14)

$$v_m = v_0\left(1 + \frac{v_a}{2\,v_0}\right) = v_0\,\frac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{k'^{(\infty)}_{s_{i\,d}}}{\lambda_0'^{\,2}}}}{}$$

so daß die Geschwindigkeitsdreiecke für jeden Radius konstruiert werden können.

Wählt man nun die Blattbreite $t^{(\infty)} = t^{(\mathfrak{z})} \cdot \frac{1}{\varkappa^{(\mathfrak{z})}}$ der entsprechenden unendlichvielflügeligen Schraube, so erhält man die Anstellwinkel α_∞ und umgekehrt aus (12, 37)

$$\frac{\mathfrak{z}\, t^{(\infty)}}{2\pi r} \quad \frac{2 v_u}{w_\infty} \qquad c_a = 2\pi k\, \alpha_\infty\,, \quad k = \frac{d c_a/d\alpha}{2\pi}\Big) \qquad (35,\,17)$$

Das Verhalten der Schraubenelemente bei anderen Betriebszuständen kann dann unter Annahme eines konstanten $d c_a/d\alpha$ leicht mit Hilfe der Ergebnisse des Abschnittes 16 berechnet werden.

Das Verhalten der berechneten oder einer beliebig gegebenen Gesamtschraube kann für beliebige Betriebszustände durch Integration (28, 2), (28, 3) bestimmt werden. Hierbei ist aber zu beachten, daß

$$k'^{(\mathfrak{z})}_s = \varkappa^{(\mathfrak{z})} k'^{(\infty)}_s \quad \text{bzw.} \quad k'^{(\mathfrak{z})}_d = \varkappa^{(\mathfrak{z})} k'^{(\infty)}_d$$

ist.

Ob man dabei die Wirkung der Reibung nach Gl. (16, 16) bzw. Gl. (16, 17) an jedem Element berücksichtigt oder überschlägig nach Gl. (34, 37) bzw. Gl. (34, 38) an der Gesamtschraube, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

e) **Beurteilung der Leistungsfähigkeit des beschriebenen Berechnungsverfahrens.** Obwohl das beschriebene genauere Berechnungsverfahren im allgemeinen recht brauchbare Ergebnisse liefert, so sind doch die Voraussetzungen über das Verhalten eines Tragflügelprofils und der Übertragbarkeit auf die Schraube praktisch nicht ganz befriedigend, insbesondere, da nichtlineare Abhängigkeit zwischen c_a und α_∞ sich nur schwer berücksichtigen läßt. Auch der Rechenaufwand ist ziemlich erheblich.

Daher ist es erfreulich, daß ein Ausbau des überschlägigen Rechenverfahrens durchaus möglich ist, das bei verhältnismäßig geringem Rechenaufwand auch das nichtlineare Verhalten des Auftriebsbeiwertes und beliebiges Verhalten des Widerstandsbeiwertes zu berücksichtigen erlaubt und bei dem insbesondere statt von den Versuchsergebnissen von Tragflügelprofilen auch sehr leicht von den Versuchsergebnissen von Luftschrauben selbst ausgegangen werden kann. Dieses Verfahren soll nunmehr dargelegt werden.

36. Luftschraubenberechnung mit Hilfe der gleichwertigen Profilpolaren.

a) **Der Begriff der gleichwertigen Profilpolaren.** Bei der Untersuchung der Elementarschraube hatten wir gefunden, daß es möglich ist, aus der Schubziffer, der Leistungsziffer, dem Blattbreitenverhältnis und dem Fortschrittsgrad der Elementarschraube zunächst den induzierten Anstellwinkel und den Gleitwinkel und damit dann Auftriebsbeiwert und Widerstandsbeiwert des Profils der Elementarschraube zu berechnen. Wenn es nun möglich ist, zu einer Luftschraube eine bezüglich des Verhaltens ihrer Beiwerte gleichwertige Elementarschraube zu bestimmen, so kann man auch für die Gesamtschraube zum Begriff einer Profilpolaren gelangen, und wenn sich dann noch ergibt, daß bei Schrauben mit gleichen oder wenigstens ähnlichen Profilen und Blattbreitenverteilungen, die aber verschiedene Blattbreitenverhältnisse, Flügelzahlen und Steigungen bzw. Steigungsverteilungen aufweisen, die Polaren nicht wesentlich voneinander abweichen, so darf man von zu diesen Luftschrauben gleichwertigen Profilpolaren sprechen. Wenn dies alles aber zutrifft, dann ist damit praktisch eine überaus einfache Möglichkeit zur Berechnung einer Schraube mit vorgegebener Drehzahl, Durchmesser, Flügelzahl und Leistung und zur Nachrechnung ihres Verhaltens bei allen Betriebszuständen gegeben. Die Grundlagen einer solchen Berechnung sind

dann zwar mehr empirischer Natur und die Rechnung deshalb vom Standpunkt der Theorie weniger gut begründet als die genaueren, auf Grund der Schraubentheorie möglichen Rechnungsverfahren. Beim praktischen Entwurf wird man aber diesem mehr empirischen Verfahren den Vorzug geben, zumal die Voraussetzungen, auf denen es fußt, durchaus zutreffen, wie die Nachprüfung ergeben hat.

b) Der für das Verhalten der Gesamtschraube maßgebliche Flügelschnitt. α) $\tilde{\eta}$, $\tilde{c}_s$, $\tilde{k}_s$, $\tilde{k}_d$, $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{\lambda}^*$ der Ersatzelementarschraube. Will man das Verhalten einer ganzen Luftschraube durch das Verhalten einer Elementarschraube festlegen, so wird man von dieser Elementarschraube zweckmäßig verlangen, daß ihr Wirkungsgrad $\tilde{\eta}$ der gleiche ist wie der der Gesamtschraube η. Es muß also sein

$$\tilde{\eta} = \tilde{\lambda}_0 \frac{\tilde{k}_s}{\tilde{k}_d} = \lambda_0 \frac{k_s}{k_d} = \eta \,. \tag{36, 1}$$

Hierbei bedeuten die rund überstrichenen Werte die Kenngrößen der Elementarschraube, die nicht überstrichenen die Kenngrößen der Gesamtschraube. Die Werte der einzelnen Elemente der Gesamtschraube mögen durch Striche gekennzeichnet werden. Gerade überstrichene sollen Mittelwertbildung anzeigen.

Für den Schubbelastungsgrad gilt mit $x = r/R$ (28, 1)

$$c_s = 2\int c_s' x\, dx = \int c_s'\, dx^2 \,.$$

Man ersetzt nun zweckmäßig c_s' durch seinen Mittelwert $\bar{c}_s$ über x^2. Dann ergibt sich

$$\bar{c}_s = c_s \,. \tag{36, 2}$$

Der mittlere Schubbelastungsgrad wird damit gleich dem Schubbelastungsgrad der Gesamtschraube.

Für die Schubziffer gilt (28, 2)

$$k_s = 2\int_0^1 k_s' x^3\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 k_s'\, dx^4 .$$

Man ersetzt k_s' nun zweckmäßig durch seinen Mittelwert $\bar{k}_s$ über x^4. Dann ergibt sich

$$\bar{k}_s = 2\, k_s \,. \tag{36, 3}$$

Die mittlere Schubziffer wird damit gleich dem Doppelten der Schubziffer der Gesamtschraube.

Da aber

$$k_s = \lambda_0^2\, c_s \,, \qquad \bar{k}_s = \bar{\lambda}_0^2\, \bar{c}_s \,,$$

so muß dann gelten

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \sqrt{2} = \tilde{\lambda} \,. \tag{36, 4}$$

Der mittlere Fortschrittsgrad $\bar{\lambda}$, den wir gleich dem Fortschrittsgrad $\tilde{\lambda}$ der Elementarschraube setzen wollen, wird damit also das $\sqrt{2}$fache des Fortschrittsgrades der Gesamtschraube und damit bei gleicher Fortschrittsgeschwindigkeit und Drehzahl der Radius der Elementarschraube

$$\tilde{r} = \tilde{x} R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, R \sim 0{,}7\, R\,, \qquad (36,5)$$

also gleich dem $\sqrt{\frac{1}{2}}$-fachen des Radius der Gesamtschraube.

Da nun noch wegen $\tilde{\eta} = \bar{\eta} = \eta$

$$\frac{\bar{\lambda}_0 \bar{k}_s}{\bar{k}_d} = \frac{\lambda_0 k_s}{k_d}$$

sein muß, ergibt sich

$$\bar{k}_d = 2\sqrt{2}\, k_d\,. \qquad (36,6)$$

Diese $\bar{k}_s$ und $\bar{k}_d$ liefern mit $\bar{\lambda}_0 = \sqrt{2}\,\lambda_0$ tatsächlich das η der Gesamtschraube. Das gleiche Vielfache $1/\xi$ würde dies auch tun; also dürfen wir setzen

$$\tilde{k}_s = \frac{1}{\xi}\bar{k}_s = \frac{2}{\xi} k_s\,, \qquad \tilde{k}_d = \frac{1}{\xi}\bar{k}_d = \frac{2\sqrt{2}}{\xi} k_d\,. \qquad (36,7)$$

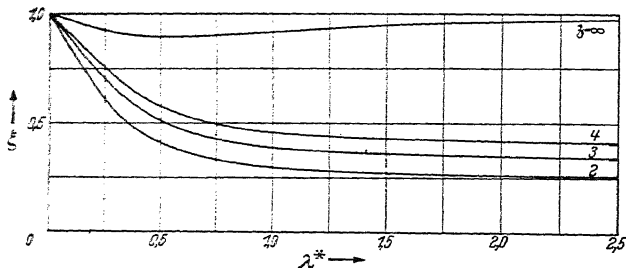



Abb. 258. Einflußgröße ξ zur Berücksichtigung der endlichen Flügelzahl.

Wir können daher noch verlangen, daß, z. B. im Falle Reibungsfreiheit, kleine Belastung ($\lambda_0 \to \lambda^*$) und günstigste Schubverteilung, die Elementarschraube den gleichen Wirkungsgrad liefert wie die Gesamtschraube. Dann wird, wenn $\mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})}$ die dimensionslose Zirkulationsverteilung in der Nähe des Nullschubfortschrittsgrades bedeutet,

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\mathfrak{G}^{(\infty)}(x=\sqrt{\frac{1}{2}})}{\int \mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} d\,x^2} = \frac{\mathfrak{G}^{(\infty)}(x=\sqrt{\frac{1}{2}})}{\int \mathfrak{G}^{(\infty)} d\,x^2} \cdot \frac{\int \mathfrak{G}^{(\infty)} d\,x^2}{\int \mathfrak{G}^{(\mathfrak{z})} d\,x^2} = \frac{1}{1+2\lambda^{*2}} \cdot \frac{1}{1+\lambda^{*2}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda^{*2}}\right)} \cdot \frac{1}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}}\,. \qquad (36,8)$$

Diese Größe ξ ist in Abb. 258 dargestellt in Abhängigkeit von λ^* für die Flügelzahlen $\mathfrak{z} = 2, 3, 4$.

Hiermit ist eine eindeutige Zuordnung einer Elementarschraube zu einer Luftschraube gegeben. Diese Zuordnung ist auch einfach. Dennoch entbehren die Annahmen, welche zu dieser Festlegung führten,

nicht einiger Willkürlichkeit, welche erst dadurch gerechtfertigt erscheint, daß eine größere Anzahl von Schrauben verschiedener Steigung und Blattbreite bei ähnlichen Profilschnitten auf diese Weise wirklich gleiche Profilpolaren lieferte. Zu ihrer Berechnung muß nun aber noch die Blattbreite der gleichwertigen Elementarschraube festgelegt werden.

β) Die Blattbreite der Ersatzelementarschraube. Zur Festlegung der Blattbreite der Elementarschraube kann man von der für die Schraubenelemente gefundenen Beziehung (13, 59)

$$\chi' c_a' = \frac{\cos^2 \varepsilon}{(1+\lambda_0'^2)\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_0'}{\eta_i'}\right)^2 \cdot \cos^2(\alpha_i+\varepsilon)}} k_s' \left(1+\frac{\eta'}{\eta_{id}'}\left(\frac{k_d'}{k_s'}\right)^2\right.$$

ausgehen. Wir fordern nun, daß ε und α_i und die Belastung keinen Einfluß auf diese Blattbreite haben. Dann darf $\varepsilon \to 0$ und damit $\eta/\eta_{id} = 1$, ferner $\alpha_i \to 0$ gesetzt werden; damit wird $\eta_{id}' \to 1$, $k_d'/k_s' = \lambda_0'/\eta' \to \lambda_0'$, also für den Fall verschwindender Reibung und Belastung ($\lambda_0' \to \lambda'^*$)

$$\chi' c_a' \sqrt{1+\lambda'^{*2}} = k_s'. \tag{36, 9}$$

Für die Ersatzelementarschraube ist also

$$\tilde{k}_s = \frac{2}{\xi} k_s = \tilde{\chi}\tilde{c}_a \sqrt{1+\frac{\lambda^{*2}}{\tilde{x}^2}} = \frac{4}{\xi}\int k_s' x^3 dx = \frac{4}{\xi}\int \chi' c_a' \sqrt{1+\frac{\lambda^{*2}}{x^2}}\, x^3 dx,$$

oder mit

$$\chi' = \frac{\mathfrak{z} t'}{2\pi r} = \frac{\mathfrak{z} t'}{2\pi R x},$$

$$= \frac{4}{\xi}\int t' c_a' \sqrt{x^2+\lambda^{*2}}\, x\, dx.$$

Ersetzt man $t' c_a'$ durch seinen Mittelwert $\overline{t c}_a$, so wird mit $\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\tilde{t}\tilde{c}_a = \overline{t c}_a \frac{\tilde{x}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^{*2}}{\tilde{x}^2}}} \cdot \frac{2}{\xi}\int \sqrt{x^2+\lambda^{*2}}\, dx^2 = \frac{\overline{t c}_a}{\xi}\, \frac{4}{3\sqrt{2}}\, \frac{(1+\lambda^{*2})^{3/2}-\lambda^{*3}}{(1+2\lambda^{*2})^{1/2}} \tag{36, 10}$$

Der von λ^* abhängige Quotient ist nahezu 1 und von λ^* im Bereiche üblicher λ^* nur ganz wenig abhängig. Wir setzen nun den Auftriebsbeiwert der Ersatzelementarschraube $\tilde{c}_a$ gleich dem mittleren $\bar{c}_a$ der Gesamtschraube und finden, wenn wir zunächst den Einfluß von λ^* vernachlässigen, zur Bestimmung von $\tilde{t}$

$$\tilde{t} = \tilde{x}\frac{2}{\xi}\int t\, x\, dx^2 = \frac{4}{3\sqrt{2}}\,\frac{1}{\xi}\int t\, dx^3 \tag{36, 11}$$

und mit besserer Berücksichtigung des Einflusses von λ^* mit $\bar{t} = \int t\,d x^3$

$$\frac{\tilde{t}}{R} = \frac{4}{3\sqrt{2}\,\xi}\,\frac{(1+\lambda^{*2})^{3/2}-\lambda^{*3}}{(1+2\lambda^{*2})^{1/2}}\cdot\frac{\bar{t}}{R} = \frac{\nu}{\xi}\,\frac{\bar{t}}{t(r=\sqrt{\tfrac{1}{2}}R)}\cdot\frac{t(r=\sqrt{\tfrac{1}{2}}R)}{R}. \quad (36,12)$$

Die Bestimmung von $\bar{t}/t(r=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)$ ist z. B. durch Auftragen von $t/t(r=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)$ über x^3 möglich, wie Abb. 259 zeigt, und braucht für gleiche oder affine Blattbreitenverteilungen nur einmal durchgeführt zu werden. Der Faktor

$$\nu = \frac{4}{3\sqrt{2}}\,\frac{(1+\lambda^{*2})^{3/2}-\lambda^{*3}}{(1+2\lambda^{*2})^{1/2}} \quad (36,13)$$

weicht nur wenig von 1 ab, wie Abb. 260 zeigt.

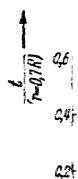



Abb. 25 Bestimmung der mittleren Blattbreite.

Sind $\bar{t}/R$, λ_0, λ^*, k_s, k_d, $\mathfrak{z}$ einer Luftschraube gegeben, so erhält man das nebenstehende durch Beispiel erläuterte Rechenschema zur Bestimmung der Größen $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{\lambda}^*$, $\tilde{\chi}$, $\tilde{k}_s$, $\tilde{k}_d$ der Ersatzelementarschraube und kann nunmehr die zu der betreffenden Schraube gleichwertige Profilpolare berechnen. In Abb. 261 und 262 ist das für einige Schrauben verschiedener konstanter Steigung und Flügelzahl erhaltene Ergebnis dargestellt. Diese Ergebnisse stimmen recht gut überein mit dem $c_a(c_w)$ und $c_a(\alpha_\infty)$-Verhalten eines Tragflügelprofils in ebener Strömung. Dies trifft solange zu, wie die Schraubenflügel nicht allzu stark geschränkt sind. Dieser Einfluß ist in Abb. 263 dargestellt. In Abb. 264 und 265 ist der Einfluß hoher Umfangsgeschwindigkeit auf die gleichwertigen Profilpolaren wiedergegeben. Es dürfte sich empfehlen, künftig Schraubenversuche mehr als bisher auch durch Bestimmung der gleichwertigen Profilpolaren auszuwerten, da damit ein wertvolles Hilfsmittel zu einer brauchbaren und raschen Schraubenberechnung gegeben ist und man hoffen kann, mit Hilfe der Polaren auch für nicht untersuchte Blattbreitenverhältnisse und Steigungen vorausrechnen zu können.

Abb. 260. Korrekturfaktor ν zur Berechnung der Blattbreite der gleichwertigen Elementarschraube.

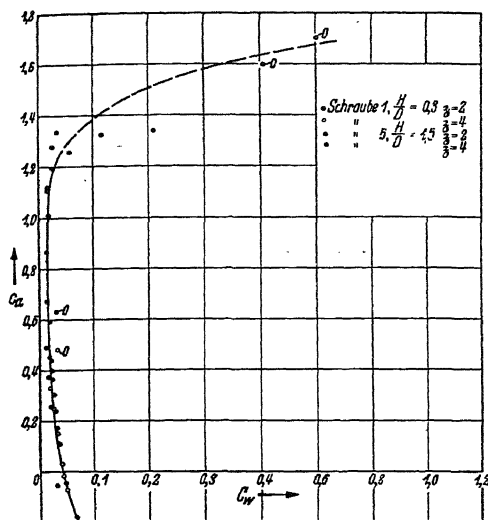



Abb. 261. $c_a(c_w)$ für einige Schrauben konstanter Steigung. (Nach Ergebnissen *ARC*, Rep. Mem. Nr. 829.)

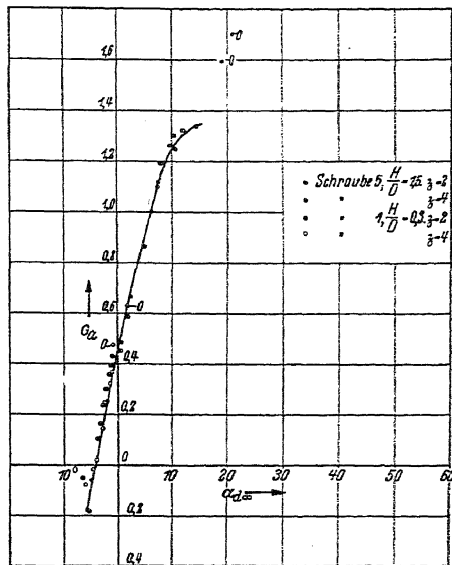



Abb. 262. $c_a(\alpha_\infty)$ für einige Schrauben konstanter Steigung. (Nach Ergebnissen *ARC*, Rep. Mem. Nr. 829.)

Zahlentafel 10. Rechenschema und Beispiel zur Bestimmung der zu einer Schraube gleichwertigen Elementarschraube.

Gegeben: $\mathfrak{z}$, $\bar{t}/R$, λ_0, λ^*, k_s, k_d; gesucht: $\tilde{\chi}$, $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{\lambda}^*$, $\tilde{k}_s$, $\tilde{k}_d$.

	①	$\frac{\bar{t}}{R} = \int_0^1 \frac{t}{R}\, d x^3$	$= 0{,}0758,$
	②	$\mathfrak{z}$	$= 4,$
	③	λ_0	$= 0{,}707,$
	④	λ^*	$= 0{,}895,$
	⑤	k_s	$= 0{,}0206,$
	⑥	k_d	$= 0{,}0167,$
aus ②, ④ nach Abb. 258	⑦	ξ	$= 0{,}495,$
aus ④ nach Abb. 260	⑧	ν	$= 0{,}989,$
⑧ · ①		$\frac{\tilde{t}}{R} = \frac{\nu}{\xi} \cdot \frac{\bar{t}}{R}$	$= 0{,}150,$
$\frac{\smile}{\pi \cdot \sqrt{2}}$ = ⑩		$\tilde{\chi} = \frac{\mathfrak{z}}{\pi\sqrt{2}} \frac{\tilde{t}}{R}$	$= 0{,}135,$
$\sqrt{2}$ · ③ = ⑪		$\tilde{\lambda}_0 = \sqrt{2} \cdot \lambda_0$	$= 1{,}000,$
$\sqrt{2}$ · ④ = ⑫		$\tilde{\lambda}^* = \sqrt{2}\, \lambda^*$	$= 1{,}265,$
2 · ⑤ = ⑬		$\tilde{k}_s = 2 \cdot k_s$	$= 0{,}0824,$
$2\sqrt{2}$ · ⑥ = ⑭		$\tilde{k}_d = 2\sqrt{2}\, k_d$	$= 0{,}0946.$

Abb. 263: Einfluß der Schränkung auf die zu einer Luftschraube gleichwertigen Profilpolare.

c) Berechnung einer Luftschraube gegebener Drehzahl, Leistung, Fluggeschwindigkeit, Flughöhe und Durchmessers. α) Bestimmung des Wirkungsgrades, des Schubs und des Steigungswinkels. Aus Drehzahl n, Durchmesser D und Fluggeschwindigkeit v_0 erhält man den Fortschrittsgrad einer gesuchten Schraube

$$\lambda_0 = \frac{v}{u} = \frac{v}{\pi n D}.$$

Aus Drehzahl n, Leistung N, Flughöhe bzw. Luftdichte ϱ und Durchmesser D erhält man die Leistungsziffer einer gesuchten Schraube

$$k_d = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u^3 \pi R^2}$$

Für die Ersatzelementarschraube gilt dann

$$\tilde{\lambda}_0 = \sqrt{2}\,\lambda_0 = 1{,}41\,\lambda_0,$$

$$\tilde{k}_d = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\xi} k_d = \frac{2{,}82}{\xi} k_d.$$

Um ξ entsprechend Abb. 258 bestimmen zu können, ist eine Abschätzung von $\tilde{\lambda}^*$ nötig. In erster Näherung genügt es, hierzu $\tilde{\lambda}^* = \mathrm{tg}(\beta_0 + \alpha_\infty)$ zu setzen unter Vernachlässigung von α_i, da dies bezüglich ξ praktisch erlaubt ist. Mit Hilfe der für die durchzuführende Rechnung als bekannt anzusehenden Profilpolaren wählt man nun unter Umständen unter Berücksichtigung auch anderer Betriebszustände der Luftschraube c_a und c_w und damit das Gleitverhältnis ε und den Anstellwinkel α_∞ des Profils.

Zwischen $\tilde{k}_d$, $\tilde{\lambda}_0$, ε, η besteht nun nach der Theorie der Elementarschraube wie unter Verwendung des Impulssatzes bei Zugrundelegung der in Abb. 123 dargestellten Verhältnisse abgeleitet wurde, der Zusammenhang (13, 31)

$$\tilde{k}_d = 4\,\tilde{\lambda}_0^3\,1-\eta\;\frac{1+\frac{\tilde{\lambda}_0^2}{\eta}}{\left(1+\left(\frac{\lambda_0}{\eta}\right)^2\right)^2}\;1-\varepsilon\frac{\eta}{\tilde{\lambda}_0}\Big)\Big(1-\varepsilon\frac{\eta}{\tilde{\lambda}_0}\;\frac{1+\frac{\tilde{\lambda}_0^2}{\eta}}{1-\eta}$$

Abb. 264. Profil C 6.

Abb. 265. Profil C 10.

Abb. 264 und 265. Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit auf die zu einer Luftschraube gleichwertigen Profilpolare bei verschiedenem Dickenverhältnis der Flügelprofile.

Der erste Faktor $4\tilde{\lambda}_0^3 \frac{1-\eta}{\eta^3}$ gibt jenes $\tilde{k}_d$, welches sich bei gegebenen $\tilde{\lambda}_0$ und η erreichen ließe, wenn nur axiale Verluste vorhanden wären. Der zweite Faktor $\frac{1+\tilde{\lambda}_0^2/\eta}{\left(1+(\tilde{\lambda}_0/\eta)^2\right)^2}$ gibt die Verminderung von $\tilde{k}_d$ infolge von Drallverlusten aber bei Reibungsfreiheit. Der dritte Faktor

$$1-\varepsilon\frac{\eta}{\tilde{\lambda}_0}\Big/\Big(1-\varepsilon\frac{\eta}{\tilde{\lambda}_0}\Big)\frac{1+\frac{\tilde{\lambda}_0}{\eta}}{1-\eta}$$

gibt die weitere Verminderung von $\tilde{k}_d$ infolge von Reibungsverlusten. Gegeben sind nun $\tilde{k}_d$, $\tilde{\lambda}_0$, ε, gesucht ist η. Die direkte Auflösung nach η ist leider nicht möglich. In den Diagrammen der Abb. 125, 126, 127 ist $\tilde{k}_d(\eta, \tilde{\lambda}_0)$ wiedergegeben für $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}10$. Zu dem gegebenen $\tilde{\lambda}_0$ und $\tilde{k}_d$ erhält man damit $\eta(\varepsilon)$ und durch Interpolation auch das zu dem gegebenen ε gehörige η, also auch den Schraubenschub

$$S = \eta\frac{N}{v}.$$

Ferner ergibt sich hiermit $\eta/\tilde{\lambda}_0 = \tilde{k}_s/\tilde{k}_d$ und damit (13, 26)

$$\eta_{id} = \eta\,\frac{1+\varepsilon\frac{\tilde{\lambda}_0}{\eta}}{1-\varepsilon\frac{\eta}{\tilde{\lambda}_0}}$$

so daß (13,52)
$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{1-\eta_{id}}{\frac{\eta_{id}}{\tilde{\lambda}_0} + \tilde{\lambda}_0} \tag{36, 14}$$
berechnet werden kann.

Damit ist der Steigungswinkel
$$\beta^* = \beta_0 + \alpha_\infty + \alpha_i \tag{36, 15}$$
gefunden und, wenn α_∞ der Anstellwinkel gegen die Nullauftriebsrichtung des Profils ist, auch der $c_a = 0$ entsprechende Fortschrittsgrad
$$\tilde{\lambda}^* = \operatorname{tg}\beta^*$$
der Ersatzelementarschraube. Wenn nötig, kann man hiermit den Wert ξ verbessert bestimmen und die Rechnung mit dem verbesserten Wert ξ erneut durchführen.

β) Bestimmung der Blattbreite. Aus α_i und ε ergibt sich die Hilfsgröße $\psi = \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos(\alpha_i+\varepsilon)}$, aus $\tilde{\lambda}_0$ und η_i die Hilfsgröße $\varphi = \frac{1}{(1+\tilde{\lambda}_0^2)\sqrt{1+(\tilde{\lambda}_0/\tilde{\eta}_i)^2}}$ und damit (13,60) (36,5), (36,7)
$$\frac{\mathfrak{z}\tilde{t}}{2\pi\tilde{r}} = \frac{\varphi\psi}{c_w}\tilde{k}_d\left(1-\frac{\eta}{\eta_{id}}\right), \qquad \frac{\tilde{t}}{R} = \frac{4\pi}{\mathfrak{z}}\frac{\varphi\psi}{\xi c_w}\left(1-\frac{\eta}{\eta_{id}}\right)k_d$$
und mit der Hilfsgröße ν die mittlere Blattbreite (36,10)
$$\frac{\bar{t}}{R} = \frac{4\pi}{\mathfrak{z}}\frac{\varphi\psi}{\nu c_w}\left(1-\frac{\eta}{\eta_{id}}\right)k_d\,.$$
Es ergibt sich also folgendes durch Beispiel erläutertes Rechenschema:

Zahlentafel 11.

Rechenschema und Beispiel zur Bestimmung der Steigung, des Blattbreitenverhältnisses und des Wirkungsgrades einer Schraube mit gegebener Flügelzahl, Fortschrittsgrad und Leistungsziffer.

Gegeben: $\mathfrak{z}$, λ_0, k_d, c_a, c_w, α_∞; gesucht: β^*, $\bar{t}/R$, k_s, η.

①	λ_0	$= \frac{v}{u}$	$= 0{,}707$,
②	k_d	$= \frac{N}{\frac{\varrho}{2}u^3\pi R^2}$	$= 0{,}0167$,
③	$\mathfrak{z}$		$= 4$,
④	c_a		$= 0{,}446$,
⑤	c_w		$= 0{,}021$,
⑥	α_∞		$= 5°25'$,
⑤ : ④ = ⑦	$\operatorname{tg}\varepsilon$		$= 0{,}0478$, ($\varepsilon = 2°45'$)
aus ①, ⑧	$\tilde{\lambda}_0$	$= \sqrt{\frac{1}{2}}\lambda_0$	$= 1{,}000$,
aus ⑧, ⑨	β_0	$= \operatorname{arctg}\tilde{\lambda}_0$	$= 45°$,

⑥ + ⑨ = ⑩	$\beta_0 + \alpha_\infty$	$= 50°25'$,
aus ⑩, ⑪	$\tilde\lambda^* \approx \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_\infty)$	$= 1{,}21$,
aus ⑪, ⑫	ξ	$\approx 0{,}495$,
$\frac{2\sqrt{2}\cdot ②}{⑫}$ = ⑬	$\tilde k_d = \frac{2\sqrt{2}}{\xi} k_d$	$= 0{,}0946$,
aus ⑧, ⑬ nach Abb. 125, 126, 127 ⑭	$\eta\,(\operatorname{tg}\varepsilon = 0)$	$= 0{,}955$,
⑮	$\eta\,(\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}050)$	$= 0{,}866$,
⑯	$\eta\,(\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}100)$	$= 0{,}783$,
für ⑦, aus ⑭, ⑮, ⑯ interpoliert ⑰	$\eta\,(\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}048)$	$= 0{,}870$,
⑰ : ⑧ = ⑱	$\eta/\tilde\lambda_0$	$= 0{,}870$,
aus ⑦, ⑱, ⑲	$\frac{\eta}{\eta_{id}} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\varepsilon \frac{\eta}{\tilde\lambda_0}}{1 + \operatorname{tg}\varepsilon \frac{\tilde\lambda_0}{\eta}}$	$= 0{,}908$,
⑰ : ⑲ = ⑳	η_{id}	$= 0{,}958$,
㉑	$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{1 - \eta_{id}}{\eta_{id}/\tilde\lambda_0 + \tilde\lambda_0}$	$= 0{,}0218$,
㉒	α_i	$= 1°15'$,
㉓	$\beta^* = \beta_0 + \alpha_\infty + \alpha_i$	$= 51°40'$,
㉔	$\tilde\lambda^* = \operatorname{tg}\beta^*$	$= 1{,}265$,
aus ⑦, ㉒ : ㉕	$\psi = \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2(\varepsilon + \alpha_i)}$	$= 1{,}003$,
aus ⑧, ⑳ : ㉖	$\varphi = \frac{1}{(1 + \tilde\lambda_0^2)\sqrt{1 + (\tilde\lambda_0/\eta_i)^2}}$	$= 0{,}329$,
aus ㉓, ㉗	ν	$= 0{,}989$,
aus ②, ③, ⑤, ⑲, ㉕, ㉖, ㉗ ㉘	$\frac{\bar t}{R} = \frac{4\pi}{\mathfrak{z}} \frac{\varphi\psi}{\nu c_w}\left(1 - \frac{\eta}{\eta_{id}}\right) k_d$	$= 0{,}076$,
$\frac{㉗\cdot ㉘}{⑫}$ = ㉙	$\tilde t/R = \frac{\nu}{\xi}\cdot \bar t/R$	$= 0{,}150$.

γ) Konstruktion des gesuchten Luftschraubenblattes. Den Steigungswinkelverlauf des Luftschraubenblattes wählt man so, daß er bei starren Schrauben etwa konstante Steigung und bei Verstellschrauben für die wichtigsten Betriebszustände eine möglichst konstante Steigung über den Radius ergibt. Damit ist dann β^* über den Schraubenradius festgelegt.

Den Blattbreitenverlauf wählt man in Anlehnung an bewährte Schrauben, unter Umständen unter Berücksichtigung geänderter Beanspruchung des Luftschraubenblattes.

Man gibt also
$$\frac{t}{t\,(r = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)}$$
und bestimmt hieraus (Abb. 259)
$$\frac{\bar{t}}{t\,(r = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)} = \int_0^1 \frac{t}{t\,(r = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)}\,dx^3,$$
womit dann zunächst $t\,(r = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)$ gefunden ist und damit auch die Blattbreite für die übrigen Radien.

Zur Abschätzung genügt es im allgemeinen
$$\frac{\bar{t}}{t\,(r = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,R)} = 0{,}75 \text{ bis } 0{,}80 \qquad (36, 16)$$
zu setzen.

37. Verhalten der Luftschraube bei geändertem Betriebszustand.

a) **Berechnung des zu einem gegebenen Anstellwinkel gehörigen Fortschrittsgrades und Wirkungsgrades.** Den in Abb. 143 dargestellten Verhältnissen entsprechend wird die durch die Elementarschraube strömende Masse
$$d\dot{m} = \varrho\, A\, u\, 2\pi\, r\, dr$$
und
$$\operatorname{tg}\beta_\infty = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_i) = \frac{A}{K} = \bar{\lambda}_\infty = \operatorname{tg}(\beta^* - \alpha_\infty)\,. \qquad (37, 1)$$
Für Auftrieb und Widerstand gelten
$$dA_\infty = \mathfrak{z}\,\bar{t}\,\frac{\varrho}{2}\,w_\infty^2\,dr\,c_a\,,$$
$$dW_\infty = \mathfrak{z}\,\bar{t}\,\frac{\varrho}{2}\,w_\infty^2\,dr\,c_w\,.$$
Schub- und Tangentialkraft sind
$$dS = d\dot{m}\,v_a = dA_\infty\cos\beta_\infty - dW\sin\beta_\infty\,,$$
$$dT = d\dot{m}\,v_u = dA_\infty\sin\beta_\infty + dW\cos\beta_\infty\,.$$
Hieraus ergibt sich, wenn noch $\frac{uA}{w_\infty} = \sin\alpha_\infty$, $\frac{uK}{w_\infty} = \cos\alpha_\infty$ eingeführt wird,
$$\frac{v_a}{w_\infty} = \frac{\mathfrak{z}\,\bar{t}}{4\pi\bar{r}}\,(c_a\operatorname{cotg}\beta_\infty - c_w)\,, \qquad (37, 2)$$
$$\frac{v_u}{} = \frac{\mathfrak{z}\,\bar{t}}{4\pi\bar{r}}\,(c_w\operatorname{cotg}\beta_\infty + c_w)\,. \qquad (37, 3)$$

Wir erhalten also zunächst, was wir auch direkt hätten erhalten können,
$$\bar{\lambda}_v = \frac{v_u}{v_a} = \frac{c_w\operatorname{cotg}\beta_\infty + c_a}{c_a\operatorname{cotg}\beta_\infty - c_w} = \operatorname{tg}(\beta_\infty + \varepsilon) = \operatorname{tg}(\beta^* - \alpha_\infty + \varepsilon)\,. \qquad (37, 4)$$
Ferner erhalten wir
$$\frac{v_0}{w_\infty} = \frac{uA}{w_\infty} - \frac{v_a/2}{w_\infty} = \sin\beta_\infty - \frac{\mathfrak{z}\,\bar{t}}{8\pi\bar{r}}\,(c_a\operatorname{cotg}\beta_\infty - c_w)\,, \qquad (37, 5)$$
$$\frac{u}{} = \frac{uK}{} + \frac{v_u/2}{} = \cos\beta_\infty + \frac{\mathfrak{z}\,\bar{t}}{8\pi\bar{r}}\,(c_w\operatorname{cotg}\beta_\infty + c_a) \qquad (37, 6)$$

und damit

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{v_0}{u} = \frac{\sin\beta_\infty - \frac{\mathfrak{z}\,\tilde{t}}{8\pi\tilde{r}}(c_a \operatorname{cotg}\beta_\infty - c_w)}{\cos\beta_\infty + \frac{\mathfrak{z}\,\tilde{t}}{8\pi\tilde{r}}(c_w \operatorname{cotg}\beta_\infty + c_a)} = \frac{\frac{\tilde{\lambda}_\infty}{\sqrt{1+\tilde{\lambda}_\infty^2}} - \frac{\tilde{\lambda}}{4}\left(\frac{c_a}{\tilde{\lambda}_\infty} - c_w\right)}{\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\lambda}_\infty^2}} + \frac{\tilde{\lambda}}{4}\left(\frac{c_w}{\tilde{\lambda}_\infty} + c_a\right)}. \quad (37,7)$$

Hiermit ergeben sich der Wirkungsgrad η und der ideelle Wirkungsgrad η_{id}

$$\eta = \frac{\tilde{\lambda}_0}{\tilde{\lambda}_p}, \quad \eta_{id} = \frac{\tilde{\lambda}_0}{\tilde{\lambda}_\infty}. \quad (37,8)$$

b) Berechnung der zugehörigen Leistungs- und Schubziffer. Die ideelle Leistungsziffer $\tilde{k}_{d_{id}}$ ist (12,42)

$$\tilde{k}_{d_{id}} = 4\,\tilde{\lambda}_0^3\,\frac{1-\eta_{id}}{\eta_{id}^3}\cdot\frac{1+\frac{\tilde{\lambda}_0}{\eta_{id}}}{\left(1+\left(\frac{\tilde{\lambda}_0}{\eta_{id}}\right)^2\right)^2}.$$

Da $\tilde{\lambda}_0$, η_i nun bekannt sind, ist auch $\tilde{k}_{d_{id}}$ bestimmbar.

Die Leistungsziffer $\tilde{k}_d$ selbst ergibt sich aus (13,20)

$$\tilde{k}_d = \tilde{k}_{d_{id}}\left(1+\frac{\eta_{id}}{\tilde{\lambda}_0}\right)\left(1 - \varepsilon\,\frac{\tilde{\lambda}_0}{\eta_{id}}\,\frac{1-\eta_{id}}{1+\frac{\tilde{\lambda}_0^2}{\eta_{id}}}\right).$$

Da auch ε gegeben ist, ist $\tilde{k}_d$ nunmehr leicht zu bestimmen und wegen des schon bestimmten Wirkungsgrades η auch $\tilde{k}_s$.

Leider kann man auf diese Weise direkt nur zu einem gegebenen β^* und α_∞ die zugehörigen Werte $\tilde{\lambda}_0$, η, $\tilde{k}_d$, $\tilde{k}_s$ bestimmen und nicht umgekehrt. Die Umkehrung ist nur durch Interpolation möglich. Für eine Schraube gegebener Einstellung β^* bzw. eine starre Schraube ist dies nicht weiter schlimm. Für die Untersuchung einer Verstellschraube z. B. für gegebene λ_0 und k_d und unbekannter Einstellung gestaltet sich die Rechnung jedoch etwas umständlich.

Die Rechnungen können im Falle der gegebenen Einstellung β^* nach folgendem durch Beispiel erläutertem Rechenschema durchgeführt werden:

Zahlentafel 12. Rechenschema und Beispiel zur Bestimmung der Leistungs- und Schubziffer einer gegebenen Luftschraube.

Gegeben: $\mathfrak{z}$, $\bar{t}/R$, β^*, α_∞, c_a, c_w; gesucht: k_d, k_s, λ_0, η.

①	$\mathfrak{z}$	$= 4$,
②	$\bar{t}/R$	$= 0{,}076$,
③	β^*	$= 51°40'$, $(\lambda^* = \operatorname{tg}\beta^* = 1{,}265)$
④	α_∞	$= 5°25'$,
⑤	c_a	$= 0{,}446$,
⑥	c_w	$= 0{,}021$,

⑥ : ⑤ = ⑦	$\operatorname{tg}\varepsilon$	$= c_w/c_a$	$= 0{,}0478$, $(\varepsilon = 2^\circ 45')$
③ − ④ = ⑧	β_∞	$= \beta^* - \alpha_\infty$	$= 46^\circ 15'$,
⑧ + ⑦ = ⑨	β_p	$= \beta_\infty + \varepsilon$	$= 49^\circ 0'$,
aus ⑧ : ⑩	$\bar{\lambda}_\infty$	$= \operatorname{tg}\beta_\infty$	$= 1{,}044$,
aus ⑨ : ⑪	$\bar{\lambda}_p$	$= \frac{\bar{\lambda}_0}{\eta} = \operatorname{tg}\beta_p$	$= 1{,}150$,
aus ③ : ⑫	ν		$= 0{,}989$,
aus ③ : ⑬	ξ		$= 0{,}495$,
$\sqrt{2}$ = (② · ⑫) / ⑬ ⑭	$\frac{\bar{t}}{\bar{r}}$	$= \sqrt{2}\,\frac{t}{R}\cdot\frac{\nu}{\xi}$	$= 0{,}213$,
(① ⑭) / 2π = ⑮	$\bar{\chi}$	$= \frac{3}{2\pi}\,\frac{\bar{t}}{\bar{r}}$	$= 0{,}135$,
aus ⑧ { ⑯	$\sin\beta_\infty$		$= 0{,}7223$,
aus ⑧ { ⑰	$\cos\beta_\infty$		$= 0{,}6915$,
(⑮ · ⑤) / 4 = ⑱	$\frac{\bar{\chi}}{4}\,c_a$		$= 0{,}0151$,
(⑮ ⑥) / 4 = ⑲	$\frac{\bar{\chi}}{4}\,c_w$		$= 0{,}00710$,
⑱ : ⑩ = ⑳	$\frac{\bar{\chi}}{4}\,\frac{c_a}{\bar{\lambda}_\infty}$		$= 0{,}0144$
⑲ : ⑩ = ㉑	$\frac{\bar{\chi}}{4}\,\frac{c_w}{\bar{\lambda}_\infty}$		$= 0{,}00678$,
⑯ + ⑱ − ⑳ = ㉒	v_0/w_∞		$= 0{,}7137$,
⑰ + ⑲ + ㉑ = ㉓	u/w_∞		$= 0{,}7137$,
㉒ : ㉓ = ㉔	$\bar{\lambda}_0$	$= v_0/u$	$= 1{,}000$,
㉔ : ⑩ = ㉕	η_{id}	$= \bar{\lambda}_0/\bar{\lambda}_\infty$	$= 0{,}958$,
㉔ : ⑪ = ㉖	η	$= \bar{\lambda}_0/\bar{\lambda}_p$	$= 0{,}870$,
aus ㉔, ㉕ : ㉗	$\bar{k}_{d\,id}$		$= 0{,}0900$,
aus ⑩, ㉔, ㉕ : ㉘	$\zeta = \bar{\lambda}_\infty \frac{1-\eta_{id}}{1+\bar{\lambda}_0\bar{\lambda}_\infty}$		$= 0{,}024$,
1 − ⑦ · ㉘ = ㉙	$1-\varepsilon\zeta$		$= 0{,}999$,
1 + ⑦ : ⑩ = ㉚	$1+\varepsilon/\lambda_\infty$		$= 1{,}046$,
㉗ · ㉙ · ㉚ = ㉛	$\bar{k}_d$		$= 0{,}094$,
㉛ : ⑪ = ㉜	$\bar{k}_s$	$= \eta/\bar{\lambda}_0\cdot\bar{k}_d$	$= 0{,}0824$,
㉝	k_d	$= \frac{\xi}{2\sqrt{2}}\,\bar{k}_d$	$= 0{,}0167$,
㉞	k_s	$= \frac{\xi}{2}\,\bar{k}_s$	$= 0{,}0206$.

IV. Zusammenwirken von Luftschraube und Flugzeug.

K. Die Luftschraube bei Anstellung und Drehbewegung des Flugzeugs und unter Einfluß von Flügel und Rumpf.

38. Die Luftschraube bei Schräganblasung.

a) Zweckmäßige Annahmen über die Schubverteilung. Um durch Integration von der Elementarschraube bei Schräganblasung auf die Gesamtschraube übergehen zu können, muß eine Beziehung zwischen den Beiwerten der Elementarschraube und der Gesamtschraube geschaffen werden. Da hierbei der Einfluß der Flügelzahl auf die Schubverteilung über den Schraubenradius offenbar nur von untergeordneter Bedeutung ist und da auch die Abweichungen von der günstigsten Schubverteilung hierbei wenig ausmachen kann, so dürfen wir die Schubverteilung vom Fortschrittsgrad als unabhängig ansehen und als Schubverteilung die sich bei unendlicher Flügelzahl und unverändertem Steigungsverhältnis bei verschwindendem Schub und Reibungsfreiheit als günstigst ergebende zugrunde legen.

Für Schubziffer k_s und Leistungsziffer k_d der Gesamtschraube gelten mit der bei der Behandlung der schräg angeblasenen Elementarschraube eingeführten Bezeichnungen (28, 2), (28, 3)

$$k_{s_0} = 2\int_0^1 \bar{k}_{s_0} \cdot x^3 \cdot dx\,,$$

$$k_{d_0} = 2\int_0^1 \bar{k}_{d_0} \cdot x^4 \cdot dx. \qquad \left(x = \frac{r}{R}\right)$$

Für den Wirkungsgrad der Elementarschraube gilt (12, 27):

$$\bar{\eta} = \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{k}_{s_0}}}{1 + \sqrt{1 + \bar{k}_{s_0}/\lambda^2}}$$

oder nach $\bar{k}_{s_0}$ aufgelöst (12, 41)

$$\bar{k}_{s_0} = 4\lambda^2 \cdot \frac{1-\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda^2}{\bar{\eta}}}{\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\bar{\eta}}\right)^2\right)^2}\,.$$

Bei verschwindendem Gesamtschub, wobei für den Fortschrittsgrad $\lambda_a \to \lambda_a^*$ gesetzt werden möge, ergibt sich als günstigste Schubverteilung jene, für welche unabhängig vom Radius $\bar{\eta} =$ konst. wird. In diesem Falle strebt $\bar{\eta}$ außerdem gegen eins. Mit $x = r/R$, $\lambda = \lambda_a/x$

ergibt sich als günstigste Schubverteilung also

$$\bar{k}_{s_0} = \frac{4\lambda_a^2}{x^2}\,\frac{1-\eta}{\bar{\eta}^2}\cdot\frac{1+\dfrac{\lambda_a^2}{x^2\bar{\eta}}}{\left(1+\dfrac{\lambda_a^2}{x^2\eta^2}\right)^2}$$

oder mit $\lambda_a \to \lambda_a^*$, $\bar{\eta} \to 1$

$$\bar{k}_{s_0} = K\,\frac{\dfrac{\lambda_a^{*2}}{x^2}}{1+\dfrac{\lambda_a^{*2}}{x^2}}\,. \tag{38, 1}$$

Die Konstante K muß noch so bestimmt werden, daß Gleichung (28, 2) erfüllt wird

$$k_{s_0} = 2\int_0^0 \bar{k}_{s_0}\,x^3\,dx = 2K\int_0^1 \frac{\lambda_a^{*2}/x^2}{1+\lambda_a^{*2}/x^2}\,x^3\,dx\,,$$

$$k_{s_0} = K\lambda_a^{*2}\left[1-\lambda_a^{*2}\ln\frac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}\right]. \tag{38, 2}$$

Damit wird also

$$K = \frac{k_{s_0}}{\lambda_a^{*2}\left(1-\lambda_a^{*2}\ln\dfrac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}\right)} \tag{38, 3}$$

und

$$\bar{k}_{s_0} = \frac{k_{s_0}}{\left(1-\lambda_a^{*2}\ln\dfrac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}\right)(x^2+\lambda_a^{*2})} = \Phi_{(x)}\cdot k_{s_0}\,. \tag{38, 4}$$

Hiermit ist eine für die weiteren Betrachtungen brauchbare Annahme für die Schubverteilung über den Radius gewonnen. Hieraus folgt nun

$$\bar{k}_{s_0}^* = \frac{d\bar{k}_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda}} = \frac{d\bar{k}_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a}}\cdot\frac{d\dfrac{1}{\lambda_a}}{d\dfrac{1}{\lambda}} = \frac{d\bar{k}_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\Phi_{(x)}}{x}\,k_{s_0}^* = \frac{\Phi_{(x)}}{x}\,\frac{dk_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a}}\,, \tag{38, 5}$$

$$\bar{k}_{s_0}^{**} = \frac{d^2\bar{k}_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda^2}} = \frac{d^2\bar{k}_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}\cdot\frac{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}{d\dfrac{1}{\lambda^2}} = \frac{d^2\bar{k}_{s_0}}{d^2\dfrac{1}{\lambda_a^2}}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{\Phi_{(x)}}{x^2}\cdot k_{s_0}^{**} = \frac{\Phi_{(x)}}{x^2}\cdot\frac{d^2k_{s_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}\,. \tag{38, 6}$$

Die Verteilung von $\bar{k}_{d_0}$ über den Schraubenradius ergibt sich aus

$$\bar{k}_{d_0} = \frac{\lambda}{\bar{\eta}}\,\bar{k}_{s_0} = \frac{\lambda_a}{\bar{\eta}}\cdot\frac{\bar{k}_{s_0}}{x} = \frac{\lambda_a k_{s_0}}{\eta}\cdot\frac{\Phi_{(x)}}{x} = k_{d_0}\cdot\frac{\Phi_{(x)}}{x}\,. \tag{38, 7}$$

Hieraus folgt

$$\bar{k}_{d_0}^* = \frac{d\bar{k}_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda}} = \frac{d\bar{k}_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a}}\cdot\frac{d\dfrac{1}{\lambda_a}}{d\dfrac{1}{\lambda}} = \frac{d\bar{k}_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\Phi_{(x)}}{x^2}\cdot k_{d_0}^* = \frac{\Phi_{(x)}}{x^2}\cdot\frac{dk_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a}}\,, \tag{38, 8}$$

$$\bar{k}_{d_0}^{**} = \frac{d^2\bar{k}_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda^2}} = \frac{d^2\bar{k}_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}\cdot\frac{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}{d\dfrac{1}{\lambda^2}} = \frac{d^2\bar{k}_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{\Phi_{(x)}}{x^3}\cdot k_{d_0}^{**} = \frac{\Phi_{(x)}}{x^3}\cdot\frac{d^2k_{d_0}}{d\dfrac{1}{\lambda_a^2}}\,. \tag{38, 9}$$

Für die Ableitungen nach λ_a wird erhalten:

$$\bar{k}_{s_0} = \frac{k_{s_0}}{\left(1-\lambda_a^{*2}\ln\frac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}\right)\cdot(x^2+\lambda_a^{*2})} = \Phi_{(x)}\cdot k_{s_0}, \qquad (38, 10)$$

$$\bar{k}'_{s_0} = \frac{d\,\bar{k}_{s_0}}{d\,\lambda} = \frac{d\,\bar{k}_{s_0}}{d\,\lambda_a}\cdot\frac{d\,\lambda_a}{d\,\lambda} = \frac{d\,\bar{k}_{s_0}}{d\,\lambda_a}\cdot x = \Phi_{(x)}\cdot x\cdot k'_{s_0} = \Phi_{(x)}\cdot x\cdot\frac{d\,k_{s_0}}{d\,\lambda_a}, \qquad (38, 11)$$

$$\bar{k}''_{s_0} = \frac{d^2\,\bar{k}_{s_0}}{d\,\lambda^2} = \frac{d^2\,\bar{k}_{s_0}}{d\,\lambda_a^2}\cdot\frac{d\,\lambda_a^2}{d\,\lambda^2} = \frac{d^2\,\bar{k}_{s_0}}{d\,\lambda_a^2}\cdot x^2 = \Phi_{(x)}\cdot x^2\cdot k''_{s_0} = \Phi_{(x)}\cdot x^2\cdot\frac{d^2\,k_{s_0}}{d\,\lambda_a^2}, \qquad (38, 12)$$

$$\bar{k}_{d_0} = \frac{\Phi_{(x)}}{x}\cdot k_{d_0}, \qquad (38, 13)$$

$$\bar{k}'_{d_0} = \frac{d\,\bar{k}_{d_0}}{d\,\lambda} = \frac{d\,\bar{k}_{d_0}}{d\,\lambda_a}\cdot\frac{d\,\lambda_a}{d\,\lambda} = \frac{d\,\bar{k}_{d_0}}{d\,\lambda_a}\cdot x = \Phi_{(x)}\cdot k'_{d_0} = \Phi_{(x)}\cdot\frac{d\,k_{d_0}}{d\,\lambda_a}, \qquad (38, 14)$$

$$\bar{k}''_{d_0} = \frac{d^2\,\bar{k}_{d_0}}{d\,\lambda^2} = \frac{d^2\,\bar{k}_{d_0}}{d\,\lambda_a^2}\cdot\frac{d\,\lambda_a^2}{d\,\lambda^2} = \frac{d^2\,\bar{k}_{d_0}}{d\,\lambda_a^2}\cdot x^2 = \Phi_{(x)}\cdot x\cdot k''_{d_0} = \Phi_{(x)}\cdot\frac{d^2\,k_{d_0}}{d\,\lambda_a^2}. \qquad (38, 15)$$

b) Die Beiwerte der Gesamtschraube bei Schräganblasung. Für die Elementarschraube war erhalten worden (26, 16):

$$\bar{k}_x = \bar{k}_{s_0} + (\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{tg}^2\,\beta)\cdot\left(\frac{\bar{k}_{s_0}^{**}}{4} + \lambda\cdot\bar{k}_{s_0}^{*} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot\bar{k}_{s_0}\right).$$

Nun gilt weiter (28, 2)

$$k_x = 2\int_0^1 \bar{k}_x\cdot x^3\cdot d\,x\,.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$k_x = 2\left[k_{s_0}\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x^3\cdot d\,x + (\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{tg}^2\,\beta)\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\frac{k_{s_0}^{**}}{4}\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x\cdot d\,x + \lambda_a\cdot k_{s_0}^{*}\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x\cdot d\,x + \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k_{s_0}\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x\cdot d\,x\right\}\right].$$

Und da $\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x^3\cdot d\,x = \frac{1}{2}$ — dieses Integral ist immer unabhängig von der Verteilung Φ —,

$$\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x\cdot d\,x = \frac{1}{2}\,\frac{\ln\frac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}}{1-\lambda_a^{*2}\cdot\ln\frac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}}$$

ist, so wird, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\ln\frac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^2}}{1-\lambda_a^{*2}\ln\frac{1+\lambda_a^{*2}}{\lambda_a^{*2}}} = B \text{ (Abb. 266)} \qquad (38, 16)$$

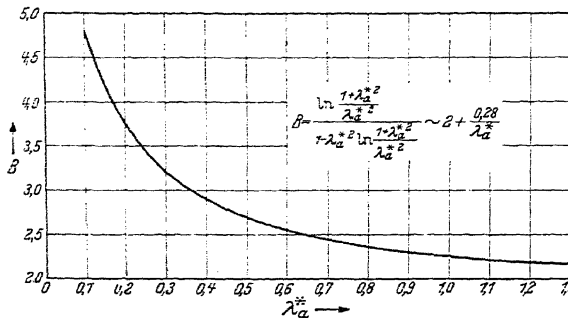



Abb. 266. Hilfsgröße $B(\lambda_a^*)$.

gesetzt wird

$$k_x = k_{s_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta) \cdot B\left(\frac{k_{s_0}^{**}}{4} + \lambda_a \cdot k_{s_0}^* + \frac{\lambda_a^2}{2} \cdot k_{s_0}\right). \quad (38, 17)$$

Für die Elementarschraube gilt (26, 16):

$$\bar{k}_y = -\left(\frac{\bar{k}_{d_0}^*}{2} + \lambda \bar{k}_{d_0}\right) \cdot \mathrm{tg}\,\beta .$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$k_y = -2\,\mathrm{tg}\,\beta \left[\frac{k_{d_0}^*}{2}\int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x \cdot dx + \lambda_a \cdot k_{d_0}\int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x \cdot dx\right]$$

$$= -\mathrm{tg}\,\beta \cdot B \cdot \left(\frac{k_{d_0}^*}{2} + \lambda_a \cdot k_{d_0}\right). \quad (38, 18)$$

Genau so wird erhalten

$$k_z = -\mathrm{tg}\,\alpha \cdot B \cdot \left(\frac{k_{d_0}^*}{2} + \lambda_a \cdot k_{d_0}\right). \quad (38, 19)$$

Für die Momente der Elementarschraube gilt (26, 16):

$$\bar{k}_L = -\left[\bar{k}_{d_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^3\beta) \cdot \left(\frac{\bar{k}_{d_0}^{**}}{4} + \lambda \bar{k}_{d_0}^* + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \bar{k}_{d_0}\right)\right].$$

Für die Gesamtschraube wird also (28, 3)

$$k_L = 2\int_0^1 \bar{k}_L \cdot x^4 \cdot dx .$$

Eingesetzt wird erhalten

$$k_L = -2\left[\bar{k}_{d_0}\int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x^3 dx + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta) \cdot \left\{\frac{k_{d_0}^{**}}{4}\int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x \cdot dx \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_a \cdot k_{d_0}^*\int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x \cdot dx + \frac{\lambda_a^2}{2} \cdot k_{d_0}\int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x \cdot dx\right\}\right]$$

$$= -\left[k_{d_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta) \cdot B \cdot \left(\frac{k_{d_0}^{**}}{4} + \lambda_a \cdot k_{d_0}^* + \frac{\lambda_a^2}{2} \cdot k_{d_0}\right)\right]. \quad (38, 20)$$

Genau so werden die Momente um die y- und z-Achse erhalten. Für die Elementarschraube gilt (26, 16)

$$k_M = -\left(\frac{\bar{k}_{s_0}^*}{2} + \lambda \bar{k}_{s_0}\right) \cdot \mathrm{tg}\,\beta ,$$

Für die Gesamtschraube gilt (28, 3)

$$k_M = 2\int_0^1 k_M \cdot x^4 \cdot dx\,.$$

$$\left.\begin{aligned} k_M &= -2\,\mathrm{tg}\,\beta\left[\frac{k^*_{s_0}}{2}\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x^3\cdot dx + \lambda_a\cdot k_{s_0}\int_0^1 \Phi_{(x)}\cdot x^3\cdot dx\right] \\ &= -\mathrm{tg}\,\beta\left[\frac{k^*_{s_0}}{2} + \lambda_a\cdot k_{s_0}\right], \end{aligned}\right\}$$

$$k_N = -\mathrm{tg}\,\alpha\left[\frac{k^*_{s_0}}{2} + \lambda_a\cdot k_{s_0}\right]. \qquad (38, 22)$$

Zusammengestellt gilt somit für die Gesamtschraube bei Schräganblasung:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= k_{s_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\cdot B\cdot\left(\frac{k^{**}_{s_0}}{4} + \lambda_a\cdot k^*_{s_0} + \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k_{s_0}\right), \\ k_y &= -\mathrm{tg}\,\beta\cdot B\left(\frac{k^*_{d_0}}{2} + \lambda_a\cdot k_{d_0}\right), \\ k_z &= -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot B\left(\frac{k^*_{d_0}}{2} + \lambda_a\cdot k_{d_0}\right), \\ k_L &= -\left[k_{d_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\cdot B\cdot\left(\frac{k^{**}_{d_0}}{4} + \lambda_a\cdot k^*_{d_0} + \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k_{d_0}\right)\right], \\ k_M &= -\mathrm{tg}\,\beta\left[\frac{k^*_{s_0}}{2} + \lambda_a\cdot k_{s_0}\right], \\ k_N &= -\mathrm{tg}\,\alpha\left[\frac{k^*_{s_0}}{2} + \lambda_a\cdot k_{s_0}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (38, 23)$$

Oder unter Benutzung der Ableitungen k' nach λ statt der Ableitungen k^* nach $1/\lambda$

$$\left.\begin{aligned} k_x &= k_{s_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\cdot B\cdot\left(\frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k_{s_0} - \frac{\lambda_a^3}{2}\cdot k'_{s_0} + \frac{\lambda_a^4}{4}\cdot k''_{s_0}\right), \\ k_y &= -\mathrm{tg}\,\beta\cdot B\cdot\left(\lambda_a\cdot k_{d_0} - \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k'_{d_0}\right), \\ k_z &= -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot B\cdot\left(\lambda_a\cdot k_{d_0} - \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k'_{d_0}\right), \\ k_L &= -\left[k_{d_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta)\cdot B\cdot\left(\frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k_{d_0} - \frac{\lambda_a^3}{2}\cdot k'_{d_0} + \frac{\lambda_a^4}{4}\cdot k''_{d_0}\right)\right], \\ k_M &= -\mathrm{tg}\,\beta\cdot\left(\lambda_a\cdot k_{s_0} - \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k'_{s_0}\right), \\ k_N &= -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\left(\lambda_a\cdot k_{s_0} - \frac{\lambda_a^2}{2}\cdot k'_{s_0}\right). \end{aligned}\right\} \quad (38, 24)$$

Mit Benutzung der in Zahlentafel 13 zusammengestellten Koeffizienten $\varkappa$, welche nur vom Fortschrittsgrade der betrachteten Schraube abhängen:

Zahlentafel 13. Die Koeffizienten $\varkappa$ zur Bestimmung der Einflüsse der Schräganblasung:

$$k'_{s_0} = \frac{d}{d\lambda} k_{s_0}, \qquad k'_{d_0} = \frac{d}{d\lambda} k_{d_0}, \qquad k''_{s_0} = \frac{d^2}{d\lambda^2} k_{s_0}, \qquad k''_{d_0} = \frac{d^2}{d\lambda^2} k_{d_0}.$$

$$\varkappa_x = B\left(\frac{\lambda^2}{2} k_{s_0} - \frac{\lambda^3}{2} k'_{s_0} + \frac{\lambda^4}{4} k''_{s_0}\right) \qquad \varkappa_L = B\left(\frac{\lambda^2}{2} k_{d_0} - \frac{\lambda^3}{2} k'_{d_0} + \frac{\lambda^4}{4} k''_{d_0}\right)$$

$$\varkappa_y = \varkappa_z = B\left(\lambda k_{d_0} - \frac{\lambda^2}{2} k'_{d_0}\right) \qquad \varkappa_M = \varkappa_N = \lambda k_{s_0} - \frac{\lambda^2}{2} k'_{s_0}$$

ergeben sich die in Zahlentafel 14 zusammengestellten Beiwerte.

Zahlentafel 14. Kraft- und Momentbeiwerte einer angestellten Schraube.

Schubziffer $k_x = \dfrac{X}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = k_{x_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta) \cdot \varkappa_x$	Rollmomentziffer $k_L = \dfrac{L}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^3}{8}} = k_{L_0} + (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta) \cdot \varkappa_L$
Seitenkraftziffer $k_y = \dfrac{Y}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \mathrm{tg}\beta \cdot \varkappa_y$	Längsmomentziffer $k_M = \dfrac{M}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^3}{8}} = \mathrm{tg}\beta \cdot \varkappa_M$
Normalkraftziffer $k_z = \dfrac{Z}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \mathrm{tg}\alpha \cdot \varkappa_z$	Wendemomentziffer $k_N = \dfrac{N}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^3}{8}} = \mathrm{tg}\alpha \cdot \varkappa_N$

Zu bemerken ist, daß die Quermomente M und N bei Schräganblasung nicht von der Schubverteilung über die Schraubenkreisfläche abhängen.

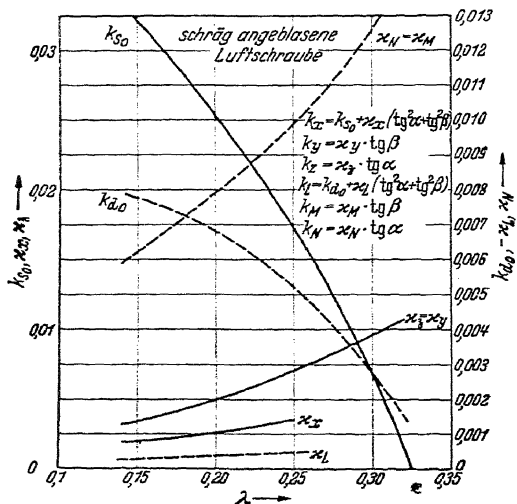



Abb. 267. Beispiel für die Beiwerte k_{s_0}, k_{d_0}, $\varkappa_x$, $\varkappa_y = \varkappa_z$, $\varkappa_L$, $\varkappa_M = \varkappa_N$ einer schräg angeblasenen Luftschraube.

c) Vergleich mit Versuchsergebnissen. In Abb. 267 sind für eine Schraube neben der Schubziffer k_{s_0} und der Drehmomentziffer k_{d_0} die sich hieraus ergebenden Koeffizienten $\varkappa$ dargestellt. Während die Schubziffer k_{s_0} und die Drehmomentziffer k_{d_0} mit zunehmendem Fortschrittsgrade λ abnehmen, nehmen die Koeffizienten $\varkappa$ mit zunehmendem λ stark zu. Für $\lambda = 0$, also am Stand, sind sie, wie nicht anders zu erwarten, gleich Null. Da die Tangente des Anstellwinkels beim Längsamflug bis zu 0,3 werden kann, die Tan-

gente des Schiebewinkels beim Slipen bis zu 0,5, im Trudeln sogar noch größer, so können die Normalkräfte und Seitenkräfte, die Wendemomente und Längsmomente leicht die Größenordnung des Schubs und

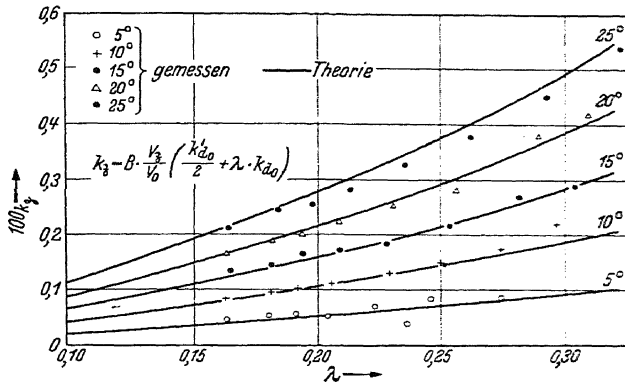



Abb. 268. Querkraft einer angestellten Luftschraube nach Versuch und Theorie.

des Drehmoments der Luftschraube erreichen. Auch die Änderungen von Schub und Drehmoment können aber unter Umständen bei größeren Anstell- und Schiebewinkeln schon beachtlich werden.

In Abb. 268 ist das Ergebnis eines älteren englischen Versuchs [Vers. 96] bezüglich der Querkraft bei verschiedenen Anstellwinkeln mit dem

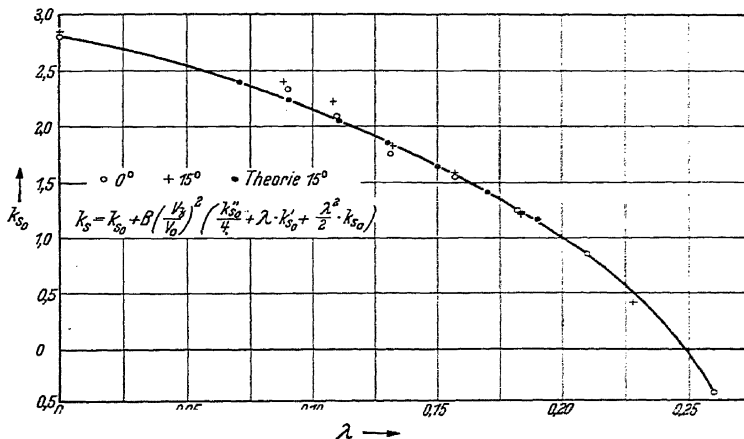



Abb. 269. Schub einer angestellten Luftschraube.

Ergebnis der Theorie verglichen. Die Übereinstimmung der Meßergebnisse mit der Theorie ist recht gut.

In Abb. 269 ist die Schubziffer nach den gleichen Meßergebnissen bei verschiedenen Anstellwinkeln aufgetragen. Da diese Anstellung im Sinne unserer Betrachtungen aber klein ist, bleibt ihr Einfluß auf den

Schub innerhalb der Meßgenauigkeit, wie es auch der Theorie entspricht.

Zur Nachprüfung der Ergebnisse der Theorie bezüglich der übrigen Einflüsse der Schräganblasung geeignete Versuchsergebnisse liegen leider nicht vor. Doch ist anzunehmen, daß die theoretischen Ergebnisse mit der Wirklichkeit auch hierin genügend genau übereinstimmen.

d) Kurze Zusammenfassung des Verhaltens bei Schräganblasung. Kurz zusammengefaßt ergibt sich also für die reine Anstellung der Schraube:

Ist die Schraube positiv angestellt, so entsteht eine nach oben gerichtete Normalkraft unabhängig vom Schraubendrehsinn. Ist die Schraube rechtsdrehend und positiv angestellt, so dreht das entstehende Wendemoment im Sinne einer Linkskurve. Umdrehung des Schraubendrehsinns ergibt eine Änderung des Drehsinns des Wendemomentes. Eine Seitenkraft und ein Längsmoment entstehen bei reiner Anstellung nicht.

Bei reinem Schieben ergibt sich:

Schiebt das Flugzeug, so wirkt die entstehende Seitenkraft der Richtung des Schiebens entgegen, unabhängig vom Drehsinn der Schraube. Schiebt das Flugzeug nach rechts und ist die Luftschraube rechtsdrehend, so wirkt das entstehende Längsmoment im Sinne einer Anstellwinkelverminderung. Änderung des Drehsinns der Schraube ändert auch den Drehsinn des Längsmomentes. Eine Normalkraft und ein Wendemoment entstehen bei reinem Schieben nicht.

Durch den Einfluß der Schraube sind demnach die Bewegungen um die drei Hauptachsen zum Teil miteinander gekoppelt. Bei Stabilitätsuntersuchungen mit mehreren Freiheitsgraden muß dies unter Umständen beachtet werden.

39. Die Luftschraube bei Drehung des Flugzeugs.

a) Die Beiwerte der Gesamtschraube bei gekrümmter Flugbahn. Für die Elementarschraube war bei Flugzeugdrehung bzw. Flug auf gekrümmter Flugbahn erhalten worden (27, 23):

$$\bar{k}_x = \bar{k}_{s_0} + \frac{\bar{k}'_{s_0}}{4} \cdot \left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)\right.$$

Durch Einsetzen in (28, 2)

$$k_x = 2 \int^1 \bar{k}_x \cdot x^3 \cdot dx$$

ergibt sich für die Gesamtschraube

$$k_x = 2\left[k_{s_0} \int^1 \Phi_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx + \qquad + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right) \cdot \frac{k_{s_0}}{4} \cdot \int \Phi_{(x)} \cdot x^5 \cdot dx\right].$$

Da

$$\int^{1} \Phi_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx = \frac{1}{2}\,,$$

$$\int_0 \Phi_{(x)} \cdot x^5 \cdot dx = \qquad \frac{\quad}{1 - \lambda_a^{*2} \cdot \ln \frac{1 + \lambda_a^{*2}}{\ldots}} - 2\,\lambda_a^{*2}\Big| = 2\,C, \text{ (Abb. 270)} \qquad (39,1)$$

wird

$$k_x = k_{s_0} + \left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right] \cdot C \cdot k''_{s_0}\,. \qquad (39,2)$$

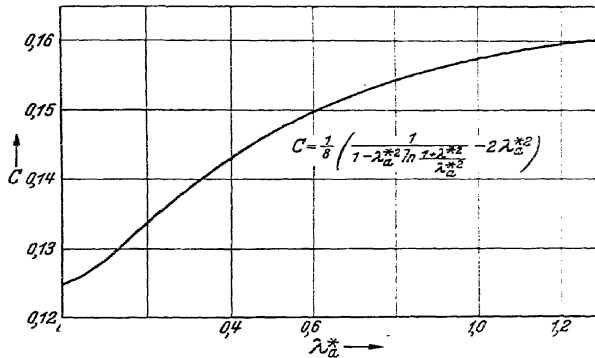



Abb. 270. Hilfsgröße $C(\lambda_a^*)$.

Für die Elementarschraube gilt (27, 23):

$$\bar{k}_y = \frac{\bar{k}'_{d_0}}{2} \cdot \frac{\omega_y}{\omega_p}\,.$$

Für die Gesamtschraube also ergibt sich (28, 2)

$$k_y = 2\,\frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \frac{k'_{d_0}}{2} \int^{1} \Phi_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx = \frac{\omega_y}{\omega_p} \cdot \frac{k'_{d_0}}{2}\,. \qquad (39,3)$$

Genau so wird erhalten:

$$= \frac{\omega_z}{\omega_p} \cdot \frac{k_{d_0}}{2}\,. \qquad (39,4)$$

Für die Momente der Elementarschraube gilt (27, 23):

$$\bar{k}_L = -\left\{\bar{k}_{d_0} + \frac{\bar{k}'_{d_0}}{4}\left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right]\right\}.$$

Somit wird für die Gesamtschraube (28, 3)

$$k_L = 2 \int^{1} \bar{k}_L \cdot x^4 \cdot dx\,.$$

Eingesetzt wird erhalten:

$$k_L = -2\left[k_{d_0} \cdot \int^1 \Phi_{(x)} \cdot x^3 \cdot dx + \left(\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right) \cdot \frac{k''_{d_0}}{4} \int^1 \Phi_{(x)} \cdot x^5 \cdot dx\right.$$

$$= -\left[k_{d_0} + \left(\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right) \cdot C \cdot k''_{d_0}\right]. \qquad (39,5)$$

Ebenso werden die Momente um die y- und z-Achse erhalten. Für die Elementarschraube gilt (27, 23)

$$\bar{k}_M = \frac{\bar{k}'_{s_0}}{2} \cdot \frac{\omega_y}{\omega_p},$$

Für die Gesamtschraube wird (28, 3)

$$k_M = 2\int_0^1 \bar{k}_M \cdot x^4 \cdot dx$$

$$= 2\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right) \cdot \frac{k'_{s_0}}{2} \int_0^1 \Phi_{(x)} \cdot x^5 \cdot dx = 2\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right) \cdot C \cdot k'_{s_0} \qquad (39,6)$$

und entsprechend

$$k_N = 2\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right) \cdot C \cdot k'_{s_0}. \qquad (39,7)$$

Zusammengestellt gilt somit für die Gesamtschraube bei Änderung des Anstell- und Schiebewinkels

$$\begin{aligned}
k_x &= k_{s_0} + \left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right] \cdot C \cdot k''_{s_0}, \\
&= \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right) \cdot \frac{k'_{d_0}}{2}, \\
k_z &= \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right) \cdot \frac{k'_{d_0}}{2}, \\
k_L &= -\left\{k_{d_0} + \left[\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right] \cdot C \cdot k''_{d_0}\right\}, \\
k_M &= 2\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right) \cdot C \cdot k'_{s_0}, \\
k_N &= 2\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right) \cdot C \cdot k'_{s_0}.
\end{aligned} \qquad (39,8)$$

Mit Benutzung der in Zahlentafel 15 zusammengestellten Koeffizienten $\varkappa$, welche nur vom Fortschrittsgrade der betrachteten Schraube abhängen,

Zahlentafel 15. **Die Koeffizienten $\varkappa$ zur Bestimmung der Einflüsse der Flugzeugdrehung.**

$\varkappa_x = C\,k''_{s_0}$	$\varkappa_L = C\,k''_{d_0}$
$\varkappa_y = \varkappa_z = k'_{d_0}$	$\varkappa_M = \varkappa_N = 2\,C\,k'_{s_0}$

ergeben sich also die in Zahlentafel 16 zusammengestellten Beiwerte.

Zahlentafel 16. Kraft- und Momentbeiwerte einer Schraube bei Drehung des Flugzeuges.

Schubziffer	Rollmomentziffer
$k_x = \frac{X}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = k_{x_0} + \left(\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right) \cdot \varkappa_x$	$k_L = \frac{L}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^3}{8}} = k_{d_0} - \left(\left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2\right) \cdot \varkappa_L$
Seitenkraftziffer	**Längsmomentziffer**
$k_y = \frac{y}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right) \cdot \varkappa_y$	$k_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^3}{8}} = \left(\frac{\omega_y}{\omega_p}\right) \cdot \varkappa_M$
Normalkraftziffer	**Wendemomentziffer**
$k_z = \frac{z}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right) \cdot \varkappa_z$	$k_N = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi D^3}{8}} = \left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right) \cdot \varkappa_N$

Zu bemerken ist, daß die Querkräfte Y und Z nicht von der Schubverteilung über die Schraubenkreisfläche abhängen.

In Abb. 271 sind für eine Schraube neben der Schubziffer k_{s_0} und der Drehmomentenziffer k_{d_0} diese Koeffizienten $\dot{\varkappa}$ dargestellt. Während die Schubziffer k_{s_0} und die Drehmomentziffer k_{d_0} mit zunehmendem Fortschrittsgrad λ abnehmen, nehmen die Koeffizienten $\dot{\varkappa}$ mit zunehmendem λ stark zu. Für $\lambda = 0$ sind sie im allgemeinen von Null verschieden.

Abb. 271. Beispiel für die Beiwerte k_{s_0}, k_{d_0}, $\varkappa_x$, $\varkappa_y = \varkappa_z$, $\varkappa_L$, $\varkappa_M = \varkappa_N$ einer Luftschraube bei Drehung des Flugzeugs.

Versuche zur Nachprüfung der Richtigkeit der theoretischen Ergebnisse bezüglich des Einflusses der Drehbewegung eines Flugzeugs auf die Schraube liegen leider nicht vor. Weil jedoch die der Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen die gleichen sind wie bei der Berechnung der Schubänderung und der Schraubenquerkraft bei Schräganblasung, so ist befriedigende Übereinstimmung der Wirklichkeit und der Theorie ohne weiteres anzunehmen.

b) Kurze Zusammenfassung des Verhaltens bei Flugzeugdrehung. Da das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_y und ω_z des Flug-

zeugs zu der Winkelgeschwindigkeit ω_p der Luftschraube aber meist nur die Größe weniger Hundertstel hat, ist der Einfluß von Drehbewegungen des Flugzeugs auf Seitenkraft und Längsmoment bzw. Normalkraft und Wendemoment wohl meist ohne Bedeutung. Die Änderung des Schubs und des Drehmoments dürfte wohl immer vernachlässigbar sein.

Das Ergebnis der Untersuchungen bezüglich des Einflusses der Flugzeugdrehung auf die Luftkräfte und Momente der Schraube möge aber noch einmal kurz zusammengefaßt werden:

Dreht das Flugzeug um seine Querachse im Sinne einer Vergrößerung der Längsneigung, so entsteht ein Längsmoment, welches im Sinne einer Längsneigungsverminderung wirkt, und zwar unabhängig vom Drehsinn der Schraube. Ist die Schraube dabei rechtsdrehend, so entsteht eine Seitenkraft, welche nach links gerichtet ist. Eine Umkehrung des Schraubendrehsinns ändert die Richtung der Seitenkraft. Eine Normalkraft und ein Wendemoment entstehen bei reiner Drehung des Flugzeugs um seine Querachse nicht.

Bei der Drehung des Flugzeugs um seine Hochachse im Sinne einer Rechtskurve ergibt sich ein Wendemoment, dessen Drehsinn der Drehbewegung des Flugzeugs entgegengesetzt ist und unabhängig ist vom Drehsinn der Schraube. Ist die Schraube dabei rechtsdrehend, so entsteht eine Normalkraft, welche nach oben gerichtet ist. Umkehrung des Schraubendrehsinns hat Richtungsänderung der Normalkraft zur Folge. Eine Seitenkraft und ein Längsmoment entstehen bei reiner Drehung des Flugzeugs um die Hochachse nicht.

Diesen Kräften und Momenten infolge Drehung des Flugzeugs sind die Kräfte und Momente, welche der jeweils augenblicklich vorhandenen Schraubenanstellung und dem Schiebewinkel entsprechen, zu überlagern.

Es soll noch bemerkt werden, daß die Kreiselmomente, welche infolge der Massenwirkungen der Luftschraubenblätter bei Drehung des Flugzeugs entstehen, eine Drehachse haben, welche um 90° versetzt ist gegenüber der Achse des resultierenden Quermoments infolge der Luftkräfte, und daß diese Kreiselmomente sehr viel größer sind als die Luftkraftmomente.

Wieweit die Kopplung der Bewegungen um die drei Hauptachsen des Flugzeugs auch noch infolge der Winkelgeschwindigkeiten des Flugzeugs bei Stabilitätsberechnungen beachtet werden muß, muß besonderen Untersuchungen überlassen bleiben. Da die einzelnen Zusammenhänge an sich leicht verständlich sind, aber ihrer Fülle wegen nicht leicht dem Gedächtnis einprägbar, möge noch gezeigt werden, wie man das Ergebnis durch eine Zahlentafel übersichtlich gestalten kann (Zahlentafel 17). In dieser Zahlentafel sind die Vorzeichen der

Zahlentafel 17. **Luftschraubenkräfte bei Anstellung und Querdrehung.**

a) Rechtsdrehende Luftschraube.

		tg α			tg β			ω_y/ω_p			ω_z/ω_p		
		Vorzeichen	Exponent	Faktor	Vorzeichen	Exponent	Faktor	Vorzeichen	Exponent	Faktor	Vorzeichen	Exponent	Faktor
Δx	Schubänderung . . .	+	2	$\varkappa_x$	+	2	$\varkappa_x$	—	2	$\dot{\varkappa}_x$	—	2	$\dot{\varkappa}_x$
Y	Seitenkraft	//////	//////	0	—	1	$\varkappa_y$	—	1	$\dot{\varkappa}_y$	//////	//////	0
Z	Normalkraft	—	1	$\varkappa_z$	//////	//////	0	//////	//////	0	—	1	$\dot{\varkappa}_z$
ΔL	Rollmomentänderung	—	2	$\varkappa_L$	—	2	$\varkappa_L$	—	2	$\dot{\varkappa}_L$	—	2	$\dot{\varkappa}_L$
M	Längsmoment . . .	//////	//////	0	—	1	$\varkappa_M$	—	1	$\dot{\varkappa}_M$	+	1	i
N	Wendemoment . . .	—	1	$\varkappa_N$	//////	//////	0	+	1	i	—	1	$\dot{\varkappa}_N$

b) Linksdrehende Luftschraube.

		tg α			tg β			ω_y/ω_p			ω_z/ω_p		
		Vorzeichen	Exponent	Faktor	Vorzeichen	Exponent	Faktor	Vorzeichen	Exponent	Faktor	Vorzeichen	Exponent	Faktor
Δx	Schubänderung . . .	+	2	$\varkappa_x$	+	2	$\varkappa_x$	+	2	$\dot{\varkappa}_x$	+	2	$\dot{\varkappa}_x$
Y	Seitenkraft	//////	//////	0	—	1	$\varkappa_y$	+	1	$\dot{\varkappa}_y$	//////	//////	0
Z	Normalkraft	—	1	$\varkappa_z$	//////	//////	0	//////	//////	0	—	1	$\dot{\varkappa}_z$
ΔL	Rollmomentänderung	+	2	$\varkappa_L$	+	2	$\varkappa_L$	+	2	$\dot{\varkappa}_L$	+	2	$\dot{\varkappa}_L$
M	Längsmoment . . .	//////	//////	0	+	1	$\varkappa_M$	—	1	$\dot{\varkappa}_M$	—	1	i
N	Wendemoment . . .	+	1	$\varkappa_N$	//////	//////	0	—	1	i	—	1	$\dot{\varkappa}_N$

Kräfte in Richtung der positiven Achsen: x-Achse nach vorn, y-Achse nach rechts, z-Achse nach unten positiv, die Vorzeichen der Momente positiv bei Rechtsdrehung in Blickrichtung dieser Achsen. Das einer rechtsdrehenden Schraube entsprechende Rollmoment ist also negativ, das einer linksdrehenden aber positiv. Jedesmal die erste Spalte gibt im normalen Bereich der Schraube dies Vorzeichen. Die zweite Spalte gibt den Exponenten, d. h. also den Grad des Einflusses. Die dritte Spalte gibt die gewählte Bezeichnung der Einflußkoeffizienten. Die Kräfte bzw. Momente erhält man hieraus durch Multiplizieren mit $\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi}{4} D^2$ bzw. $\frac{\varrho}{2} u^2 \frac{\pi}{8} D^3$. Der eingeführte Faktor i für die Massenmomente ist

$$i = \frac{J_p}{\frac{\varrho}{2} \frac{\pi}{32} D^5} \tag{39.40}$$

40. Die Luftschraube im Strömungsfelde des Flugzeugs.

a) Das Strömungsfeld des Flugzeugs am Orte der Luftschraube und der Einfluß auf die Luftschraube im allgemeinen. Die Strömungsverhältnisse der Luftschraube werden durch das Flugzeug nicht nur dadurch beeinflußt, daß sich mit der Anstellung des Flugzeugs eine Querströmung zur Luftschraube und bei Drehung des Flugzeugs auch

noch eine Drehung der Luftschraube um eine Querachse ergibt, sondern weiter auch dadurch, daß die Luftschraube nicht in einer homogenen Parallelströmung, sondern im Strömungsfelde von Rumpf bzw. Motorgondel und Tragflügel arbeiten muß.

Abb. 272 zeigt die Ergebnisse einer Ausmessung der axialen Durchflußgeschwindigkeit an einem Rumpfmodell ohne bzw. mit Flügelmodell in der Schraubenkreisebene. Statt der versuchsmäßigen Bestimmung dürfte aber im allgemeinen auch die rechnerisehe Festlegung ausreichen.

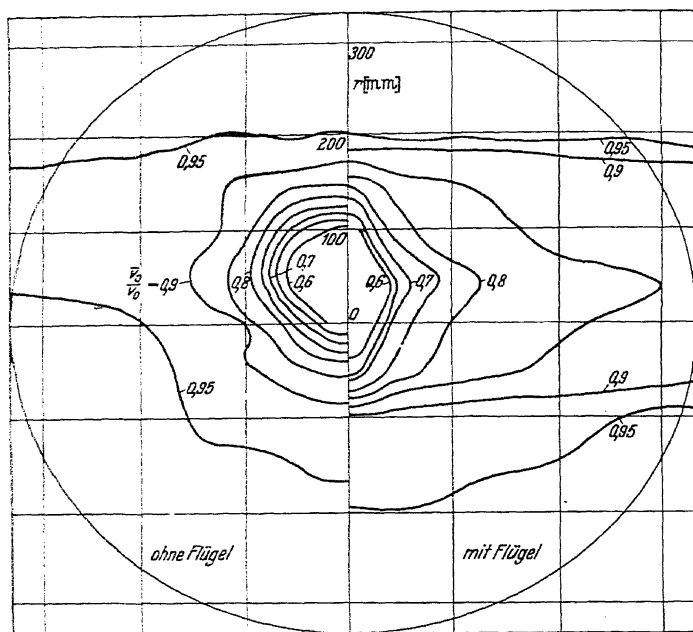



Abb. 272. Mitstromverteilung in der Schraubenkreisebene eines Tiefdeckermodells. Links ohne, rechts mit Flügel.

Abb. 273, 274 und 275 zeigen die Verteilung der Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach um ein Tragflügelprofil bei drei verschiedenen Anstellungen in idealer Strömung. Zu der Anstellung der Schraubenachse tritt also im Felde eines solchen Tragflügelprofils der in den Abbildungen angegebene Winkel ν der Tragflügelströmung. Für einen rotationssymmetrischen Körper, wie er mit einem Flugzeugrumpf in erster Näherung vergleichbar ist, ist in Abb. 276 die Strömung dargestellt. Die Anströmung erfolgt hierbei in Richtung der Längsachse. Auch die Strömungsverhältnisse bei Anstellung eines solchen rotationssymmetrischen Körpers sind der theoretischen Er-

fassung zugänglich. Ihr Einfluß dürfte jedoch meist den Einflüssen der axialen Anströmung gegenüber von geringer Bedeutung sein.

Um den Einfluß dieser Störungsströmungen zu erfassen ist aber im allgemeinen schon eine überschlägige Berücksichtigung durch entsprechende Mittelwerte erlaubt.

Ist $\mathfrak{v}_{zus}$ der Geschwindigkeitsunterschied zwischen der ungestörten Anströmung und der durch das Flugzeug gestörten Strömung, so be-

Abb. 273. Linien gleicher Richtung und gleicher Geschwindigkeit der idealen Strömung ohne Zirkulation um ein Tragflügelprofil ($\alpha_\infty = 0°$, $c_a = 0$).

sitzt $\mathfrak{v}_{zus}$ Komponenten in Richtung der Schraubenachse v_x, in Richtung der y-Achse v_y und in Richtung der $\mathfrak{z}$-Achse $v_{\mathfrak{z}}$. Das Integral der v_x über die Schraubenkreisfläche ergibt die Änderung der durch den Schraubenkreis hindurchströmende Menge infolge der Störung der Strömung

$$\psi_a = \int\limits_{=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} v_x r\, dr\, d\alpha\,. \qquad (40,1)$$

Die mittlere Änderung der Durchflußgeschwindigkeit ist damit

$$\overline{\pi R^2}\,. \qquad (40,2)$$

Abb. 274. Linien gleicher Richtung und Größe der Geschwindigkeit der idealen Strömung um ein Tragflügelprofil ($\alpha_\infty = 9{,}2°$, $c_a \approx 1{,}1$).

Abb. 275. Linien gleicher Richtung und Größe der Geschwindigkeit der idealen Strömung um ein Tragflügelprofil ($\alpha_\infty = 18{,}5°$, $c_a \approx 2{,}2$).

Ist die Schraube vor oder hinter dem Rumpf oder unter den Tragflügel angebracht, so ist $\bar{v}_x$ der ungestörten Durchflußgeschwindigkeit im allgemeinen entgegengerichtet, liegt die Schraube über den Tragflügel, so ist $\bar{v}_x$ der ungestörten Durchflußgeschwindigkeit im allgemeinen gleichgerichtet. Die Strömungsverhältnisse und damit die

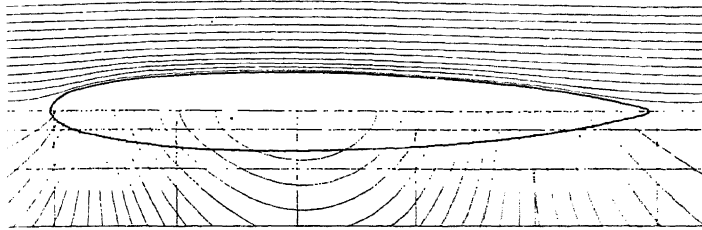



Abb. 276. Strömung um einen Rotationskörper. Oben Relativströmung, unten Absolutströmung.

Luftkräfte sind an der Schraube im wesentlichen so, als würde die Schraube bei gleicher Drehzahl frei fliegen, aber mit einem verringerten bzw. vermehrten Fortschrittsgrad

$$\bar{\lambda} = \frac{v_0 + \bar{v}_x}{u} . \tag{40, 3}$$

Die v_x-Komponenten haben aber unter Umständen noch eine weitere Wirkung. Ist oben und unten am Schraubenkreis, also in $\mathfrak{z} = +R$ bzw. $\mathfrak{z} = -R$, v_x verschieden, so wirkt dieser Unterschied bezüglich der Anströmverhältnisse der Schraube gerade so wie die Drehung der freifliegenden Schraube um die y-Achse mit einer zusätzlichen Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{y_{\text{zus}}} = \frac{v_x(z = -R) - v_x(z = +R)}{2R} \tag{40, 4}$$

Entsprechend wirkt die Verschiedenheit von v_x in $y = +R$ bzw. $y = -R$ wie eine Drehung um die z-Achse, so daß

$$\omega_{z_{\text{zus}}} = \frac{v_x(y = -R) - v_x(y = +R)}{2R} \tag{40, 5}$$

zu setzen wäre, welche Beträge bei einer Drehung des Flugzeugs den sich daraus ergebenden ω_y bzw. ω_z zu überlagern wären.

Als Folge hiervon wurde schon erkannt, daß Querkräfte in Richtung der Achse dieser scheinbaren Drehung und Quermomente um die dazu senkrechte Achse auftreten. Die Querkomponenten v_z bzw. v_y ändern die Strömungsverhältnisse im wesentlichen so, als wäre die Schraube freifliegend und angestellt, so daß

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{zus}} = \frac{\bar{v}_z}{v_0} , \qquad \operatorname{tg} \beta_{\text{zus}} = \frac{\bar{v}_y}{v_0} . \tag{40, 6}$$

Für $\bar{v}_z$ und $\bar{v}_y$ dürfen dabei die Größen in Schraubenkreismitte eingesetzt werden. Als Folge dieser zusätzlichen Anstellung der Schraube treten, wie schon beschrieben, Querkräfte in Richtung dieser Querströmung und Quermomente um eine Achse senkrecht dazu auf. Genauere theoretische Berechnungen von $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$ sind aber ziemlich umständlich und es ist erfreulich, daß für die Behandlung der Rückwirkung des Flugzeugs auf die Luftschraube Überschlagsrechnungen meistens, insbesondere aber für die übliche Zugschraubenanordnung, völlig ausreichend sind.

b) Überschlägige Bestimmung der Wirkung des Rumpfes bei üblicher Zugschraubenanordnung. Bei der üblichen Zugschraubenanordnung ist es erlaubt, den Rumpf durch einen Halbkörper zu ersetzen, wie er durch Überlagern einer Quelle und einer Parallelströmung entsteht und in Abb. 277 dargestellt ist. Die Ergiebigkeit dieser Quelle ist gegeben durch

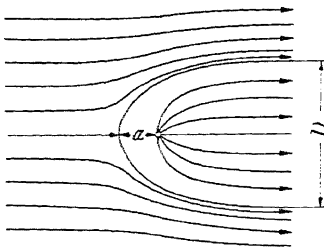



Abb. 277. Strömung an einen aus Punktquelle und Parallelströmung gebildeten Halbkörper.

$$E = v_0 \cdot \quad = v_0 \, \pi D_w^2 \tag{40, 7}$$

wenn v_0 die Fluggeschwindigkeit und $\otimes = \frac{\pi}{4} D_w^2$ den größten Rumpfquerschnitt bedeutet.

Die Quelle ist dabei auf der Rumpfachse anzubringen etwa dort, wo der Rumpfquerschnitt die Hälfte des größten Rumpfquerschnitts ist. Der Staupunkt des Halbkörpers liegt um $a = D_w/4$ vor der Quelle. Die durch diese Quelle in einem beliebigen Punkte hervorgerufene Störungsgeschwindigkeit hat die Richtung des aus dem Quellpunkt kommenden, durch ihn hindurchgehenden Radiusvektors $\mathfrak{r}$ und die Größe

$$\mathfrak{v}_{zus_R} = \frac{E}{4 \pi r^2} \tag{40,8}$$

wenn r die Entfernung von diesem Quellpunkte ist.

Liegt dieser Quellpunkt auf der Schraubenachse und ist er um x von der Schraubenmitte entfernt, so ist mit

$$\cos\vartheta = \frac{}{\sqrt{x^2 + R^2}} \tag{40,9}$$

die aus der Quelle durch den Schraubenkreis fließende Menge

$$\psi_{a_R} = \frac{E}{2} (1 - \cos\vartheta) \,. \tag{40, 10}$$

Die mittlere Normalkomponente der Störungsströmung ist also in der Schraubenkreisebene

$$\bar{v}_{xR} = \frac{\psi_{a_R}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{1-\cos\vartheta}{2} \cdot v_0 \,. \qquad (40,11)$$

Liegt der Quellpunkt, bezogen auf die Schraubenmitte als Koordinatenanfangspunkt, in x, y, z, so ist mit hinreichender Annäherung

$$\psi_{aR} = \frac{E}{2}(1-\cos\vartheta)\frac{R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\,, \qquad (40,12)$$

wobei

$$\vartheta \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}\,. \qquad (40,13)$$

Die mittlere axiale Komponente der Störungsströmung ist also in der Schraubenkreisebene

$$\bar{v}_{xR} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{1-\cos\vartheta}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta} \cdot v_0 \,. \qquad (40,14)$$

Der Unterschied der Axialkomponenten auf dem Rande des Schraubenkreises bewirkt ein

$$\omega_{y\,\mathrm{zus}} = \frac{Ex}{8\pi R}\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+(z-R)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+R)^2)^{3/2}}\right\}, \qquad (40,15)$$

$$\omega_z = \frac{Ex}{8\pi R}\left\{\frac{1}{(x^2+(y-R)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2+(y+R)^2+z^2)^{3/2}}\right\}. \qquad (40,16)$$

Die Querkomponenten der Störungsgeschwindigkeit in der Mitte des Schraubenkreises bewirken ein

$$\alpha_{\mathrm{zus}} = \frac{E}{4\pi v_0} \cdot \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \qquad (40,17)$$

$$\beta_{\mathrm{zus}} = \frac{E}{4\pi v_0} \cdot \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,. \qquad (40,18)$$

c) Überschlägige Bestimmung der Wirkung des Tragflügels bei üblicher Zugschraubenanordnung. Die durch den Tragflügel am Ort der Schraube hervorgerufene Störungsströmung läßt sich in zwei Anteile zerlegen, nämlich in den Anteil, welcher durch die zirkulationsfreie Verdrängungsströmung, und in den Anteil, welcher durch die Zirkulationsströmung hervorgerufen wird.

Liegt die Schraubenkreisebene vor der Tragflügelvorderkante (Abb. 278) oder wenigstens nicht zu weit hinter ihr, so genügt es, die Verdrängungsströmung zu ersetzen durch die eines zylindrischen Halbkörpers, wie er durch Überlagern einer zweidimensionalen Quellströmung und der Parallelströmung entsteht. Die Ergiebigkeit dieser Quelle ist

$$E = v_0 \cdot h\,, \qquad (40,19)$$

wobei h die größte Dicke des Tragflügels im Bereich der Schraube bedeutet. Die Quelle ist dabei auf der Mittellinie des Tragflügelprofils angebracht zu denken etwa dort, wo die Dicke des Profils noch die Hälfte der größten Dicke ist.

Die Zirkulationsströmung darf ersetzt werden durch einen Wirbel der Zirkulation

$$\Gamma = \frac{c_a}{2} v_0 t\,. \qquad (40, 20)$$

Hierbei ist für c_a der Auftriebsbeiwert der Tragflügelprofile im Bereich der Schraube einzusetzen und für t deren Tiefe. Der Wirbel ist dabei auf der Mittellinie des Tragflügelprofils angebracht zu denken, und zwar im Druckpunkt, d. h. etwa $t/4$ hinter der Profilvorderkante.

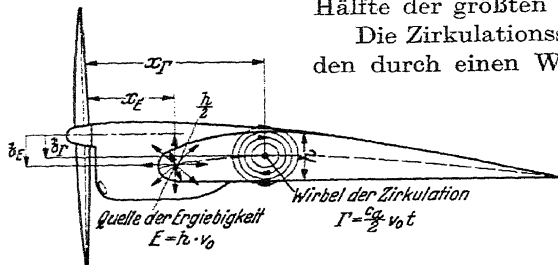



Abb. 278. Ersatz der Tragflügelströmung durch eine Quelle und einen Wirbel bei der Berechnung des Verdrängungsmitstroms am Orte einer Zugschraube.

Bezogen auf den Mittelpunkt der Schraubenkreisebene möge die Quelle in $y_E = x_E + i z_E$, der Wirbel in $y_\Gamma = x_\Gamma + i z_\Gamma$ liegen. Das komplexe Potential χ dieser Strömung ist dann gegeben durch

$$\chi = \varphi + i\psi = \frac{E}{2\pi} \ln (y - y_E) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln (y - y_\Gamma)\,. \qquad (40, 21)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_z erhält man aus

$$\frac{d\chi}{dy} = v_x - i v_z = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{1}{y - y_E} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{y - y_\Gamma}\,. \qquad (40, 22)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$v_x = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{x - x_E}{(x - x_E)^2 + (z - z_E)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_\Gamma}{(x - x_\Gamma)^2 + (z - z_\Gamma)^2}\,,$$

$$v_z = -\frac{E}{2\pi} \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_E}{(x - x_E)^2 + (z - z_E)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_\Gamma}{(x - x_\Gamma)^2 + (z - z_\Gamma)^2} \qquad (40, 23)$$

Die durch den Schraubenkreis ($x = 0$) strömende Menge ist in guter Annäherung, wenn die Schraubenachse parallel ist der x-Achse:

$$\psi_a = 2R \frac{E}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\pi}{2} x_E R}{x_E^2 + z_E^2 - \frac{\pi^2}{16^2} R^2} - 2R \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{x_\Gamma^2 + \left(z_\Gamma + \frac{\pi}{4} R\right)^2}{x_\Gamma^2 + \left(z_\Gamma - \frac{\pi}{4} R\right)^2} \qquad (40, 24)$$

und damit die mittlere Änderung der Durchströmgeschwindigkeit der Schraubenkreisfläche

$$\bar{v}_x = \frac{\psi_a}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{E}{2\pi}}{\frac{\pi D}{4}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\pi}{2} x_E R}{x_E^2 + z_E^2 - \frac{\pi^2}{16} \cdot R^2} - \frac{\frac{\Gamma}{4\pi}}{\frac{\pi D}{4}} \ln \frac{x_\Gamma^2 + \left(z_\Gamma + \frac{\pi}{4} R\right)^2}{x_\Gamma^2 + \left(z_\Gamma - \frac{\pi}{4} R\right)^2}\,. \qquad (40, 25)$$

Der Unterschied der Axialkomponenten auf dem Rande des Schraubenkreises bewirkt ein

$$\omega_{y_{zus}} = -\frac{E\,x_E}{4\pi R}\left(\frac{1}{x_E^2 + (R - z_E)^2} + \frac{1}{x_E^2 + (R + z_E)^2}\right)$$
$$+ \frac{\Gamma}{4\pi R}\left(\frac{R - z_\Gamma}{x_\Gamma^2 + (R - z_\Gamma)^2} - \frac{R + z_\Gamma}{x_\Gamma^2 + (R + z_\Gamma)^2}\right) \qquad (40, 26)$$
$$\omega_{z_{zus}} \equiv 0\,.$$

Die Querkomponente der Störungsgeschwindigkeit in der Mitte des Schraubenkreises bewirkt ein

$$\alpha_{zus} = \frac{E}{2\pi v_0}\,\frac{z_E}{x_E^2 + z_E^2} - \frac{\Gamma}{2\pi v_0}\cdot\frac{x_\Gamma}{x_\Gamma^2 + z_\Gamma^2} \qquad (40, 27)$$
$$\beta_{zus} \equiv 0\,.$$

d) Die Änderung der auf die Schraube wirkenden Luftkräfte durch das Strömungsfeld des Flugzeugs. Die durch die zusätzlichen Anstell- und Schiebewinkel α_{zus} bzw. β_{zus} und die zusätzlichen Drehungen $\omega_{y_{zus}}$ bzw. $\omega_{z_{zus}}$ bewirkten Änderungen der auf die Schraube wirkenden Luftkräfte und deren Momente können sehr leicht mit Hilfe der in Abschnitt 38 und 39 abgeleiteten Ergebnisse berechnet werden. Zu bemerken ist dabei nur, daß diese Anteile an den gesamten Luftschraubenkräften zum Teil Gegenkräfte an Rumpf und Tragflügel auslösen, so daß sie zu diesem Teil als innere Kräfte und Momente zwischen Schraube und Flugzeugrumpf und Tragflügel wirken. Nach außen hin tritt also nur der übrigbleibende Anteil in Erscheinung.

Anders ist dies mit der Änderung des Schubes der Luftschraube infolge der Änderung der Axialkomponente der Durchflußgeschwindigkeit. Dieser Änderung des Schubs wirkt, wie in Abschnitt 24 dargelegt wurde, eine entgegengesetzt gleiche Widerstandskraft am Flugzeug entgegen. Diese Schub- bzw. Widerstandsänderung sind also innere Kräfte. Sie können sehr leicht mit Hilfe der Ergebnisse des Abschnitts 24 berechnet werden. Diese Schubänderung S_i führt den Namen Schraubensog. Er ist bei Zugschrauben

$$S_i = \xi \cdot \bar{S} = \left(1 - \frac{\bar{v}_x}{v_0}\right)\bar{S} \qquad (40, 28)$$

also aus dem Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}_x$ zur Fluggeschwindigkeit v_0 und dem Drucklagerschub $\bar{S}$ leicht zu bestimmen.

41. Die Düsenschraube.

a) Die Erzeugung eines starken Vorstroms durch eine Düse. Wenn man von Drallverlusten und Reibungsverlusten absieht, so ergibt sich, daß der Wirkungsgrad einer Luftschraube um so größer ist, je kleiner die axialen Austrittsverluste, d. h. je kleiner die der durch die Schraube

strömenden Luft erteilte axiale Zusatzgeschwindigkeit ist. Daraus ergibt sich, daß der Luftschraubenwirkungsgrad um so größer ist, je mehr Luft durch die Schraube beschleunigt wird, da dann zur Erzeugung des gleichen Schubs eine kleinere Zusatzgeschwindigkeit nötig ist. Die von der Luftschraube erfaßte Luftmenge ist aber umso größer, je größer z. B. die durch das Flugzeug in Richtung der Schraubenströmung erzeugte Zusatzgeschwindigkeit, d. h. der Gegenstrom ist. Es besteht daher unter Umständen der Wunsch nach einem großen Gegenstrom in der Schraubenkreisebene. Eine solche in Richtung der Schraubenströmung verlaufende Zusatzströmung ist z. B. über einem Tragflügel vorhanden, so daß Schrauben oberhalb eines Tragflügels, wie dies z. B. bei manchen Seeflugzeugen der Fall ist, unter Umständen einen besseren Wirkungsgrad haben als Schrauben üblicher Anordnung. Als ein weiteres geeignetes Mittel, einen solchen Gegenstrom zu erzeugen, erscheint nun ein düsenartiger Ringkörper. In einem solchen Ringkörper hat man die Luftschraube anzubringen, wenn man zur Verbesserung des Wirkungsgrades den Gegenstrom vergrößern will. Allerdings wirken diesem erstrebten Erfolg Reibungsverluste entgegen, so daß die Frage der Verwendbarkeit einer Düsenschraube eingehend untersucht werden muß. Vorerst soll jedoch hier noch von der Reibung abgesehen werden.

Abb. 279. Schema einer Düsenschraube.

Abb. 280. Strömung durch eine Düsenschraube bei Schubfreiheit.
a) Relativströmung. b) Absolutströmung.

Um das Arbeiten der Schraube in einer Düse behandeln zu können, ist es zweckmäßig, sich zuerst über die achsensymmetrische Strömung durch eine solche Düse ohne Schraube klarzuwerden. Man wird die Düse zweckmäßig mit einer scharfen Austrittskante versehen (Abb. 279). Diese Kante ist dann Abflußkante der Strömung und damit sie das wird, wird sich im allgemeinen eine Zirkulation um den Düsenmantel ausbilden. Die Düse wird also zum Sitze ringförmiger Wirbel. Mit Hilfe des Netzverfahrens dürfte es nicht schwer fallen, die Strömung durch und um eine Düse bei geradliniger Bewegung und Schubfreiheit zu bestimmen (Abb. 280). Durch Abzug der Transportströmung erhält man dann die Absolutströmung, die die gesuchte Verdrängungsströmung

darstellt. Im Düseninnern ist also immer ein Verdrängungsgegenstrom vorhanden. Diese Strömung wird sich bei Reibungsfreiheit einstellen, wenn in der Düse keine Schraube ist oder diese Schraube keinen Schub erzeugt und die Düsenhinterkante Zusammenflußlinie der Strömung ist.

Eine zweite wichtige Strömung ist die Strömung am Stand, d. h. die Strömung, bei der im Unendlichen die Luft ruht, in der Düse jedoch durch die Schraube ein Drucksprung erzeugt wird (Abb. 281). Die von allen Seiten dadurch angesaugte Luft verläßt dann die Düse als freier Strahl. Als Randbedingung für diese Strahlgrenze ergibt sich, daß der Unterschied der Geschwindigkeitshöhen $\frac{v_i^2 - v_a^2}{2g}$ innerhalb und außerhalb des Strahls überall gleich ist der Förderhöhe H der Schraube. Da aber hierbei die Geschwindigkeit außerhalb des Strahls, wenn die Düse nicht zu kurz ist, erheblich kleiner ist als die Geschwindigkeit im Innern des Strahls, so ergibt sich, daß in erster Näherung die Geschwindigkeit auf der Strahloberfläche konstant sein muß.

Abb. 281. Strömung durch eine Düsenschraube am Stand.

Vergleicht man nun diese Strahlgrenze mit der von der Düsenhinterkante abgehenden Stromlinie der vorhin betrachteten Strömung bei geradliniger Bewegung der Düse, so findet man, daß diese beiden Linien praktisch nur wenig voneinander abweichen, und zwar um so weniger, je mehr sich die Form der Düse der eines Zylinders nähert. Bei beliebiger Fluggeschwindigkeit und beliebigem Drucksprung liegen die Strahlgrenzen aber zwischen diesen beiden Grenzfällen. Man kann daher mit hinreichender Annäherung annehmen, daß diese Strahlgrenze sich nicht wesentlich ändert. Am meisten interessiert nun das Erweiterungsverhältnis des Strahlquerschnitts weit hinter der Düse F_∞ gegenüber dem engsten Querschnitt F_e, an dem sich die Schraube befindet.

Da es nun, wie wir sehen werden, mehr auf die Größe F_∞ ankommt, welche am Stand ($\lambda_0 = 0$) dem freien Strahl entspricht, als auf die, welche von der von der Hinterkante der Düse beim Schub Null ($\lambda_0 = \lambda^*$) ausgehenden Strömungsfläche umschlossen wird, so ist es erwünscht, eine Abschätzung für diese Erweiterung zu kennen. Zu einer brauchbaren Abschätzung kommt man mit Hilfe der ebenen Strömung, da die Querschnittsänderung eines achsensymmetrischen Strahls nähe-

rungsweise gleich ist der bei ebener Strömung unter sonst gleichen Verhältnissen [Lit. 135]. Bezeichnet F_a den Austrittsquerschnitt der Düse, F_∞ den Strahlquerschnitt weit hinter der Düse, ϑ den Neigungswinkel der Düseninnenseite in Nähe der Austrittskante gegen die Düsenachse, so ist

$$\frac{F_a}{F_\infty} \approx 1 - 0{,}45\,\vartheta\,. \tag{41, 1}$$

Dieses Verhältnis ist also umso günstiger, je größer ϑ ist. Praktisch dürfte der Winkel ϑ bis etwa 4° betragen dürfen, wenn man nicht die bei Überschreitung dieses Winkels eintretende Ablösung durch geeignete Maßnahmen, z. B. Absaugen, wie in Abb. 279 schematisch angedeutet ist, verhindert.

Durch die Düse fließt, wenn v_a die Zusatzgeschwindigkeit im erzeugten Strahl ist

$$\dot{m} = \varrho F_\infty (v + v_a)\,.$$

Das Vorstromverhältnis in der Schraubenkreisebene ist in erster Näherung

$$\frac{\bar{v}}{v} = \frac{F_\infty}{F_s}\,. \tag{41, 2}$$

Bei allen Rechnungen wird als Bezugsfläche zweckmäßig F_∞ genommen.

b) Die Verhältnisse am Stand bei einer gegenläufigen Düsenschraube mit kleinem Spalt. Wir wollen nunmehr das Verhalten am Stand, d. h. für $\lambda_0 = 0$ für ideale Verhältnisse untersuchen. Die Zusatzgeschwindigkeit v_{a_0} möge konstant über F_∞ verteilt sein. Ein Drall möge durch Gegenläufigkeit der Schrauben oder durch einen Leitapparat vermieden sein. Ist die erteilte Austrittsgeschwindigkeit $\Delta_0 v = v_{a_0}$, so wird der Standschub der Düse und der Schraube

$$S_0 = \dot{m} \cdot \Delta v = \varrho F_\infty v_{a_0}^2 = \varrho F_s \left(\frac{F_\infty}{F_s}\right) v_{a_0}^2\,. \tag{41, 3}$$

Der auf die Schraube selbst wirkende Schub ist

$$\bar{S}_0 = F_s \Delta p_{\text{ges}} = \frac{\varrho}{2} F_s v_{a_0}^2\,, \tag{41, 4}$$

somit der auf die Düse wirkende Sog

$$S_{i0} = \bar{S}_0 - S_0 = -\frac{\varrho}{2} v_{a_0}^2 (2F_\infty - F_s)\,. \tag{41, 5}$$

Die aufgewandte Leistung ist mit $\dot{Q} = \gamma F_\infty v_{a_0}$, $H = \frac{v_{a_0}^2}{2g}$

$$N_0 = \dot{Q} \cdot H = \frac{\varrho}{2} F_\infty v_{a_0}^3 = \frac{\varrho}{2} F_s \left(\frac{F_\infty}{F_s}\right) v_{a_0}^3\,. \tag{41, 6}$$

Der Standschubgütegrad wird somit bei Reibungsfreiheit und idealer Schubverteilung (17,5)

$$\xi_s = \frac{S_0}{2^{1/3} \varrho^{1/3} F_\infty^{1/3} N_0^{2/3}} = 2^{1/3} \doteq 1{,}26\,, \tag{41, 7}$$

also das 1,26fache von dem einer Schraube der Kreisfläche F_∞ ohne Düse. Würde man aber den idealen Gütegrad auf die Schraubenkreisfläche F_s beziehen, so wäre er

$$\xi_s = 2^{1/3}\left(\frac{F_\infty}{F_s}\right)^{1/3}. \tag{41, 8}$$

Der Vergleich fiele dann erst recht zugunsten der Düsenschraube aus. Noch mehr wird dies der Fall, wenn man bedenkt, daß bei der Düsenschraube, abgesehen von geringen Spaltströmungen, kein Umströmen der Flügelenden und damit kein Leistungsabfall nach den Flügelenden zu auftritt, wodurch der wirksame Durchmesser der Schraube ohne Düse verringert, also kleiner als der tatsächliche Durchmesser wird. Die Standschubziffer und die Standdrehmomentziffer der Düsenschraube bezogen auf den Strahlquerschnitt F_∞ sind, wenn man

$$R_\infty = \sqrt{\frac{F_\infty}{\pi}}, \qquad U_\infty = R_\infty \omega$$

setzt,

$$k_{s_0} = \frac{S_0}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^2 \pi R_\infty^4} = 2\frac{v_{a_0}^2}{U^2}, \tag{41, 9}$$

$$k_{d_0} = \frac{N_0}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^3 \pi R_\infty^5} = \frac{v_{a_0}^3}{U_\infty^3}. \tag{41, 10}$$

Für die Standschubzahl ergibt sich

$$\sigma_0 = \frac{k_{s_0}}{k_{d_0}} = 2\frac{U_\infty}{v_{a_0}}. \tag{41, 11}$$

c) Schub und Leistung einer gegenläufigen Düsenschraube mit kleinem Spalt bei beliebigem Fortschrittsgrad. Die Leistung läßt sich auch bei beliebigem Fortschrittsgrad als Produkt des Fördergewichts $\dot G$ und der Förderhöhe H darstellen. Es ist

$$\dot G = \gamma F_\infty (v + v_a),$$
$$H = \frac{(v+v_a)^2 - v^2}{2g}.$$

Somit

$$N = \dot G \cdot H = \frac{\varrho}{2} F_\infty (v + v_a)\,[(v+v_a)^2 - v^2] \tag{41, 12}$$

oder

$$\frac{N}{N_0} = \frac{(v+v_a)\,[(v+v_a)^2 - v^2]}{v_{a_0}^3} = \frac{k_d}{k_{d_0}}. \tag{41, 13}$$

Nach der Turbinenleistungsgleichung ist aber auch für eine gegenläufige Schraube (14, 16)

$$N = N_I + N_{II} = \varrho\,(\Gamma_I + \Gamma_{II})\frac{\omega}{2\pi}\frac{\dot G}{\gamma} = \frac{\varrho(\Gamma_I + \Gamma_{II})\omega}{2\pi} F_\infty (v + v_a). \tag{41, 14}$$

Hierbei ist, wenn v_u die in irgendeinem Radius r in der ersten Schraube erzeugte Umfangskomponente bzw. in der zweiten Schraube wieder umgekehrte Umfangskomponente ist,

$$\Gamma_I = \Gamma_{II} = 2\pi r v_u .$$

Nach dem in Abschnitt 20 abgeleiteten Geradliniengesetz ist aber (Abb. 187)

$$2 v_u = \frac{v^* - (v + v_a)}{v^* - v_{a_0}} 2 v_{u_0} \tag{41, 15}$$

und wegen

$$N_0 = \varrho 2 v_{u_0} u F_\infty v_{a_0}, \quad 2 v_{u_0} = \frac{N_0}{\varrho u F_\infty v_{a_0}}$$

$$\frac{(\Gamma_I + \Gamma_{II})\omega}{2\pi} = 2 u v_u = \frac{v^* - (v + v_a)}{v^* - v_{a_0}} \frac{N_0}{\varrho F_\infty v_{a_0}} .$$

Also ist

$$\frac{N}{N_0} = \frac{[v^* - (v + v_a)](v + v_a)}{v_{a_0}(v^* - v_{a_0})} = \frac{k_d}{k_{d_0}} . \tag{41, 16}$$

Zur Bestimmung von v_a bzw. $v + v_a$ in Abhängigkeit von v erhalten wir also durch Gleichsetzen von Gl. (41, 13) und Gl. (41, 16)

$$(v^* - v_{a_0})[(v + v_a)^2 - v^2] = v_{a_0}^2[v^* - (v + v_a)],$$

$$(v + v_a)^2 + \frac{v_{a_0}^2}{2(v^* - v_{a_0})} 2(v + v_a) = v^2 + \frac{v_{a_0}^2}{v^* - v_{a_0}} v^*,$$

$$v + v_a = -\frac{v_{a_0}^2}{2(v^* - v_{a_0})} + \sqrt{v^2 + \frac{v_{a_0}^2}{v^* - v_{a_0}} v^* + \left[\frac{v_{a_0}^2}{2(v^* - v_{a_0})}\right]^2},$$

$$\frac{v}{v^*} + \frac{v_a}{v^*} = -\frac{\left(\frac{v_{a_0}}{v^*}\right)^2}{2\left(1 - \frac{v_{a_0}}{v^*}\right)} + \sqrt{\left(\frac{v}{v^*}\right)^2 + \left[\frac{\frac{v_{a_0}}{v^*}\left(2 - \frac{v_{a_0}}{v^*}\right)}{2\left(1 - \frac{v_{a_0}}{v^*}\right)}\right]^2} . \tag{41, 17}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (41, 13) oder Gl. (41, 16) erhält man k_d/k_{d_0} in Abhängigkeit von v_{a_0}/v^* und v/v^*, wie dies Abb. 282 zeigt.

Der von der Düse und der Schraube erzeugte Schub ist

$$S = \varrho F_\infty (v + v_a) v_a . \tag{41, 18}$$

Es ist also

$$\frac{S}{S_0} = \frac{(v + v_a) v_a}{v_{a_0}^2} = \frac{(v + v_a)[(v + v_a) - v]}{v_{a_0}^2} = \frac{k_s}{k_{s_0}} . \tag{41, 19}$$

Durch Einsetzen des errechneten Wertes $\frac{v + v_a}{v^*}\left(\frac{v}{v^*}, \frac{v_{a_0}}{v^*}\right)$ erhält man also auch k_s/k_{s_0} in Abhängigkeit von v_{a_0}/v^* und v/v^*, wie dies Abb. 283 zeigt.

Auf die Schraube selbst wirkt nur der Schub

$$S = \Delta p_{\text{ges}} F_s = \frac{\varrho}{2}[(v + v_a)^2 - v^2] F_s = \frac{\varrho}{2} F_s v_a (2v + v_a) . \tag{41, 20}$$

Die auf die Düse wirkende innere Kraft, der Sog, ist also

$$S_i = \bar{S} - S = \frac{\varrho}{2} v_a [F_s (2v - v_a) - 2F_\infty (v + v_a)]$$
$$= -\frac{\varrho}{2} v_a [2v(F_\infty - F_s) + v_a (2F_\infty - F_s)]. \tag{41, 21}$$

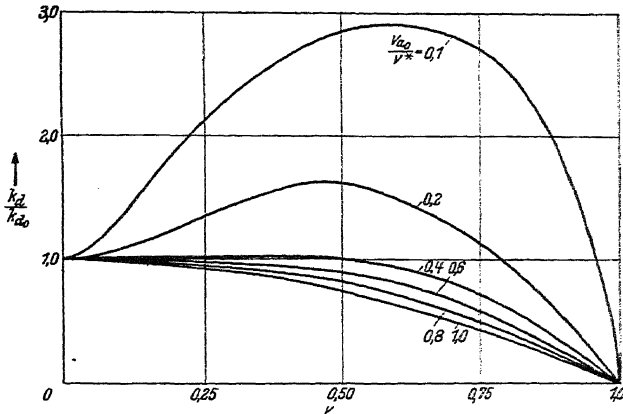



Abb. 282. Die Änderung der Leistungsziffer einer Düsenschraube mit der Fluggeschwindigkeit für verschieden stark belastete Schrauben.

Das Verhältnis des Gesamtschubes S zum Schraubenschub $\bar{S}$ ist

$$\frac{S}{\bar{S}} = \frac{F_\infty (2v + 2v_a)}{F_s (2v + v_a)} \tag{41, 22}$$

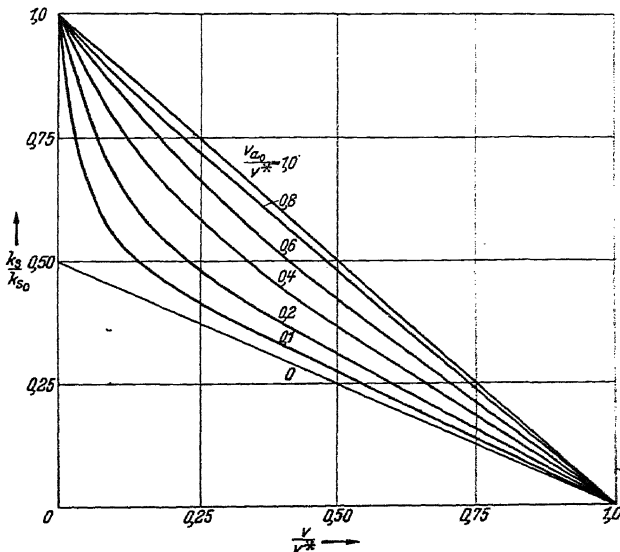



Abb. 283. Die Änderung der Schubziffer einer Düsenschraube mit der Fluggeschwindigkeit für verschieden stark belastete Schrauben.

oder bei kleinem v_a/v

$$\frac{S}{\bar{S}} = \frac{F_\infty}{F_s} . \tag{41, 23}$$

Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{vS}{N} = \frac{2\, v_a\, v}{(v + v_a)^2 - v^2} = \frac{2[(v + v_a) - v]\, v}{(v + v_a)^2 - v^2} . \tag{41, 24}$$

Mit Hilfe des nach Gl. (41, 17) zu errechnenden $\frac{v + v_a}{v^*}$ läßt sich also auch leicht der ideelle Wirkungsgrad in Abhängigkeit von v_{a_0}/v^* und v/v^* darstellen. Das Ergebnis ist in Abb. 284 veranschaulicht. Diese Ergeb-

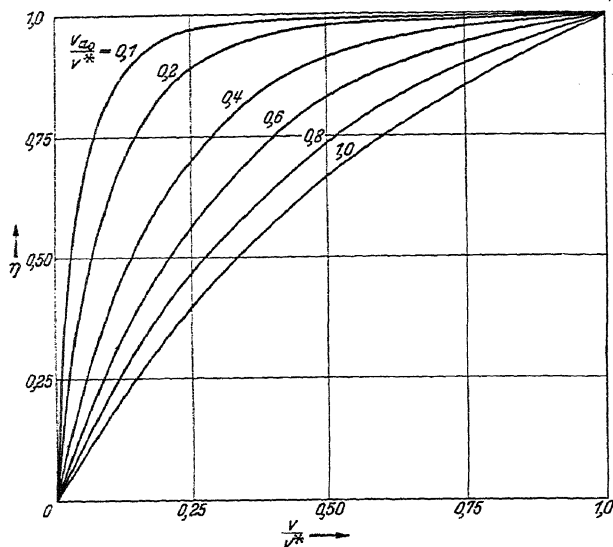



Abb. 284. Die Änderung des Wirkungsgrades einer Düsenschraube mit der Fluggeschwindigkeit für verschieden stark belastete Schrauben.

nisse gelten für die drehmomentausgeglichene gegenläufige Düsenschraube. Im Falle einfacher Schrauben würden gewisse, allerdings nicht erhebliche Abänderungen eintreten, die jedoch hier nicht untersucht werden sollen.

d) Vergleich einer üblichen Schraube ohne Düse mit einer gegenläufigen Düsenschraube. Man kann nun die Ergebnisse für die gegenläufige Düsenschraube mit denen einer üblichen Schraube ohne Düse vergleichen. Als Durchmesser der Vergleichsschraube wählt man zweckmäßig den Strahldurchmesser der Düsenschraube und als Grundlage Gleichheit der Leistung am Stand und gleiche aerodynamische Steigung.

Für Fortschrittsgrade in Nähe des Schubs $S = 0$ sind die idealen Wirkungsgrade nicht wesentlich verschieden. In Nähe der Standverhältnisse aber ist der Wirkungsgrad der gegenläufigen Düsenschraube

dem der freifliegenden gegenläufigen Schraube offenbar wesentlich überlegen. Der Standschubgütegrad ist das $2^{1/3} = 1{,}26$*fache* gegenüber dem einer düsenlosen Schraube ohne Drallverluste, wenn als Vergleichsfläche bei der Düsenschraube der Strahlquerschnitt F_∞ und bei der düsenlosen Schraube die gleiche Fläche als Schraubenkreisfläche zugrunde gelegt wird. Wählt man jedoch als Kreisfläche der Vergleichsschraube in beiden Fällen die engste Querschnittsfläche F_s der Düsenschraube, so wird der Vergleich für die Düsenschraube noch wesentlich günstiger.

Am auffälligsten ist aber, daß die Linien der ideellen Leistungsziffer der Düsenschraube zum Teil außerordentlich flach verlaufen. Die Abhängigkeit des Drehmomentes der Luftschraube von der Fluggeschwindigkeit wird dadurch in den wichtigsten Betriebsbereichen unter Umständen so gering, daß die Notwendigkeit der Verwendung von Verstellschrauben durch die Verwendung von Düsenschrauben u. U. umgangen werden kann. Erfreulich ist dabei außerdem der erhebliche Anstieg der Schubziffer gegen die Standverhältnisse hin, was mehr als durch die Gleichmäßigkeit der Leistungsziffer durch das gleichbleibende Kontraktionsverhältnis bedingt ist. Da bei gleichem Standschub die Düsenschraube wesentlich kleiner wird als die übliche düsenlose Schraube, kann ihre Drehzahl größer sein als die der düsenlosen Schraube. Können aber dadurch Untersetzungsgetriebe des Motors und Verstellmechanismus entbehrt werden, so wird unter Umständen das Gewicht des Düsenmantels tragbar. Liegt der Motor innerhalb der Düse, so ist allerdings auf dessen sehr sorgfältige Verkleidung zu achten. Für die Kühlverhältnisse des Motors ist die Düsenschraube offenbar ebenfalls vorteilhaft; insbesondere ist die Kühlung schon am Stand sehr wirksam. Die aufgeführten Vorteile der Düsenschraube dürften bei richtiger Dimensionierung die vermehrten Reibungsverluste und die konstruktiven Schwierigkeiten aufwiegen, so daß künftig öfter als bisher Düsenschrauben auch beim Flugzeug Verwendung finden können. Während diese bei Wasserfahrzeugen ein breites Anwendungsgebiet gefunden haben, wurde die Düsenschraube beim Flugzeug bisher nur in Ausnahmefällen verwendet.

e) **Der Schub einer Schraube in einem geschlossenen Windkanal als einer Düsenschraube mit großem Spalt.** Bisher haben wir den Spalt zwischen Schraube und Düse als klein behandelt, wie dies ja bei einer Düsenschraube, wenn eine solche für Flugzeuge in Betracht kommen sollte, angestrebt werden muß. Ist der Spalt sehr groß, so hat man es mit Verhältnissen zu tun, wie sie bei der Untersuchung einer Luftschraube in einem geschlossenen Windkanal vorliegen, d. h. in einem Windkanal mit fester Begrenzung des Windstromquerschnitts. Während aber bei der Untersuchung der Düsenschraube unser Interesse

dem wirksamen Schub gegolten hat, gilt es bei der Schraube im Windkanal dem Drucklagerschub. Dieser wird beim Versuch ermittelt und ist auch der bei der Übertragung des Windkanalversuchs tatsächlich in Betracht kommende Schraubenschub. Aber die Anblasegeschwindigkeit, welche bei Übertragung auf die freifliegende Schraube in Betracht kommt, ist durch die Kanalverhältnisse geändert. Diese soll nunmehr bestimmt werden. Die im folgenden benutzten Bezeichnungen werden durch Abb. 285 erläutert. Die Verhältnisse der entsprechenden, d. h. schubgleichen freifliegenden Schraube mögen durch * bezeichnet werden. Diese ist dadurch der Schraube im Windkanal zugeordnet, daß

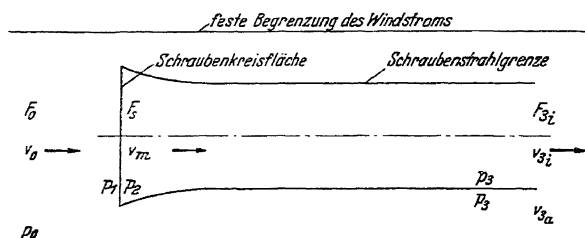



Abb. 285. Schema der Schraubenströmung beim Versuch in einem geschlossenen Windkanal.

die Strömungsverhältnisse beim Durchströmen der Schraubenkreisebene die gleichen sind. Die Zuordnung ist also gegeben durch

$$v_m^* = v_m , \tag{41, 25}$$

d. h. durch die Gleichheit der Strömungsgeschwindigkeit beim Durchtritt durch die Schraubenkreisebene.

Es ist mit F_s als Schraubenkreisfläche

$$c_s^* = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} v_0^{*\,2} F_s}, \qquad c_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 F_s},$$

$$\lambda_0^* = \frac{v_0^*}{u}, \qquad \lambda_0 = \frac{v_0}{u}.$$

Mit $v_0^*/v_0 = \varkappa$ wird also für Schubbelastungsgrad und Fortschrittsgrad

$$c_s^* = \frac{c_s}{\varkappa^2}, \tag{41, 26}$$

$$\lambda^* = \varkappa \lambda . \tag{41, 27}$$

Der Schub der freifliegenden Schraube ist mit $v_m^* = v_m$

$$S = \varrho F_s v_m 2 (v_m - v_0^*) . \tag{41, 28}$$

Damit wird

$$\varkappa = \frac{v_0^*}{v_0} = \frac{v_m}{v_0} - \frac{S}{4 \frac{v_m}{v_0} \frac{\varrho}{2} v_0^2 F_s} = \frac{v_m}{v_0} - \frac{c_s}{4 \frac{v_m}{v_0}} . \tag{41, 29}$$

Unsere Aufgabe besteht also darin, aus gegebenem c_s und F_s/F_0, v_m/v_0 und damit $\varkappa$ zu berechnen.

Nach der Kontinuitätsgleichung ist

$$F_{3i} v_{3i} = F_s v_m , \tag{41, 30}$$

$$(F_0 - F_{3i}) v_{3a} = F_0 v_0 - F_s v_m . \tag{41, 31}$$

Also

$$\frac{v_{3i}}{v_0} = \frac{F_s}{F_{3i}} \frac{v_m}{v_0} \tag{41, 32}$$

$$\frac{v_{3a}}{v_0} = \frac{F_0 - F_s \frac{v_m}{v_0}}{F_0 - F_{3i}} = \frac{1 - \frac{F_s}{F_0} \frac{v_m}{v_0}}{1 - \frac{F_{3i}}{F_0}} . \tag{41, 33}$$

Ferner ist nach der Kontinuitätsgleichung

$$v_{3i} F_{3i} + v_{3a}(F_0 - F_{3i}) = v_0 F_0 . \tag{41, 34}$$

Die Änderung des Gesamtdrucks beim Durchströmen der Schraube ist

$$\Delta p_{\text{ges}} = \frac{\varrho}{2} (v_{3i}^2 - v_{3a}^2) = p_2 - p_1 . \tag{41, 35}$$

Dies ist aber auch der Drucksprung beim Durchströmen der Schraubenkreisebene. Der Schraubenschub ist also nach der Drucksprungtheorie

$$S = F_s \frac{\varrho}{2} (v_{3i}^2 - v_{3a}^2) . \tag{41, 36}$$

Den Schraubenschub kann man auch nach dem Impulssatz berechnen. Er ist, da der Druckunterschied zwischen einem Querschnitt weit hinter der Schraube und weit vor der Schraube

$$\Delta p_{\text{stat}} = \frac{\varrho}{2} (v_0^2 - v_{3a}^2) = p_3 - p_0 \tag{41, 37}$$

ist,

$$S = F_0 \frac{\varrho}{2} (v_0^2 - v_{3a}^2) + \varrho [F_{3i} v_{3i} (v_{3i} - v_0) + (F_0 - F_{3i}) v_{3a} (v_{3a} - v_0)] ,$$

$$S = F_0 \frac{\varrho}{2} (v_0^2 - v_{3a}^2) + \varrho F_{3i} v_{3i}^2 + \varrho (F_0 - F_{3i}) v_{3a}^2 - \varrho v_0 [F_{3i} v_{3i} + (F_0 - F_{3i}) v_{3a}] \tag{41, 38}$$

oder wegen der Kontinuitätsgleichung (41, 34) nach Zusammenfassen

$$S = 2 F_{3i} \frac{\varrho}{2} (v_{3i}^2 - v_{3a}^2) - F_0 \frac{\varrho}{2} (v_0^2 - v_{3a}^2) . \tag{41, 39}$$

Aus (41, 36) wird

$$v_{3i}^2 - v_{3a}^2 = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} F_s} .$$

Aus (41, 39) wird

$$v_{3i}^2 - v_{3a}^2 \left(1 - \frac{F_0}{2 F_{3i}}\right) = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} \cdot 2 F_{3i}} + \frac{F_0}{2 F_{3i}} v_0^2 .$$

Hiermit erhalten wir

$$\left(\frac{v_{3a}}{v_0}\right)^2 = 1 - c_s\left(\frac{2F_{3i}}{F_0} - \frac{F_s}{F_0}\right), \tag{41, 40}$$

$$\left(\frac{v_{3i}}{v_0}\right)^2 = 1 + c_s\left(1 + \frac{F_s}{F_0} - \frac{2F_{3i}}{F_0}\right). \tag{41, 41}$$

Wegen (41, 33) und (41, 32) ist aber auch

$$\left(\frac{v_{3a}}{v_0}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2}\,; \qquad \left(\frac{v_{3i}}{v_0}\right)^2 = \frac{\left(\frac{F_s}{F_0}\right)^2}{\left(\frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2}\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^2.$$

Durch Gleichsetzen und Umformen erhalten wir damit

$$\left(1-\frac{F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0}\right)^2=\left(1-\frac{2F_{3i}}{F_0}\right)\left[1-c_s\left(\frac{2F_{3i}}{F_0}-\frac{F_s}{F_0}\right)\right]+\left(\frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2\left[1-c_s\left(\frac{2F_{3i}}{F_0}-\frac{F_s}{F_0}\right)\right], \tag{41,42}$$

$$\left(1 - \frac{F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0}\right)^2 = 1 - \frac{2F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0} + c_s\left(\frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2 + \left(\frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2\left[1 - c_s\left(\frac{2F_{3i}}{F_0} - \frac{F_s}{F_0}\right)\right] \tag{41, 43}$$

und hieraus

$$\left(1 - \frac{2F_{3i}}{F_0}\right)\left[1 - c_s\left(\frac{2F_{3i}}{F_0} - \frac{F_s}{F_0}\right)\right] = 1 - \frac{2F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0} + c_s\left(\frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2$$
$$= 2\left(1 - \frac{F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0}\right) - \left[1 - c_s\left(\frac{F_{3i}}{F_0}\right)^2\right],$$

also

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{F_{3i}/F_0}{F_s/F_0} - \frac{c_s}{2F_s/F_0}\left[\frac{F_s}{F_0}\left(1 - 2\frac{F_{3i}}{F_0}\right) - \frac{F_{3i}}{F_0}\left(2 - 3\frac{F_{3i}}{F_0}\right)\right]. \tag{41, 44}$$

Mit

$$1 - \frac{F_s}{F_0}\frac{v_m}{v_0} = 1 - \frac{F_{3i}}{F_0} + \frac{c_s}{2}\left[\frac{F_s}{F_0}\left(1 - 2\frac{F_{3i}}{F_0}\right) - \frac{F_{3i}}{F_0}\left(2 - 3\frac{F_{3i}}{F_0}\right)\right]$$

wird aus (41, 42) oder (41, 43) erhalten

$$4\frac{F_{3i}}{F_0}\left(1 - \frac{F_{3i}}{F_0}\right)\left(\frac{F_s}{F_0} - \frac{F_{3i}}{F_0}\right) = c_s\left[\frac{F_s}{F_0}\left(1 - 2\frac{F_{3i}}{F_0}\right) - \frac{F_{3i}}{F_0}\left(2 - 3\frac{F_{3i}}{F_0}\right)\right]^2. \tag{41, 45}$$

Dies ist eine Gleichung 4. Ordnung zur Bestimmung von F_{3i}/F_0 in Abhängigkeit von F_s/F_0 und c_s. Die Auflösung kann z. B. graphisch geschehen. Mit dem gefundenen $F_{3i}/F_0(F_s/F_0, c_s)$ kann $v_m/v_0(F_s/F_0, c_s)$ aus Gl. (41, 44) bestimmt werden und damit endlich aus Gl. (41, 29) der gesuchte Wert

$$\varkappa\left(\frac{F_s}{F_0},\ c_s\right) = \frac{v_0^*}{v_0}\left(\frac{F_s}{F_0},\ c_s\right). \tag{41, 46}$$

Das Ergebnis ist in Abb. 286 wiedergegeben.

Für die Grenzfälle wird, wie leicht direkt zu zeigen ist, für

$$\frac{F_s}{F_0} = 0:\ \varkappa \equiv 1$$

$$\frac{F_s}{F_0} = 1:\ \varkappa = \frac{v_0^*}{v_0} = \frac{v_0^*}{v_m^*} = \frac{1}{1 + \frac{v_a}{2v_0}} = \frac{2}{\sqrt{1 + c_s} + 1} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{c_s}{1 + \frac{c_s}{2} + \sqrt{1 + c_s}}.$$

Zwischen diesen Grenzfällen darf in erster Näherung linear interpoliert werden. Damit erhält man als an den Grenzen richtige Abschätzung

$$\varkappa = 1 - \frac{F_s/F_0}{2} \frac{c_s}{1 + \frac{c_s}{2} + \sqrt{1 + c_s}} \qquad (41,47)$$

Bei der Herleitung dieses Ergebnisses ist sehr große Flügelzahl und Drallausgleich vorausgesetzt. Die Strahldrehung ändert nichts

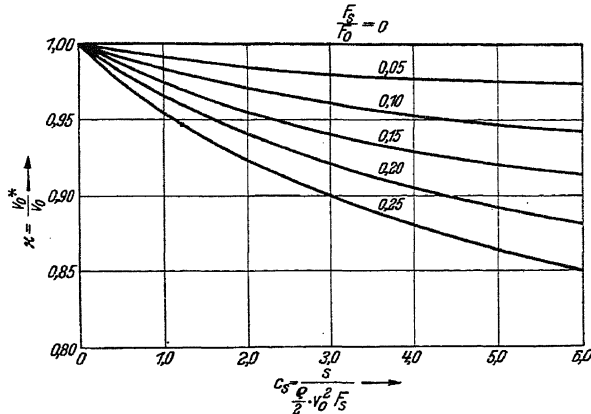



Abb. 286. Berichtigungsgröße $\varkappa$ des Fortschrittsgrades und des Schubbelastungsgrades.

$$\lambda_{\text{Flug}} = \varkappa \cdot \lambda_{\text{Versuch}}, \qquad c_{s\,\text{Flug}} = \frac{c_{s\,\text{Versuch}}}{\varkappa^2}$$

Wesentliches. Zur Berücksichtigung der endlichen Flügelzahl ersetzt man zweckmäßig den Schubbelastungsgrad durch das $1/\gamma_{31}^{(3)}$fache, die Schraubenkreisfläche entsprechend durch das $\gamma_{31}^{(3)}$fache.

42. Der Einfluß des Flugwerks auf den Vortriebsgütegrad der Luftschraube.

a) Die Abhängigkeit des Luftschraubenwirkungsgrades vom Kreisflächenverhältnis der gleichwertigen freifliegenden Luftschraube. Wie man den Wirkungsgrad η einer freifliegenden endlichvielflügeligen Luftschraube unter Berücksichtigung des Profilgleitwertes der Schraubenflügel berechnen kann, wurde in den Abschnitten 29, 30 und 34 dargelegt. Das Berechnungsergebnis kann, wie dies z. B. in Abb. 210, 220, 221 geschehen ist, in Abhängigkeit von

$$\text{Fortschrittsgrad} \quad \lambda = \frac{u}{v},$$

$$\text{Leistungsziffer} \quad k_l = k_d = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} \cdot u^3 \cdot F_s}$$

dargestellt werden. Die Schubziffer k_s ergibt sich hieraus zu

$$k_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot F_s} = \frac{\eta}{\lambda} k_l .$$

Nun ist aber im unbeschleunigten Horizontalflug bei nichtangestellter Luftschraube der Schraubenschub S gleich dem Widerstand W des Flugwerks. Schreibt man, wie dies üblich ist,

$$S = c_s \cdot \frac{\varrho}{2} v^2 \cdot F_s = \frac{k_s}{\lambda^2} \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v^2 \cdot F_s ,$$

$$W = c_w \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot v^2 \cdot F ,$$

so ergibt sich

$$c_s = c_w \cdot \frac{F}{F_s} = \frac{c_w}{\varphi} , \tag{42, 1}$$

$$k_s = \lambda^2 \cdot \frac{c_w}{\varphi} , \tag{42, 2}$$

$$k_l = \frac{\lambda^3}{\eta} \cdot \frac{c_w}{\varphi} . \tag{42, 3}$$

Man erkennt hieraus, daß die Leistungsziffer k_l und damit der Wirkungsgrad η im Horizontalflug vom Kreisflächenverhältnis $\varphi = F_s/F$ abhängig ist. Insbesondere ersieht man, daß bei gegebenem Luftschraubenprofilgleitwinkel ε und Fortschrittsgrad λ der Wirkungsgrad η um so größer wird, je größer das Kreisflächenverhältnis φ und je kleiner der Widerstandsbeiwert c_w des Flugzeugs ist.

Im unbeschleunigten Steigflug oder Horizontalflug gilt unter Berücksichtigung der Luftschraubenanstellung α mit ν als Neigungswinkel der Flugbahn und mit $c_p = \sqrt{c_a^2 + c_w^2}$, $\frac{c_w}{c_a} = \operatorname{tg} \varepsilon$ (9, 17), (9, 18)

$$c_s = \frac{1}{\varphi} \left\{ c_p \sin(\varepsilon - \alpha) + \frac{G}{\frac{\varrho}{2} \cdot v^2 \cdot F} \sin(\nu + \alpha) \right\} . \tag{42, 4}$$

Hieraus ist für den Fall des nicht horizontalen Fluges und der angestellten Luftschraube Ähnliches zu schließen, wie für den Fall des horizontalen Fluges ohne Anstellung der Schraube. Insbesondere ersieht man hieraus auch die große Bedeutung des Wertes

$$\frac{G}{\frac{\varrho}{2} \cdot v^2 \cdot F_s} .$$

b) Das Kreisflächenverhältnis der gleichwertigen freifliegenden Luftschraube. Der soeben besprochene Zusammenhang zwischen Flugwerksgrößen und Wirkungsgrad ergibt sich aber nur, wenn die Strömung durch die Schraube als vom Flugwerk ungestört betrachtet werden darf. Im allgemeinen ist jedoch die durch die Luftschraube strömende Luftmasse durch den Einfluß des Flugwerks geändert.

Zur Luftschraube am Flugzeug ist nun eine freifliegende Luftschraube offenbar dann gleichwertig, wenn diese an die gleiche Durchflußmasse bei gleicher Drehzahl die gleiche Leistung abgibt. Strömt also durch die Schraubenkreisfläche F_s infolge der Einwirkung des Flugwerks z. B. weniger hindurch als durch die gleiche Schraubenkreisfläche ohne diese Einwirkung strömen würde, so ist die Schraubenkreisfläche F_{sf} der gleichwertigen freifliegenden Luftschraube kleiner als die der Luftschraube am Flugzeug [Lit. 209].

Ist F_w der größte Querschnitt der im Schraubenstrahl liegenden Teile des Flugwerks und sind x, y, z die Koordinaten des Mittelpunktes jenes zunächst liegenden Querschnittes dieser Teile, der halb so groß ist wie F_w, so darf nach Gl. (40, 12) mit

$$r_w = \sqrt{\frac{F_w}{\pi}}$$

$$\vartheta \sim \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}}$$

für die Durchflußenge $\dot{Q}$ gesetzt werden

$$\dot{Q} = v_0 \pi \cdot R^2 - v_0 \pi r_w^2 (1 - \cos\vartheta) \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\operatorname{tg}\vartheta},$$

$$\dot{Q} = v_0 F_s \left\{1 - \left(\frac{r_w}{R}\right)^2 (1 - \cos\vartheta) \cdot \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\operatorname{tg}\vartheta}\right\}.$$

Für die Schraubenkreisfläche F_{sf} der freifliegenden gleichwertigen Schraube gilt also

$$\frac{F_{sf}}{F_s} = 1 - \left(\frac{r_w}{R}\right)^2 (1 - \cos\vartheta) \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\operatorname{tg}\vartheta}. \tag{42, 5}$$

Der Wirkungsgrad η_f der Luftschraube unter Berücksichtigung der Änderung der Durchströmung der Schraubenkreisfläche bestimmt sich damit aus dem Fortschrittsgrad der gleichwertigen freifliegenden Luftschraube

$$\lambda_f = \lambda \sqrt{\frac{F_s}{F_{sf}}} \tag{42, 6}$$

und ihrem Schubbelastungsgrad

$$c_{sf} = c_s \frac{F_s}{F_{sf}} = c_w \cdot \frac{F}{F_{sf}} = \frac{c_w}{\varphi_f} \tag{42, 7}$$

bzw. ihrer Schubziffer k_{sf} oder ihrer Leistungsziffer k_{lf}

$$\left.\begin{aligned} k_{sf} &= \lambda_f^2 c_{sf} = \lambda^2 c_s \left(\frac{F_s}{F_{sf}}\right)^2 = \lambda^2 \frac{F_s}{F_{sf}} \cdot \frac{c_w}{\varphi_f}, \\ k_{lf} &= \frac{\lambda_f}{\eta} k_{sf} = \frac{\lambda^3}{\eta} \cdot \left(\frac{F_s}{F_w}\right)^{3/2} \cdot \frac{c_w}{\varphi_f}. \end{aligned}\right\} \tag{42, 8}$$

In Abb. 287 ist für eine bestimmte Lage der Luftschraube, nämlich am Bug des die im Schraubenstrahl liegenden Flugwerkteile ersetzenden Halbkörpers, das Verhältnis $\frac{D_f}{D} = \sqrt{\frac{F_{sf}}{F_s}}$ des Durchmessers D_f der gleich-

wertigen freifliegenden Luftschraube zu dem Durchmesser D der Luftschraube am Flugzeug aufgezeichnet in Abhängigkeit von $\frac{D}{D_w} = \sqrt{\frac{F_s}{F_w}}$.

Der Wirkungsgrad $\eta_f(c_{sf}, \lambda_f)$ der gleichwertigen freifliegenden Schraube des Durchmessers D_f ist offenbar im allgemeinen nicht unwesentlich von dem Wirkungsgrad $\eta_{f_0}(c_s, \lambda)$ einer gleich großen freifliegenden Schraube des Durchmessers D verschieden.

Der Quotient

$$\eta_{,} = \frac{\eta_f(c_{sf}, \lambda_f)}{\eta_{f_0}(c_s, \lambda)} \qquad (24,9)$$

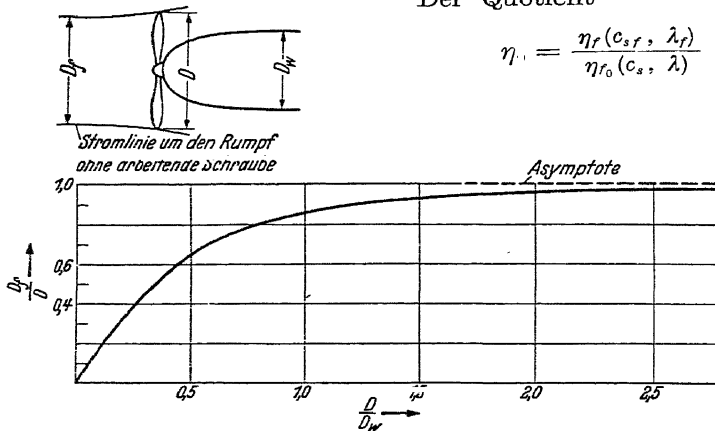



Abb. 287. Abhängigkeit des Durchmessers D_f der gleichwertigen freiliegenden Luftschraube von der Rumpfdicke D_w.

gibt den Einfluß des Verdrängungsmitstromes auf den Wirkungsgrad an. Als Vergleichsgrundlage dient dabei gleicher Schub S, gleiche Drehzahl n und gleiche Fluggeschwindigkeit v. Wie aus Abschnitt 24c hervorgeht, unterscheidet sich aber $\eta_f(c_{sf}, \lambda_f)$ (24, 28) nur wenig vom Wirkungsgrad einer gleich großen freifliegenden Luftschraube gleicher Drehzahl und der Fluggeschwindigkeit $\bar{v} = v \cdot \frac{F_{sf}}{F_s}$ und des Schubes $\bar{S} = S\frac{F_s}{F_{sf}}$.

c) Der Einfluß der Widerstandsänderung durch den Schraubenstrahl. Die soeben dargelegten Einflüsse der Flugwerksgrößen und der Störung der Strömung in der Schraubenkreisebene durch die Rückwirkung des Flugwerkes auf den Wirkungsgrad sind leicht zu erfassen. Es sind aber nicht die einzigen und im allgemeinen auch nicht die wichtigsten Einflüsse auf die Vortriebswirkung der Luftschraube. Viel größer ist ein anderer Einfluß [Lit. 8 u. 209].

Sitzen nämlich hinter der Luftschraube Widerstandskörper, wie Flugzeugrumpf, Motorgondeln u. dgl., so treten im Schraubenstrahl Verluste auf, die der im Schraubenstrahl erhöhten Strömungsgeschwindigkeit zuzuschreiben sind. Der ohne Schraube am Flugzeug vorhandene Widerstand W wird dabei um einen gewissen Betrag ΔW, der im wesentlichen der Zunahme des Staudrucks q um den Betrag Δq im Schrauben-

strahl verhältig ist, vermehrt. Zu der Verschlechterung der Vortriebswirkung durch die hinter der Schraube sitzenden Verdrängungskörper gegenüber einer freifliegenden Schraube gleichen Durchmessers kommen also noch die oft recht erheblichen Verluste durch den zusätzlichen Reibungswiderstand der im Schraubenstrahl liegenden Flugwerksteile. Von der Änderung des Auftriebs durch die Wirkung des Schraubenstrahls sei zunächst abgesehen.

In einiger Entfernung hinter der Schraube kann man die Luft wie noch im Abschnitt 43 gezeigt wird, als mit ziemlich homogener Geschwindigkeit innerhalb des Schraubenstrahls, dessen Querschnitt im wesentlichen mit dem einer gleichwertigen unendlichvielflügeligen Schraube gleich ist, nach hinten austretend ansehen. Die zusätzliche Geschwindigkeit v_a im Schraubenstrahl ist hierbei gleich der bei einer freifliegenden unendlichvielflügeligen Schraube gleichen Schubs und der Schraubenkreisfläche

$$F_{sf}^{(\infty)} = F_{sf}^{(\mathfrak{z})} \cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})} \tag{42, 10}$$

bei über dem Strahlquerschnitt gleichbleibender Schubverteilung. Somit wird (12, 17)

$$c_{sf}^{(\mathfrak{z})} + \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})} \frac{2 v_a}{v_0} \left(1 + \frac{v_a}{2 v_0}\right). \tag{42, 11}$$

Hieraus erhält man

$$1 + \frac{v_a}{v_0})^2 = \frac{c_{sf}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} + 1\,,$$

also

$$\frac{q + \Delta q}{q} = \frac{c_{sf}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} + 1\,.$$

Damit wird das Verhältnis der Staudruckzunahme Δq im Strahl zum außerhalb des Strahls vorhandenen Staudrucks q

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{c_{sf}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} = c_{sf}^{(\infty)}\,. \tag{42, 12}$$

Ist die Stirnfläche der vom Schraubenstrahl getroffenen Flugwerkteile F_w und dessen Widerstandsbeiwert c_{ws}, so ist die scheinbare Zunahme ΔW des Widerstandes W

$$\Delta W = \Delta q\, c_{ws} F_w\,. \tag{42, 13}$$

Im unbeschleunigten Horizontalflug ist

$$S = W = q \cdot F_{sf} \cdot c_{sf}^{(\mathfrak{z})} \tag{42, 14}$$

und damit

$$\Delta q = q \frac{c_{sf}^{(\mathfrak{z})}}{\gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} = \frac{W}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}}\,, \tag{42, 15}$$

$$\Delta W = W c_{ws} \cdot \frac{F_w}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} = W c_{ws} \frac{F_s}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(\mathfrak{z})}} \cdot \frac{F_w}{F_s} \tag{42, 16}$$

Bei mehrmotorigen Flugzeugen ist selbstverständlich statt der Schraubenkreisfläche einer einzigen die aller Schrauben einzusetzen.

Der Erhöhung des Widerstandes kommt aber eine Verringerung des Vortriebsgütegrades η_g im Verhältnis

$$\eta_{\Delta W} = \frac{W_{\text{(ohne Schraube)}}}{W_{\text{(Schraube nicht angestellt, Flugzeuganstellung ungeändert)}}} = \frac{W}{W + \Delta W} \quad (42, 17)$$

gleich. $\eta_{\Delta W}$ stellt den Strahlgütegrad bei gleichbleibender Anstellung des Flugzeugs und nicht angestellter Luftschraube dar.

Abb. 288. Erläuterung der Anteile am Einfluß des Schraubenstrahles auf den Vortriebsgütegrad.

Mit Hilfe der oben berechneten scheinbaren Widerstandszunahme ΔW (42, 16) ergibt sich

$$\eta_{\Delta W} = \frac{1}{1 + c_{ws} \cdot \frac{F_w}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(3)}}}. \quad (42, 18)$$

Während nun $\frac{F_w}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(3)}}$ aus den geometrischen Verhältnissen leicht bestimmt werden kann, ist der Widerstandsbeiwert c_{ws} der im Schraubenstrahl liegenden Flugwerkteile nicht ohne weiteres bekannt. Er ist sehr von der Art des Rumpfes und der Motorgondeln, am meisten jedoch von der Art des Motors abhängig und schwankt im allgemeinen zwischen

$$c_{ws} = 0{,}1 \text{ und } 0{,}3\,,$$

wobei die kleineren Werte für strömungstechnisch gut durchgebildete Motorverkleidungen von Reihenmotoren, die größeren für Sternmotoren gelten.

Für aerodynamisch gut durchgebildete Sportflugzeuge und für Jagdflugzeuge kann aber auch c_{ws} kleiner als 0,1 und für plumpe Verkehrs- und Lastenflugzeuge kann c_{ws} größer als 0,3 werden.

Kennt man aus Flugzeugversuchen oder Windkanalversuchen die Gleitflugpolare eines Flugzeugs, so kann man hiermit c_{ws} auch abschätzen.

Ist die Polare im Bereich der wichtigsten Flugzustände durch

$$c_w = c_{w_{12}} + \frac{c_a}{k} \quad (42, 19)$$

zu ersetzen und kann man den Anteil c_{w_2} der Tragflügel schätzen, so ist

$$c_{w_1} = c_{w_{12}} - c_{w_2} \quad (42, 20)$$

der auf die Tragflügelfläche F bezogene Anteil der übrigen Flugwerkteile am Widerstandsbeiwert.

Ist $\bar{F}_{w_1}$ die gesamte Stirnfläche des Flugzeugs ohne die Stirnfläche F_{w_2} der Tragflügel, so erhält man den hierauf bezogenen Widerstandsbeiwert

$$\bar{c}_{w_1} = \frac{F}{\bar{F}_{w_1}} c_{w_1}. \qquad (42, 21)$$

Von dieser Stirnfläche werden aber nur der Teil F_{w_1} und außerdem ein Teil F_{w_2} der Tragflügelstirnfläche vom Schraubenstrahl getroffen.

Nimmt man nun, wie dies nahe liegt, an, daß zu F_{w_1} der Widerstandsbeiwert $\bar{c}_{w_1} = F/\bar{F}_{w_1} \cdot c_{w_1}$ und zu F_{w_2} der Widerstandsbeiwert $\bar{c}_{w_2} = F/\bar{F}_{w_2} \cdot c_{w_2}$ gehört, so wird der Widerstandsbeiwert c_{ws} der gesamten vom Schraubenstrahl getroffenen Stirnfläche

$$c_{ws} = \frac{\bar{c}_{w_1} \bar{F}_{w_1} + \bar{c}_{w_2} \bar{F}_{w_2}}{F_w}. \qquad (42, 22)$$

Mit Hilfe des so gewonnenen Beiwertes c_{ws} eines vorhandenen Flugzeugs kann man z. B. den Einfluß einer etwa beabsichtigten Änderung des Schraubendurchmessers, soweit er mit diesem Anteil $\eta_{\Delta W}$ am Strahlgütegrad zusammenhängt, wenigstens abschätzen.

Besser als diese immerhin noch rohe Abschätzung des Wertes c_{ws} aus einer Gleitflugpolaren ist die Bestimmung aus den Ergebnissen einer erflogenen Gleitflugpolaren und einer erflogenen Vollgasflugpolaren.

Im Falle des Steigfluges ist c_s nicht nur durch den Widerstand W, sondern auch durch das Gewicht des Flugzeugs bedingt. Unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Anstellung der Schraube wird dann (42, 16) (42, 4)

$$S = q F_{sf} c_{sf}^{(3)},$$

$$W = c_w \cdot \frac{\varrho}{2} v^2 F,$$

$$\Delta W = S c_{ws} \frac{F_w}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(3)}}$$

und damit

$$\eta_{\Delta W} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\varepsilon - \alpha)}{\sin \varepsilon} + \frac{G}{W} \sin(\nu + \alpha)\right) \cdot c_{ws} \frac{F_w}{F_{sf} \cdot \gamma_{31}^{(3)}}}. \qquad (42, 23)$$

d) Der Einfluß der Auftriebsänderung durch den Schraubenstrahl. Zu dem Einfluß der Widerstandsänderung ΔW durch den Schraubenstrahl auf den Vortriebsgütegrad der Luftschraube tritt aber auch noch ein Einfluß der Änderung ΔA des Auftriebes. Würde die Anstellung des Flugzeugs sich nämlich nicht ändern, so würde durch die vergrößerte Geschwindigkeit im Schraubenstrahl auch noch eine Auftriebserhöhung eintreten. Für diese gilt, wie später noch gezeigt wird, die Abschätzung

$$A = A_1 \cdot \frac{\Delta q}{q}, \qquad (42, 24)$$

wenn A_1 der Auftrieb der im Schraubenstrahl liegenden Flugwerkteile bei fehlend gedachtem Schraubenstrahl ist.

Dem Vortriebsgütegrad wird jedoch zweckmäßig nicht Gleichheit der Anstellung sondern Gleichheit des Gesamtauftriebes bei gleicher Fluggeschwindigkeit zugrunde gelegt. Als Einfluß der Auftriebsänderung durch den Schraubenstrahl $\eta_{\Delta A}$ ist dann, wie Abb. 288 veranschaulicht, anzusehen

$$\eta_{\Delta A} = \frac{W_{(\text{Schraube nicht angestellt, Flugzeuganstellung ungeändert})}}{W_{(\text{Schraube nicht angestellt, Auftrieb ungeändert})}} \qquad (42, 25)$$

Dieser Wert ist im allgemeinen größer als 1. Die Widerstände sind der Polaren bei laufender, aber nicht angestellter Schraube zu entnehmen.

e) **Einfluß der Schraubenanstellung.** Mit der Anstellung der Tragflügel ändert sich aber auch die Anstellung der Luftschraubenachse und da z. B. beim Steigflug die Anstellung der Luftschraube schon erheblich ist, verdient auch die Frage nach dem Einfluß der Anstellung auf den Vortriebsgütegrad Bedeutung [Lit. 191].

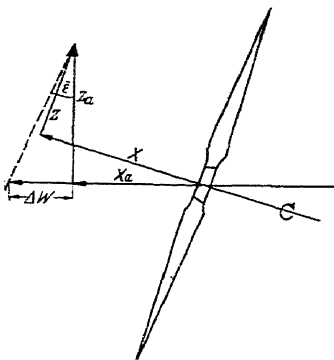



Abb. 289. Zerlegung der Luftkräfte einer angestellten Luftschraube und die dem Schraubenauftrieb entsprechende Widerstandsverringerung.

Die Wirkung der Luftschraubenanstellung ist eine zweifache. Zunächst fällt infolge der Schraubenanstellung die Richtung des Schraubenstrahls nicht mehr in Flugrichtung, so daß auch hierdurch Auftrieb und Widerstand des Flugzeugs geändert werden. Wie aber aus Abschnitt 46 hervorgeht, sind bei nicht zu kleiner Spannweite des Flugzeugs diese Einflüsse klein, so daß sie hier vernachlässigt werden sollen. Der wichtigere Einfluß der Schraubenanstellung besteht in der Änderung der Richtung und Größe der Schraubenkraft.

Bei der angestellten Schraube wirkt ein Teil der Schraubenkraft in Richtung der Fluggeschwindigkeit, ein Teil in Richtung des Auftriebes, wie Abb. 289 zeigt. Durch letzteren Anteil wird der durch die Tragflügel zu schaffende Auftrieb verringert. In der Umgebung des dem Steigen entsprechenden Punktes der Polaren sei $\frac{\Delta c_w}{\Delta c_a} = \bar{\varepsilon}$, dann braucht die Schraube des verminderten Flügelauftriebs wegen nur einen um das $\bar{\varepsilon}$fache des Auftriebsanteils der Schraube verminderten Schub zu liefern gegenüber einer nicht angestellten Schraube (Abb. 290).

Bezeichnet X_a den aerodynamischen Schraubenschub und Z_a den aerodynamischen Schraubenauftrieb, so ist

$$\left.\begin{aligned} X_a &= X\cos\alpha - Z\sin\alpha \\ Z_a &= X\sin\alpha + Z\cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{ bzw. } \left\{\begin{aligned} X &= X_a\cos\alpha + Z_a\sin\alpha \\ Z &= -X_a\sin\alpha + Z_a\cos\alpha\,, \end{aligned}\right\} \qquad (42, 26)$$

wenn $X = S$ die in Richtung der Schraubenachse, d. h. in die x-Richtung fallende Komponente der Schraubenkraft, Z die in die z-Richtung fallende Komponente ist.

Die Widerstandsverringerung infolge der Schraubenanstellung ist

$$\Delta W_\alpha = \bar{\varepsilon} Z_a . \qquad (42, 27)$$

Abb. 290. Darstellung der Wirkung der Schraubenanstellung durch die Polare.

Der Einfluß der Schraubenanstellung auf den Vortriebsgütegrad ist

$$\eta_\alpha = \frac{X_a}{X} \cdot \frac{X_a + \Delta W_\alpha}{X_a} \cdot \frac{\dfrac{X_{\text{Schraube angestellt}}}{X_{\text{Schraube nicht angestellt}}}}{\dfrac{N_{\text{Schraube angestellt}}}{N_{\text{Schraube nicht angestellt}}}}, \quad (42, 28)$$

hierin wird

$$\frac{X_a}{X} \cdot \frac{X_a + \Delta W_a}{X_a} = \frac{X_a + \bar{\varepsilon} Z_a}{X} = \cos\alpha + \bar{\varepsilon}\sin\alpha + \frac{Z}{X}(\bar{\varepsilon}\cos\alpha - \sin\alpha). \quad (42, 29)$$

Nach Abschnitt 38 ist aber bei Schräganblasung

$$X = S = \frac{\varrho}{2} u^2 F_s \{k_{s_0} + \alpha^2 \varkappa_x\},$$

$$Z = \frac{\varrho}{2} u^2 F_s \alpha \varkappa_z ,$$

$$N = \frac{\varrho}{2} u^3 F_s \{k_{d_0} + \alpha^2 \varkappa_L\},$$

somit

$$\frac{Z}{X} = \alpha \frac{\varkappa_z}{k_s} \frac{1}{1 + \alpha^2 \dfrac{\varkappa_x}{k_s}}, \quad (42, 30)$$

oder unter Vernachlässigung von Größen kleiner als 2. Ordnung in α

$$\frac{Z}{X} = \alpha \frac{\varkappa_z}{k_s} . \quad (42, 31)$$

Als Einfluß der Anstellung auf den Vortriebsgütegrad ergibt sich damit bei gleicher Vernachlässigung

$$\eta_\alpha = \frac{1 + \alpha^2 \dfrac{\varkappa_x}{k_{s_0}}}{1 + \alpha^2 \dfrac{\varkappa_L}{k_{d_0}}} \left(1 - \alpha^2 + \bar{\varepsilon}\alpha + \alpha \frac{\varkappa_z}{k_{s_0}} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}\alpha^2 - \alpha)\right),$$

$$\eta_\alpha = \frac{1 - \alpha^2\left(1 - \dfrac{\varkappa_x - \varkappa_z}{k_{s_0}}\right) + \bar{\varepsilon}\alpha\left(1 + \dfrac{\varkappa_z}{k_{s_0}}\right)}{1 + \alpha^2 \cdot \dfrac{\varkappa_L}{k_{d_0}}} \quad (42, 32)$$

der Vortriebsgütegrad η_g, bei Anstellung der Schraube darf geschrieben werden

$$\eta_g = \eta_{g(\alpha = 0)} \cdot \eta_\alpha . \quad (42, 33)$$

Der Vortriebsgütegrad $\eta_{g\,(\alpha=0)}$ bei nicht angestellter Schraube darf aber hierbei nicht ohne weiteres ungeändert von einer in Achsenrichtung angeströmten Schraube übernommen werden. Sonst müßte nämlich vorausgesetzt werden dürfen, daß die Gleitzahl der Schraubenflügelprofile bei wechselnder Profilanstellung nicht geändert wird. Dies ist jedoch nicht völlig der Fall.

Bei unseren ursprünglichen Betrachtungen über die schräg angeblasene Luftschraube war angenommen worden, daß auch bei schwankender Anstellung der Schraubenprofile Auftrieb und Widerstand der gleiche sind wie bei jeweils gleicher, aber zeitlich veränderlicher Anstellung. Betrachtungen eines schwingenden Tragflügels, wo die Verhältnisse ganz ähnlich liegen, zeigten, daß ersteres bei den bei Schrauben üblichen Größen der Fall ist. Der Widerstand des Profils bei veränderlicher Anstellung ist aber nicht ganz der gleiche wie im stationären Fall, sondern größer. Die Berücksichtigung dieses Umstandes soll jedoch hier unterbleiben. Über die Größenordnung des Einflusses gibt u. U. die Abb. 298 Aufschluß.

f) Der Strahlgütegrad als Zusammenfassung der verschiedenen Strahleinflüsse auf den Vortriebsgütegrad. Die Einflüsse $\eta_{\Delta W}$, $\eta_{\Delta A}$, η_α auf den Vortriebsgütegrad, welche die Änderung des Widerstandes, des Auftriebes und der Schraubenkraft durch die Größe und Richtung der Strömungsgeschwindigkeit im Schraubenstrahl berücksichtigen, können als unmittelbarer Strahlgütegrad

$$\eta_{s_0} = \eta_{\Delta W} \cdot \eta_{\Delta A} \cdot \eta_\alpha = \frac{W_{(\text{Schraube angestellt, Auftrieb ungeändert})}}{W_{(\text{ohne Schraube})}} \qquad (42, 34)$$

zusammengefaßt werden.

Dem geänderten Widerstand entspricht aber z. B. im Horizontalflug auch eine Änderung des Schraubenschubes, wodurch auch der Luftschraubenwirkungsgrad beeinflußt wird. Diese Änderung sei

$$\eta_{s_1} = \frac{\eta_f\left(\frac{c_s}{\eta_s} \cdot \frac{F_s}{F_{sf}},\ \lambda\sqrt{\frac{F_s}{F_{sf}}}\right)}{\eta_f\left(c_s \frac{F_s}{F_{sf}},\ \lambda\sqrt{\frac{F_s}{F_{sf}}}\right)} \qquad (42, 35)$$

Der gesamte Schraubenstrahleinfluß ist dann gegeben durch den Strahlgütegrad

$$\eta_s = \eta_{s_0} \cdot \eta_{s_1}. \qquad (42, 36)$$

g) Vortriebsgütegrad und Einbaugütegrad der Luftschraube. Bezeichnet $\eta_f\left(c_s \frac{F_s}{F_{sf}},\ \lambda\sqrt{\frac{F_s}{F_{sf}}}\right)$ den Wirkungsgrad der Luftschraube ohne Strahleinfluß, so kann man unter

$$\eta_g = \eta_{f_0} \cdot \eta_s \qquad (42, 37)$$

den Vortriebsgütegrad der Luftschraube verstehen. Zum Begriffe eines Einbaugütegrades η_e gelangt man, wenn man noch den Wirkungs-

grad $\eta_{f_0}(c_s, \lambda)$ einer gleich großen freifliegenden Schraube gleichen äußeren Schubes S und gleicher Drehzahl heranzieht und η_e durch die Gleichung

$$\eta_g = \eta_{f_0} \cdot \eta_e \tag{42, 38}$$

festlegt. Damit wird der Einbaugütegrad

$$\eta_e = \frac{\eta_f}{\eta_{f_0}} \cdot \eta_s \tag{42, 39}$$

oder mit dem Einflußwert $\eta_v = \frac{\eta_f}{\eta_{f_0}}$ (24, 9)

$$\eta_e = \eta_v \cdot \eta_s \,. \tag{42, 40}$$

Dieser Wert gibt dann alle jene Einflüsse wieder, durch die infolge des Einbaues einer Zugschraube der Vortriebsgütegrad der Luftschraube sich vom Wirkungsgrad einer gleich großen freifliegenden Luftschraube unterscheidet. Dieser Einbaugütegrad ist im Schnellflug meist erheblich kleiner als 1, im Langsamflug kann er unter Umständen 1 überschreiten. Für Auftriebswerte, welche im Gleitflug nicht erreicht werden können, verliert aber der Einbaugütegrad η_e ebenso wie der Strahlgütegrad η_s und der Vortriebsgütegrad η_g seinen Sinn.

Bei Schrauben im Reibungsnachstrom, wie es z. B. bei Druckschrauben möglich ist, erhöht sich der Einbaugütegrad bzw. der Vortriebsgütegrad noch um den Faktor $v_0/\bar{v}_r$, wie dies in Abschnitt 25 beschrieben wurde (25, 6).

Abb. 291. Durch einige Leitvorrichtungen erzielte Verbesserungen des Vortriebsgütegrades.

h) Weitere Einflüsse des Luftschraubeneinbaus auf den Vortrieb und Versuchsergebnisse. Zu den schon beschriebenen Einflüssen des Luftschraubeneinbaues treten noch weitere. Aber auch die schon beschriebenen Einflüsse können durch die angegebenen Beziehungen zum Teil nur überschlägig erfaßt werden. Aus diesem Grunde mögen hier noch einige aufschlußreiche Versuchsergebnisse mitgeteilt werden.

Zunächst werde die Wirkung von Leitvorrichtungen auf den Nutzschub besprochen. Abb. 291 zeigt die Lagen einiger Versuchsleitflächen an einem Widerstandskörper und den damit erzielten Gewinn an Nutzschub [Vers. 63]. Als Leitvorrichtung dienten dabei jeweils 8 gleiche

gleichmäßig um den Widerstandskörper verteilte dünne Bleche, deren Form und Lage aus Abb. 291 hervorgeht. Die Verbesserung des Schubs ist auf die Verringerung der in der Strahldrehung enthaltenen kinetischen

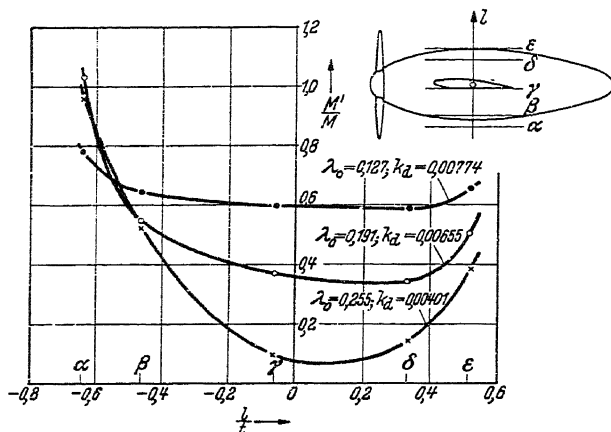



Abb. 292. Verminderung der Strahldrehung durch die Leitwirkung des Tragflügels für verschiedene Hochlagen der Schraube gegenüber dem Tragflügel.

Energie zurückzuführen. Der Verminderung der Strahldrehung entspricht eine Vergrößerung des Druckanstiegs nach dem Heck des Widerstandskörpers zu, was gleichbedeutend mit einer Widerstandsverminderung bzw. Schubvermehrung ist. Die Verringerung der Strahldrehung bedingt aber auch eine erhöhte Ablösegefahr. Ein gewisser Restdrall dürfte deshalb nützlicher sein als ein vollkommener Drallausgleich. Die Leitflächen selbst bedingen einen erhöhten Reibungswiderstand, so daß gegen den Nullschubzustand hin eine wesentliche Verringerung des Nutzschubs statt eine Verbesserung eintritt.

Abb. 293. Versuchsanordnungen mit verschiedenen Lagen einer Druckschraube gegenüber dem Rumpfende und mit einigen Leitvorrichtungen.

Wie groß der Drallausgleich durch einen Tragflügel allein sein kann, zeigt Abb. 292 für verschiedene Hochlagen der Luftschraube gegenüber dem Tragflügel. Hierbei bezeichnet M das Drehmoment der Luftschraube, M' das übrigbleibende durch den Restdrall bedingte freie Moment. Der Unterschied wird durch den Tragflügel aufgenommen [Vers. 64]. An dem Drallausgleich ist aber offenbar auch der Widerstandskörper selbst in nicht zu vernachlässigendem Maße beteiligt.

Bei Druckschrauben ist nach Versuchsergebnissen an einem in Abb. 293 dargestellten Widerstandskörper offenbar auf Kleinheit der

Nabe zu achten [Lit. 153 u. 154]. Für die Anordnungen 1, 2, 3 der Schraube (Abb. 293a) ergeben sich nach diesen Versuchen die Vortriebsgütegrade 0,59, 0,65, 0,67. Mit 8 gleichen gleichmäßig über den Umfang verteilten Leitblechen nach Abb. 293b ergaben sich im Falle 1 Verbesserungen auf 0,69, im Falle 2 auf 0,66 [Vers. 63]. Die Vorteile der Druckschraubenanordnung, welche den Reibungsmitstrom auszunützen gestattet, dürften durchaus von der theoretisch zu erwartenden Größe sein.

Abb. 294. Vortriebsgütegrad einer Zugschraube mit Motorgondel bei verschiedenen Lagen der Schraube zum Flügel.

Abb. 294 zeigt die starke Abhängigkeit des Vortriebsgütegrades von der Lage der Luftschraube und Motorgondel gegenüber dem Tragflügel, und zwar für den Fall einer nicht angestellten Luftschraube bei Verhältnissen, wie sie dem Horizontalflug entsprechen. Diese Abhängigkeit ist stark bedingt durch die Art des Zusammenbaues von Motorgondel und Tragflügel, auf welche bei der theoretischen Untersuchung keine Rücksicht genommen werden konnte. Beim Steigflug ist die Abhängigkeit von der Luftschraubenanordnung geringer. Vom Flügelprofil ist das Ergebnis fast unabhängig. Die benutzte Motorverkleidung ist dagegen von erheblichem Einfluß auf den Vortriebsgütegrad selbst [Vers. 38, 39, 42].

Abb. 295. Versuchsanordnungen mit Zugschrauben an zwei verschiedenen Rümpfen mit verschiedenen Lagen der Schraube gegenüber der Rumpfspitze.

Die Frage nach der zweckmäßigsten Luftschraubenanbringung am Rumpf wollen die in Abb. 295 dargestellten Versuchsanordnungen beantworten. Die Anordnungen A_1, A_2, A_3 ergaben als beste Vortriebsgütegrade 0,663; 0,623; 0,608; die Anordnungen B_1, B_2, B_3 ergeben als beste Vortriebsgütegrade 0,651; 0,635; 0,626, also mit wachsendem h einen Abfall des erreichbaren Vortriebsgütegrades. Der Abfall war jedoch bei dem stumpfen Körper B kleiner als bei dem spitzen Körper A. Ein Weglassen der vor der Schraube liegenden Spitze verschlechtert aber den Vortriebsgütegrad wieder [Vers. 58].

Für den Einfluß von dicht hinter der Luftschraube befindlichen Widerstandskörpern, wie sie z. B. luftgekühlte Zylinder eines Sternmotors darstellen, gibt es einen Abstand von der Schraube, für den der Vortriebsgütegrad einen Bestwert erreicht [Lit. 153 u. 154].

Abb. 296. Vortriebsgütegrad zweier Schrauben bei verschiedenen Motorverkleidungen.

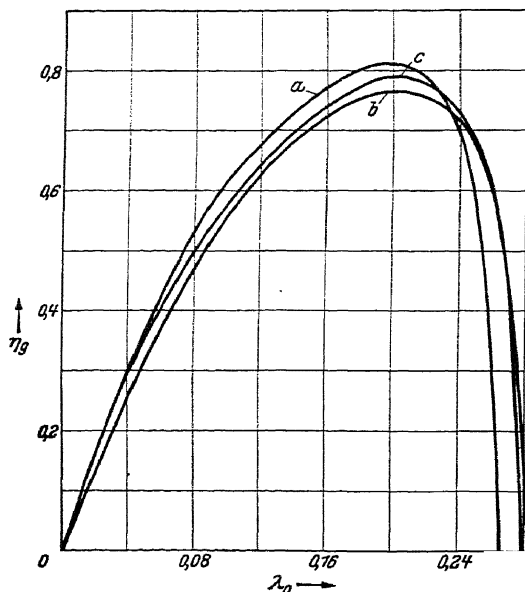



Abb. 297. Einfluß des Blattsteigungsverlaufs einer Schraube auf den Vortriebsgütegrad:
a Schraube konstanter Steigung freifliegend,
b Schraube konstanter Steigung am Flugzeugmodell,
c Schraube mit der Zustromverteilung angepaßtem Steigungsverlauf am Flugzeugmodell.

Zur Verringerung des Stirnwiderstandes von Sternmotoren ist die Verkleidung des Motors durch Ringe oder Hauben üblich. Die Zweckmäßigkeit einer bestimmten Verkleidungsform ist sehr eng mit der ausgewählten Luftschraube verknüpft [Vers. 13]. Bei den in Abb. 296 dargestellten Sternmotorverkleidungen ließen sich z. B. mit Hamilton-Standard 1 C 1—0 Schrauben ganz andere Vortriebsgütegrade als mit Navy-plan-form 5868—9 Schrauben erreichen. Auch die Güte der verschiedenen Verkleidungen war in ihrer Reihenfolge verschieden. Die Unterschiede betrugen für die gleiche Schraube bis zu 0,05.

Da die Störung der Durchströmung der Schraubenkreis-

ebene, wie Abb. 272 zeigt, nicht gleichförmig ist, kann man dies beim Entwurf der Luftschraube berücksichtigen und auf diese Weise den Wirkungsgrad verbessern [Vers. 35]. Abb. 297 zeigt als Beispiel den Wirkungsgradverlauf einer freifliegenden Luftschraube konstanter Steigung, dann den Verlauf des Vortriebsgütegrades der gleichen Luftschraube an einem Flugzeug, ferner den einer Schraube, deren Steigungsverlauf der über die Schraubenkreisfläche veränderlichen Zuströmung angepaßt ist. Während durch Anbringen der Schraube konstanter Steigung am Flugzeug der Vortriebsgütegrad dem Wirkungsgrad der freiliegenden Schraube gegenüber stark verringert ist, wird durch die Anpassung des Steigungsverlaufes dieser Unterschied zum Teil wieder aufgehoben.

Daß es nicht nur auf die mittlere Größe des Mitstromes ankommt, sondern auch auf dessen Gleichförmigkeit, zeigt ein in Abb. 298 wiedergegebenes Versuchsergebnis, das an einem Flugzeugmodell mit der in Abb. 272 wiedergegebenen Mitstromverteilung gewonnen wurde. Während beim Versuch mit der Schraube am Rumpfmodell allein der Theorie entsprechend praktisch der gleiche Wirkungsgrad erreicht wurde wie mit der freifliegenden Luftschraube, ist dies beim Modell mit Tragflügel nicht der Fall. Durch eine erhebliche Ungleichförmigkeit des Mitstroms über den Umfang wird also der Wirkungsgrad beachtlich verringert.

Abb. 298. Einfluß der Zuströmverteilung auf den Wirkungsgrad einer Luftschraube.
a freifliegende Schraube (Zustrom ungestört), *b* Schraube vor Rumpfmodell ohne Flügel (Zuströmung über den Umfang nahezu gleichförmig), *c* Schraube vor Rumpfmodell mit Flügel (Zuströmung über den Umfang stark veränderlich).

i) Einfluß der Annäherung der Schraubenspitzengeschwindigkeit an die Schallgeschwindigkeit. Zu den schon besprochenen Einflüssen kommt noch der Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit auf den Wirkungsgrad selbst. Dieser Einfluß gewinnt um so größere Bedeutung, je größer die Fluggeschwindigkeit ist.

Die Mittel zu weiterer Erhöhung der Fluggeschwindigkeit sind verschieden. Neben der Verbesserung der aerodynamischen Formgebung und der Verkleinerung des Baugewichtes im Vergleich zur Zuladung ist eines der wichtigsten die Leistungssteigerung der Motoren. Die Aufgabe

der Schraube ist dann, diese erhöhten Leistungen möglichst gut in Vortriebsleistung umzuwandeln.

Mittel zur Leistungssteigerung der Luftschraube sind:

1. Vergrößerung des Durchmessers,
2. Vergrößerung von Flügelzahl und Blattbreite,
3. Vergrößerung der Umfangsgeschwindigkeit.

Daß Durchmesser und Flügelzahl bzw. Blattbreite irgendwie begrenzt sind, ist ohne weiteres vorstellbar, gleichzeitig sieht man aber auch ein, daß man sich diesen Grenzen noch nicht zu sehr genähert hat.

Anders liegt dies mit der Umfangsgeschwindigkeit oder genauer mit der Spitzengeschwindigkeit der Schraube.

Durch die Schallgeschwindigkeit ist hier eine deutliche Grenze gesetzt. Ja schon vor der Erreichung der Schallgeschwindigkeit ist ein merklicher Verlust am Schraubenwirkungsgrad festzustellen.

Da mit dem Verlangen nach dem Schnellflug meist auch der Wunsch nach dem Fluge in größeren Höhen verbunden ist, so ist es nützlich zu wissen, daß die Schallgeschwindigkeit mit zunehmender Höhe abnimmt, und zwar wegen der mit zunehmender Höhe abnehmenden Temperatur.

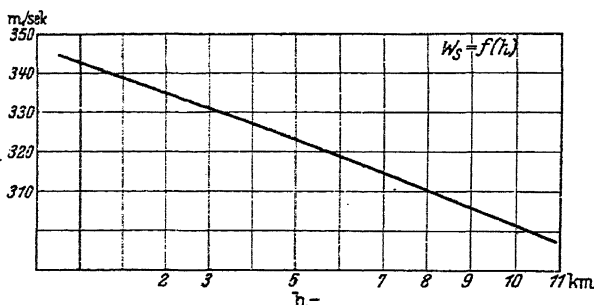



Abb. 299. Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Flughöhe (JNA).

Die Schallgeschwindigkeit ist in m/s

$$w_s = 20{,}1\sqrt{T},$$

wenn T die absolute Temperatur in Grad ist, also

$$T = 273° + t,$$

wenn t die Temperatur [°C] bedeutet. In Abb. 299 ist die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Flughöhe dargestellt.

Die Spitzengeschwindigkeit w der Schraube wird erhalten als Resultierende aus der Fluggeschwindigkeit v und der Umfangsgeschwindigkeit u

$$w = \sqrt{v^2 + u^2}.$$

Wäre der Wirkungsgrad der Schraube bei einem gegebenen Fortschrittsgrad λ bei kleiner Umfangsgeschwindigkeit η_0, so kann man den Wirkungsgrad bei großer Umfangsgeschwindigkeit schreiben

$$\eta = \eta_0 \cdot \eta_u. \qquad (42,41)$$

η_u berücksichtigt dann also den Einfluß der Umfangs- bzw. Spitzengeschwindigkeit der Schraube auf den Wirkungsgrad. Es zeigt sich nun, daß η_u neben der Machschen Zahl der Schraube $\mathfrak{M}_s = w/w_s$, dem

Verhältnis der Spitzengeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit, abhängig ist vom mittleren Auftriebsbeiwert c_a oder auch einem Werte

$$\tilde{c}_a = \frac{2\pi R k_s}{3\tilde{t}\cdot\frac{2}{3}}$$

oder mit

$$\frac{3\cdot\bar{t}}{2\pi R} = \bar{\chi},$$

$$\tilde{c}_a = \frac{3}{2}\,\frac{k_s}{\bar{\chi}}. \qquad (42, 42)$$

Hierbei ist

$$\bar{t} = \int_0^1 t\,dx^3.$$

Die Auswertung von Versuchsergebnissen an naturgroßen Schrauben und bei Fortschrittsgraden bis $\lambda = 0{,}15$ bzw. am Prüfstande lieferte im unterkritischen Machschen Bereiche die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} k_s &= k_{s_0}\cdot e^{\varkappa_s\left(\frac{w}{w_s}\right)^4 \frac{k_{s_0}}{\bar{\chi}}} \\ k_d &= k_{d_0}\cdot e^{\varkappa_d\left(\frac{w}{w_s}\right)^4 \frac{k_{s_0}}{\bar{\chi}}} \\ \eta_u &= \frac{1}{e^{\varkappa_\eta\left(\frac{w}{w_s}\right)^4 \frac{k_{s_0}}{\bar{\chi}}}} \end{aligned}\right\} \quad \tilde{c}_a = \tilde{c}_{a_0}\, e^{\varkappa_s\left(\frac{w}{w_s}\right)^4 \frac{k_{s_0}}{\bar{\chi}}} = \tilde{c}_{a_0}\, e^{\frac{2}{3}\varkappa_s\left(\frac{w}{w_s}\right)^4 \tilde{c}_{a_0}} \qquad (42, 43)$$

Während die angegebene Beziehung für k_d bis zu sehr hohen w/w_s, praktisch auch noch für einen Bereich überkritischer w/w_s gilt, gilt die für k_s angegebene Beziehung und damit auch die für η_u nur bis zu einem kritischen Wert, oberhalb dem k_s und damit auch η_u sehr rasch abfallen. Diese Grenze ist durch das Dickenverhältnis der Profile und durch den $\tilde{c}_a$-Wert bedingt.

Eine Abhängigkeit der eingeführten Koeffizienten $\varkappa_s$, $\varkappa_d$, $\varkappa_\eta$ von Profilform, Dickenverhältnis oder Blattbreitenverteilung konnte den Versuchsergebnissen nicht entnommen werden. Die Versuchsergebnisse ließen sich bei Metallschrauben einheitlich recht gut wiedergeben durch

$$\varkappa_s = 0{,}603,$$
$$\varkappa_d = 0{,}410,$$
$$\varkappa_\eta = 0{,}193.$$

In Abb. 300 ist für einige c_a-Werte η_u in Abhängigkeit von w/w_s dargestellt. Zur unmittelbaren Anwendung der angegebenen Beziehungen erscheint aber das in Abb. 301 wiedergegebene Nomogramm als brauchbarer. Dieses gestattet aus Durchmesser, Drehzahl, Flug-

geschwindigkeit, Flughöhe, Schubziffer und Blattvölligkeit die unmittelbare Bestimmung von η_u. Weiter ergibt sich aus ihm auch die Machsche Zahl $\mathfrak{M} = w/w_s$. Das Nomogramm ist aber ebenso wie die Gl. (42, 43) nur zu gebrauchen, solange $< \mathfrak{M}_{krit}$ ist. Die kritische Machsche Zahl ist bei dünnen Profilen etwas größer als für dickere. Ebenso nimmt sie mit dem Auftriebsbeiwert zu. Sie dürfte mit $0{,}80 < \mathfrak{M}_{krit} < 0{,}95$ abgeschätzt werden dürfen.

Eine bessere Berücksichtigung der Machschen Zahl erhält man unter Benutzung der gleichwertigen Profilpolaren, vorausgesetzt, daß solche zur Verfügung stehen (Abb. 264 u. 265).

Abb. 300. Einflußfaktor η_u der Umfangsgeschwindigkeit auf den Wirkungsgrad.

Abb. 301. Nomogramm zur Bestimmung von η_u.

Da die Spitzengeschwindigkeit w die Resultierende ist aus Umfangsgeschwindigkeit u und aus Fluggeschwindigkeit v, so ergibt sich, daß mit Vergrößerung der Fluggeschwindigkeit v die Umfangsgeschwindigkeit u immer kleiner gehalten werden muß, wenn man eine bestimmte Spitzengeschwindigkeit w nicht überschreiten will (Abb. 67).

Will man z. B. eine Spitzengeschwindigkeit von $w = 285$ m/s im Schnellflug bei $v = 200$ m/s zulassen, so kann die Umfangsgeschwindigkeit nur $u = 203$ m/s sein.

Man kann nun vielleicht fragen, ob man bei der gleichen Schraube im Steigflug bei z. B. $v = 80$ m/s eine größere Umfangsgeschwindigkeit zulassen sollte, denn für $v = 80$ m/s und $u = 203$ m/s wird $w = 218$ m/s. Das könnte an sich nützlich sein, da der Auftriebsbeiwert der Schraubenflügel, der sonst wesentlich größer würde als im Schnellflug, durch Erhöhung der Drehzahl stark vermindert würde. Zudem ist während des Steigens die Flughöhe kleiner als später und damit die Schallgeschwindigkeit größer, so daß sogar ein größeres w zulässig wäre. Eine Vergrößerung der Umfangsgeschwindigkeit z. B. durch ein Mehrganggetriebe dürfte sich aber für das Steigen dennoch nicht lohnen. Anders wird dies während des Startens mit einer Verstellschraube, wenn man bei gleicher Drehzahl wie im Schnellflug mit Abreißen der Strömung rechnen müßte. Hier könnte eine Erhöhung der Drehzahl durch ein Mehrganggetriebe unter Umständen von beachtlichem Vorteil werden.

Aus der Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit der Höhe und aus der Abnahme des Verhältnisses von Umfangsgeschwindigkeit zu Spitzengeschwindigkeit mit zunehmender Fluggeschwindigkeit ist aber zu schließen, daß die Umfangsgeschwindigkeit bei gegebener Machscher Zahl mit zunehmender Flughöhe und Fluggeschwindigkeit immer kleiner werden muß. Da also mit zunehmender Fluggeschwindigkeit v und Flughöhe H nicht nur mit keiner Zunahme von u, sondern mehr mit einer Abnahme der Umfangsgeschwindigkeit u zu rechnen ist bei der zu erwartenden Weiterentwicklung der Flugzeuge, so wird der Fortschrittsgrad $\lambda = v/u$ im Schnellflug mit dieser Weiterentwicklung beachtlich anwachsen.

L. Der Einfluß des Luftschraubenstrahls auf Tragflügel, Rumpf und Leitwerk.

43. Die Strömungsverhältnisse im Schraubenstrahl.

a) Der Einfluß der Schraube auf das Flugzeug als Anlaß zur näheren Untersuchung der Strömungsverhältnisse im Schraubenstrahl. Während die Strömungsverhältnisse im Schraubenstrahl für die Wirksamkeit der Schraube selbst nur von untergeordneter Bedeutung sind und

deshalb bei der Darlegung der Schraubentheorie im engeren Sinne nicht weiter behandelt zu werden brauchen, sind sie für das Flugzeug selbst von großer Wichtigkeit; liegen doch meist erhebliche und gerade auch für das Fliegen besonders wichtige Teile des Flugzeuges im Schraubenstrahl. Die Wirksamkeit des Leitwerkes, die Auftriebsverteilung über die Spannweite, Auftrieb und Widerstand und unter Umständen Längs-, Roll- und Giermoment werden oft entscheidend durch den Schraubenstrahl beeinflußt. Aus diesem Grunde also ist eine nähere Untersuchung der Strömungsverhältnisse im Schraubenstrahl besonders wichtig [Lit. 137].

b) Stark vereinfachtes Bild des Schraubenstrahls. Da sich ein Schraubenstrahl mit beliebiger Verteilung der Zusatzgeschwindigkeit praktisch sehr ähnlich so verhält wie ein Schraubenstrahl mit konstanter Zusatzgeschwindigkeit, so möge zunächst ein solcher betrachtet werden. Wir wollen aber noch annehmen, daß diese Zusatzgeschwindigkeit v_a nur klein sei im Vergleich zur Fluggeschwindigkeit v_0. Dann können wir die durch die Schraube hervorgerufene zusätzliche Strömung darstellen durch Überlagerung zweier Strömungsanteile. Der erste Strömungsanteil besteht aus einer Potentialströmung, welche im Unendlichen die Geschwindigkeit Null besitzt, deren Stromlinien im Unendlichen entspringen und auf dem Schraubenkreis endigen. Das Unendliche enthält also eine Quelle und der Schraubenkreis Senken, deren gesamte Schluckfähigkeit der Ergiebigkeit der Quelle im Unendlichen entspricht. Die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten auf dem Schraubenkreis sollen nun konstant sein. Auf dem Schraubenkreis gilt also als Randbedingung

$$v_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{v_a}{2} = \text{konst.} \tag{43, 1}$$

Da nun auf der Vorderseite $\partial n = \partial x$, auf der Rückseite $\partial n = -\partial x$, so wird auf der Vorderseite

$$v_x = v_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{v_a}{2} \tag{43, 2}$$

und auf der Rückseite

$$v_x = -v_n = +\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{v_a}{2}. \tag{43, 3}$$

Für das Potential φ und die Stromfunktion ψ dieser achsensymmetrischen Potentialströmung gelten die Differentialgleichungen

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{43, 4}$$

$$\overline{\Delta} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{43, 5}$$

Diese Strömung könnte man nun dadurch ermitteln, daß man sich den Schraubenkreis mit Ringsenken belegt denkt, deren Schluckfähigkeit

$$-dE = -2\pi r dr \cdot v_a$$

ist. Durch Integration würde man hieraus das gesuchte Strömungsfeld erhalten. Ebenso erhielte man hieraus auch die Strömungsgeschwindigkeiten bzw. ihre Komponenten v_x und v_r, deren Kenntnis für die Einwirkung der Schraube auf das Flugzeug besonders wichtig ist.

Erinnert man sich jedoch, daß

$$\Delta v_x = -\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = 0, \tag{43, 6}$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

bedeutet,

$$\overline{\Delta} r v_r = \overline{\Delta} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{\Delta} \psi = 0, \tag{43, 7}$$

wobei

$$\overline{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

bedeutet, daß also die Linien $v_x =$ konst. die Eigenschaft von Potentiallinien und die Linien $r v_r =$ konst. die Eigenschaft von Stromlinien

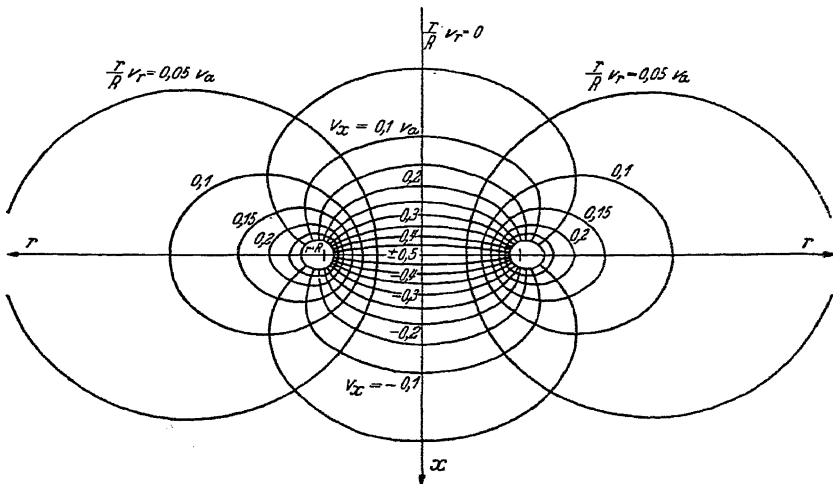



Abb. 302. Potentiallinien und Stromlinien eines Wirbelringes und ihre Deutung als Linien gleicher Axialkomponenten v_x und des r/R-fachen der Radialkomponenten v_r des einen Anteils der durch eine Schraube hervorgerufenen Störung bei konstanter Schubverteilung.

haben, so ergibt sich, daß die Linien $v_x =$ konst. bei den gegebenen Randbedingungen gleich den Potentiallinien $\varphi =$ konst. und die Linien $r v_r =$ konst. gleich den Stromlinien $\psi =$ konst. der durch einen Wirbel-

ring erzeugten Strömung sind. Der Wirbelring liegt dabei in der Schraubenkreisberandung. Der „Zirkulation" entspricht

$$„\Gamma" = v_a .$$

Der entsprechende „Potential"sprung ist im Schraubenkreise zu denken und hat von $+ v_a/2$ auf $- v_a/2$ stattzufinden, vgl. Abb. 302.

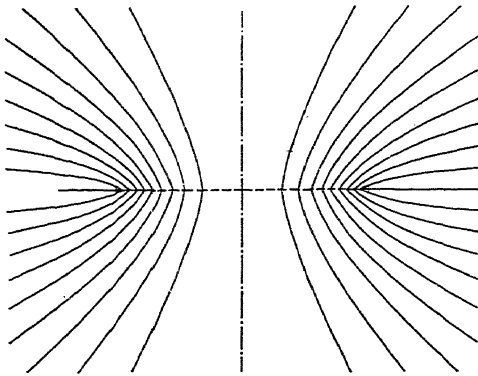



Abb. 303. Der eine Anteil der durch eine Schraube hervorgerufenen Störung bei konstanter Schubverteilung.

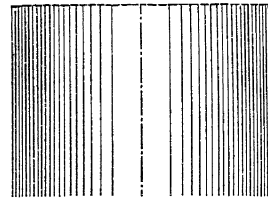



Abb. 304. Der andere Anteil der durch eine Schraube hervorgerufenen Störung bei konstanter Schubverteilung.

Aus den Linien konstanter Geschwindigkeitskomponenten v_x und $r v_r$ erhält man dann sehr leicht auch die Potentiallinien und Stromlinien des ersten Anteils der Störungsströmung. Er ist in Abb. 303 dargestellt.

Der zweite Anteil der Störungsströmung ist nur in dem Gebiete hinter dem Schraubenkreis hinzuzufügen. Davor und außerhalb dieses

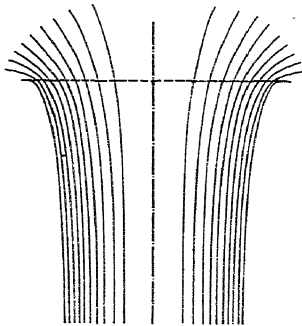



Abb. 305. Die durch eine Schraube hervorgerufene Störung und die durch eine Schraube im Stande hervorgerufene Strömung in erster Näherung bei konstanter Schubverteilung.

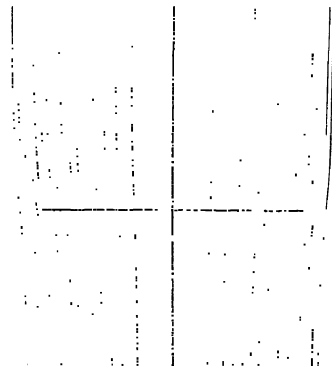



Abb. 306. Die durch eine Schraube beeinflußte Strömung für den Fall $v_a/v_0 = 0{,}4$ als Beispiel bei konstanter Schubverteilung.

Gebietes stellt der gefundene erste Anteil an der Störungsströmung diese schon selbst hinreichend dar. Als zweiten Anteil der Störungsströmung hat man eine Parallelströmung der konstanten Geschwindigkeit $+ v_a$ im Gebiete hinter der Schraube anzubringen, Abb. 304.

Diese gesamte Störungsströmung, Abb. 305, hat dann folgende Eigenschaften: Aus dem Unendlichen strömt der Schraube von überall her Luft zu. In der Schraubenkreisebene ist die Zusatzgeschwindigkeit $+ v_a/2$ vorhanden, weit hinter der Schraube ist die Zusatzgeschwindigkeit $+ v_a$.

Diese Strömung ist in Abb. 305 dargestellt. Überlagert man nun dieser Strömung die der Fluggeschwindigkeit entsprechende Parallelgeschwindigkeit v_0, so erhält man ein brauchbares Bild des Schraubenstrahls. In Abb. 306 ist ein solches für $v_a/v_0 = 0{,}4$ gezeichnet. Beim Durchgang durch die Schraubenkreisebene ändert sich die Axialgeschwindigkeit stetig, Abb. 307. Der Druck jedoch ändert sich unstetig, Abb. 308.

Abb. 307. Die Geschwindigkeitsverteilung auf der Schraubenachse bei konstanter Schubverteilung.

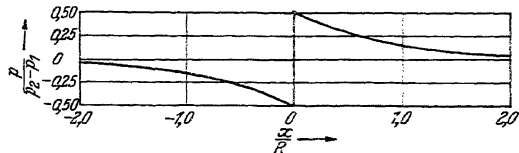



Abb. 308. Die Druckverteilung auf der Schraubenachse bei konstanter Schubverteilung.

Allgemein hat man (12, 25)

$$\frac{v_a}{v_0} = \sqrt{1 + c_s} - 1 \quad (43,8)$$

zu setzen, wobei $c_s = \dfrac{S}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 \pi R^2}$ den Schubbelastungsgrad bedeutet.

Ist nun v_a nicht konstant über den Schraubenkreis, so kann man die Geschwindigkeitsverteilung im Strahl in folgender Weise abschätzen:

Man zeichnet zunächst die Stromlinien des Strahles so, als ob $v_a = v_0 (\sqrt{1 + c_s} - 1) = \text{konst.}$ wäre. Längs jeder dieser Stromlinien ist dann in erster Näherung die Axialkomponente der Störgeschwindigkeit gleich den durch die Abb. 302 angegebenen Vielfachen der wirklich erteilten Zusatzgeschwindigkeit. Die Radialgeschwindigkeiten sind in erster Näherung ungeändert.

Die in Wirklichkeit vorhandenen Umfangskomponenten kann man nach dem Drallsatz in erster Näherung aus den Umfangskomponenten in der Schraubenkreisebene berechnen, wenn man die Radienänderungen gleich den bei konstanten v_a errechneten setzt.

Einer konstanten Zusatzgeschwindigkeit v_a entspricht aber eine Schraube konstanter Zirkulation. Vernachlässigt man also die Unterschiede der Zusatzgeschwindigkeit, so muß man folgerichtig auch für die Umfangskomponente v_u

$$r \cdot v_u = \text{konst.} \quad (43,9)$$

setzen. Am Umfange ($r = R$) ist dann bei Vernachlässigung der Strahleinschnürung und des Strahlunterdrucks

$$\frac{v_u}{u} = 1 - \sqrt{1 - k_s} = 1 - \sqrt{1 - \lambda^2 c_s}. \quad (43,10)$$

c) Beschreibung des Aufrollens der Wirbelfläche hinter einer Schraube. Die hinter der Schraube zurückbleibenden schraubenflächenförmigen Wirbelbänder rollen sich ähnlich wie die ebenen Wirbelflächen hinter einem Tragflügel [Lit. 284] sowohl von außen, d. h. der Flügelspitze her, als von innen, d. h. von der Flügelwurzel her, auf, so daß nach beendetem Aufrollvorgang von jedem schraubenflächigen Wirbel, wie er hinter einem jeden Schraubenflügel zunächst vorhanden ist, ein äußerer und ein innerer Einzelwirbelfaden zurückbleibt. Die Zirkulation eines jeden dieser Wirbelfäden ist gleich dem Größtwert der Zirkulation längs des Schraubenflügels. Das Aufrollen geschieht aber nicht nur von der Flügelspitze und der Flügelwurzel her, sondern auch von der Stelle des Größtwertes der Zirkulation. Das Aufrollen vollzieht sich verhältnismäßig rasch und ist unter Umständen im wesentlichen schon nach einem geringen Teil einer Schraubenumdrehung vollendet. Der Beobachtung ist dieser Aufrollvorgang in verhältnismäßig einfacher Weise zugänglich. Bei in Wasser betriebenen Schrauben sammeln sich im Kern der Wirbel Luftblasen an. Nach den Wirbelkernen zu ist das Druckgefälle so groß, daß die gegenüber dem Wasser sehr leichten Luftblasen dorthin schwimmen müssen. Die Druckerniedrigung ist aber auch Ursache des Ausscheidens von im Wasser gelöster Luft oder anderer Gase, oder wenn die Druckerniedrigung groß genug ist, sogar einer Verdampfung.

Durch die Ansammlung von Luft oder durch Verdampfung in diesen Unterdruckgebieten der Wirbelkerne von Schiffsschrauben werden diese bei klarem Wasser beim Anfahren schon ohne weitere Vorkehrungen sichtbar. O. Flamm gelang es darüber hinaus auch in einem kleinen Versuchstank mit freifahrenden elektrisch angetriebenen Schraubenmodellen schon 1909 diesen Vorgang eingehend zu untersuchen und im Lichtbild festzuhalten [Lit. 122]. Abb. 309 und 310 zeigen Ausschnitte aus diesen Lichtbildern. In beiden Fällen handelt es sich um den Versuch mit einer dreiflügeligen Modellschraube. Im ersten Beispiel, Abb. 309, ist die Luft aber nur an einem Schraubenflügel eingebrochen, vermutlich wegen nicht ganz gleichartiger Ausbildung der Flügel und wegen der nur kleinen Belastung, so daß man gerade hier sehr leicht den Vorgang zu verfolgen vermag. Gleich hinter der Schraube beginnen die mit Luft erfüllten Wirbelgebiete. Während aber der Bahndurchmesser des Spitzenwirbels schnell, wenn auch nicht viel, kleiner wird und bald seinen Endwert erreicht, was einem schnellen Aufrollen des Wirbelbandes entspricht, ist der Nabenwirbel zunächst in der Schraubenachse gelegen und erweitert seinen Bahndurchmesser nur sehr allmählich. Das rührt daher, daß die Wirbeldichte in Nähe der Flügelspitzen, wie ganz allgemein, groß ist. Dem entspricht ein schnelles Einrollen. Gegen die Nabe zu ist die Wirbeldichte, wie ganz

allgemein, wesentlich geringer und daher das Aufrollen viel weniger rasch. Daß das Druckgefälle beim Beginn des Einrollens noch so klein sein kann, daß sich die Luftbläschen nicht so rasch sammeln können, um die Lage des Unterdruckgebietes schon beim Beginn des Einrollens zu kennzeichnen, geht aus dem zweiten der Arbeit von O. FLAMM

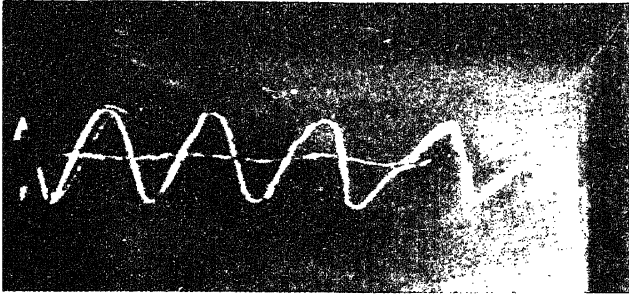



Abb. 309. Von einem einzelnen Flügel einer im Wasser fahrenden Schraube ausgehende Spitzenwirbel und Fußwirbel, deren Wirbelkern durch darin angesammelte Luftblasen sichtbar wird.

entnommenen Beispiel, Abb. 310, hervor, wo zwar das in Nähe der Nabe vorhandene Unterdruckgebiet schon von Beginn an von Luft erfüllt ist, die Spitzenwirbel aber erst nach einem verhältnismäßig großen Wege. Diese Verzögerung der Ansammlung von Luftblasen ist durch kleine Belastung bedingt, weil hierbei nicht nur das endgültige Druck-

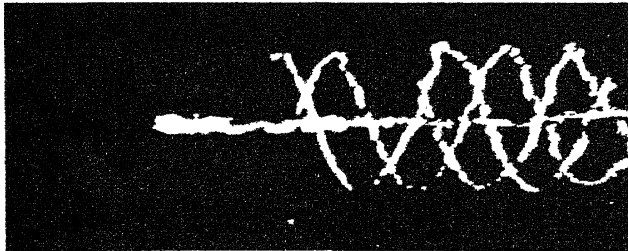



Abb. 310. Die von einer im Wasser fahrenden dreiflügeligen Schraube ausgehenden Spitzenwirbel und Fußwirbel, deren Wirbelkern durch darin angesammelte Luftblasen sichtbar wird.

gefälle klein ist, sondern auch zum Aufrollen ein längerer Weg benötigt wird. Bei der Untersuchung der Hohlraumbildung durch Verdampfung bei Schiffsschrauben benutzte C. A. PARSONS 1919 einen mit entgastem Wasser gefüllten, unter Unterdruck gesetzten geschlossenen Tank. Ein von PARSONS an einer dreiflügeligen Modellschraube gewonnenes Bild ist in Abb. 311 wiedergegeben. Auch hier ist die Lage der Spitzenwirbel recht deutlich zu erkennen.

Aus diesen Bildern ist aber neben der Zusammenziehung des Bahndurchmessers der Spitzenwirbel auch eine allmähliche Zunahme der Steigung zu erkennen, welche der Beschleunigung am Anfange des Schraubenstrahls entspricht.

Auch bei Luftschrauben ist das Einrollen der Spitzenwirbel allerdings nur selten und dazu nicht besonders deutlich ohne weiteres zu

Abb. 311. Die von einer dreiflügeligen Schraube in entgastem Wasser am Stand ausgehenden Spitzenwirbel, bei denen der Wirbelkern durch die Hohlraumbildung infolge Erreichung des Dampfdruckes im Wirbelkerngebiet sichtbar wird. Hierbei ist die Kontraktion und Steigungszunahme der Schraubenwirbel deutlich zu erkennen.

beobachten, nämlich bei sehr großem relativem Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Im Unterdruckgebiet bildet sich dann Nebel, welcher den Vorgang sichtbar macht.

Bei Modellversuchen an Luftschrauben ist die Beobachtung des Einrollens neuerdings VALENSI gelungen [Lit. 135]. Hierbei wurde durch

Abb. 312. Skizze zur Erläuterung des Aufrollvorgangs im Motorflug.

Abb. 313. Skizze zur Erläuterung des Aufrollvorgangs im [illegible].

eine feine Düse Rauch der die Luftschraube durchströmenden Luft beigesetzt, und zwar nacheinander an verschieden weit von der Luftschraubenachse entfernten Stellen. Hierbei konnten von der Flügelspitze und von den Flügelwurzeln ausgehende Haupteinrollungen beobachtet werden, auch seitlich von der sich neutral verhaltenden Stelle des Zirkulationsgrößtwertes je eine Nebeneinrollung. Es ist also so, als würde das schraubenflächige Wirbelband an der Stelle des Zir-

kulationsgrößtwertes eingerissen. Die in der Nachbarschaft davon allerdings recht geringe Wirbeldichte gestattet kein so heftiges Einrollen wie an den Flügelspitzen oder auch nur wie an den Flügelwurzeln.

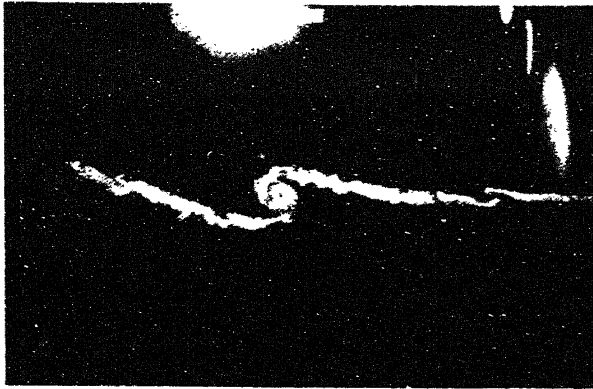



Abb. 314. Aufrollvorgang an den Flügelspitzen einer Schraube im Motorflugzustand, sichtbar gemacht durch Rauchbeimischung mittels einer feinen Düse.

Der Vorgang werde durch die Skizze der Abb. 312 veranschaulicht. Als Beispiel eines solchen durch Raucheinblasen gewonnenen Bildes diene die Abb. 314.

Läuft die Schraube mit so großem Fortschrittsgrade, daß sie keinen Schub mehr erzeugt, sondern einen Widerstand erfährt und dabei

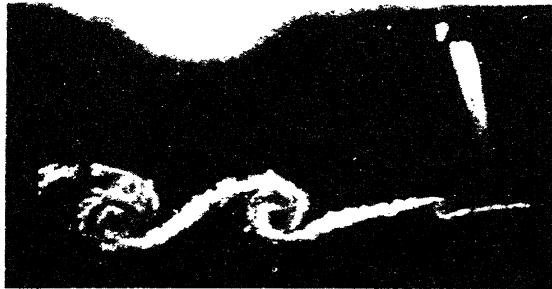



Abb. 315. Aufrollvorgang an den Flügelspitzen einer Schraube im Sturzflugzustand, sichtbar gemacht durch Rauchbeimischung mittels einer feinen Düse.

keine Leistung mehr aufnimmt, sondern abgibt, läuft die Schraube also als Windmühle, wie dies im Sturzflug vorkommt, so hat die Zirkulation ein anderes Vorzeichen und damit auch die Wirbeldichte der Wirbelbänder. Das Aufrollen geschieht dann mit umgekehrtem Drehsinn, wie die Skizze der Abb. 313 veranschaulicht. Abb. 315, welche durch Raucheinblasen gewonnen wurde, möge hierzu als Beispiel dienen.

Solange eine Schraube einen Schub erzeugt, ist die Steigung H_w der Schraubenwirbel größer, als dem Fortschritt $H_0 = v_0/n$ der Schraube bei einer Umdrehung entspricht. H_w ist also schon vorhanden, wenn $H_0 = 0$ ist, also am Stande. Nach dem Übergang von der Erzeugung eines Schubs zur Erzeugung eines Widerstandes wird H_w kleiner als H_0. Bei dem der beschriebenen Beobachtung wegen des Fehlens der Zirkulation nicht zugänglichen Zustand H_w gleich H_0, ist der Schub Null.

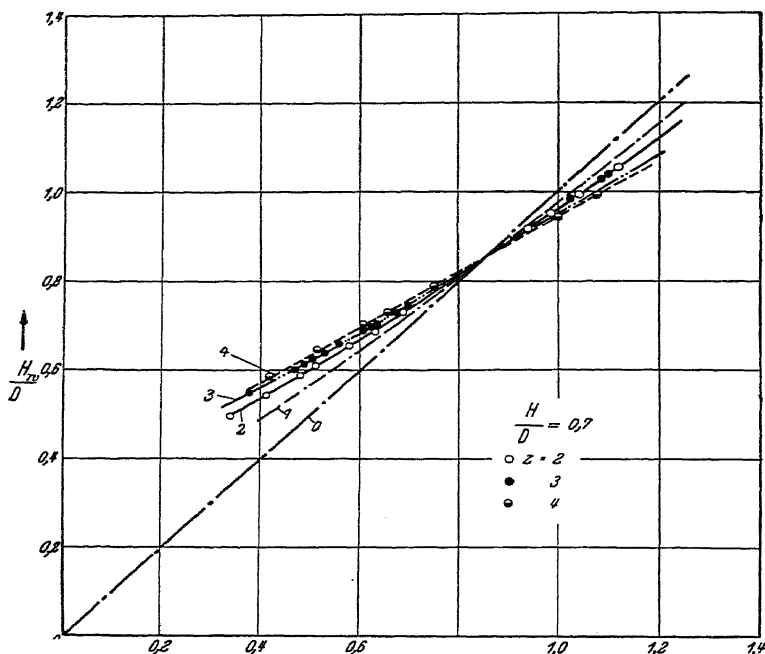



Abb. 316. Abhängigkeit der Ganghöhe H_w der Schraubenwirbel vom Fortschritt v_0/n je Umdrehung bei gleicher Flügelform und gleichem Steigungsverhältnis H/D und verschiedener Flügelzahl z.

Je größer der Schubbelastungsgrad bei gegebenem Fortschrittsgrad ist, um so größer ist $H_w - H_0$.

Bei gleichem Blattbreitenverhältnis muß also $H_w - H_0$ um so größer sein, je größer die Steigung H und je größer die Flügelzahl z der Schraube ist. VALENSI hat für die von ihm untersuchte Schraubenfamilie den in Abb. 316 und 317 dargestellten Zusammenhang gefunden.

Beim Vergleich mit dem Einrollen des Wirbelbandes hinter einem Tragflügel fällt zunächst die Heftigkeit des Einrollens bei der Schraube auf. Begründet ist diese durch den im Vergleich zum Zirkulationsabfall nach den Enden des Tragflügels zu im allgemeinen viel heftigeren Zirkulationsabfall bei der Schraube an der Flügelspitze. Darüber hin-

aus muß man aber auch beachten, daß der von den Flügelspitzen der Schraube zurückgelegte Weg bei der Betrachtung von der Seite her sehr stark verkürzt erscheint, so daß die vergleichsweise Heftigkeit des Einrollens zu einem wesentlichen Teil nur vorgetäuscht ist und unter Zugrundelegung des zurückgelegten Weges der Schraubenspitzen doch mit dem Aufrollen des Wirbelbandes hinter einem Tragflügel

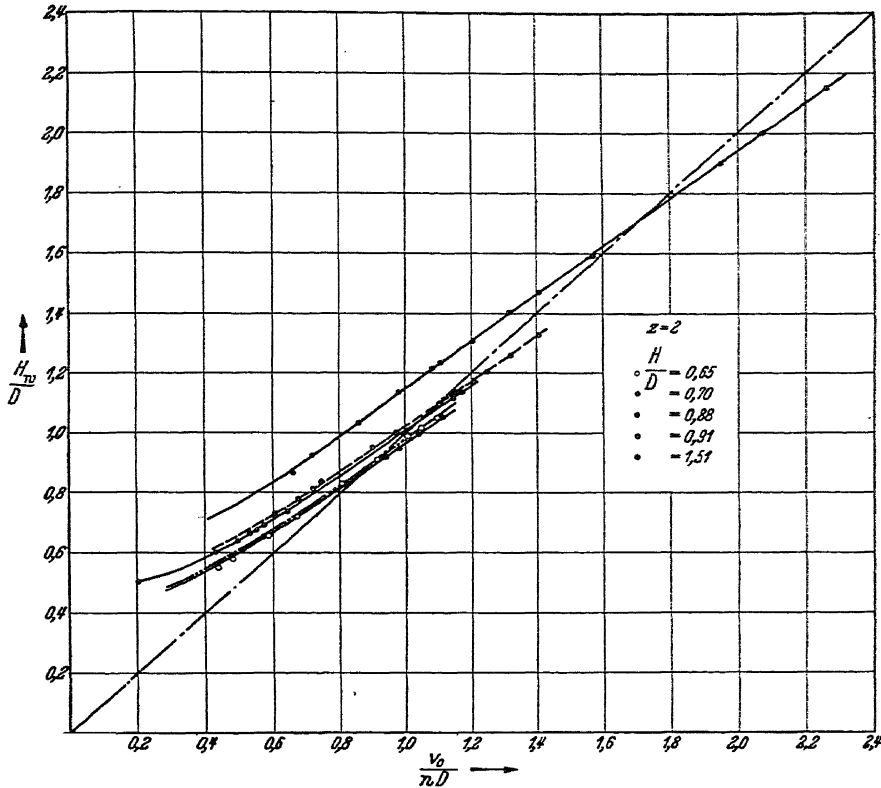



Abb. 317. Abhängigkeit der Ganghöhe H_w der Schraubenwirbel vom Fortschritt v_0/n je Umdrehung bei gleicher Flügelform und gleicher Flügelzahl z und verschiedenem Steigungsverhältnis H/D.

vergleichbar wird. Die Nebeneinrollungen von der Stelle des Zirkulationsgrößtwertes eines Tragflügels nach beiden Seiten hin wurden allerdings bisher noch nicht beschrieben. Es dürfte jedoch kaum ein Zweifel an deren Existenz auch beim Tragflügel bestehen; dennoch wäre deren Untersuchung wünschenswert, da sie sicherlich Einfluß auf die Verhältnisse an den Leitwerken üblicher Flugzeuge haben.

d) Ersatz der nichtstationären schraubensymmetrischen Strömung weit hinter der Schraube durch eine stationäre achsensymmetrische. Da die Steigung H_w des schraubenförmigen Wirbelfadens größer ist als

der Fortschritt $H_0 = v_0/n$ der Schraube je Umdrehung, so ist die schraubensymmetrische Strömung weit hinter der Schraube weder relativ zum Flugzeug noch zur Schraube stationär. Im Mittel jedoch läßt sich diese nichtstationäre Strömung, z. B. für die Untersuchung des Einflusses der Schraube auf das Flugzeug, durch eine achsensymmetrische stationäre ersetzen. Man hat sich hierzu die schraubenförmigen Spitzen- und Fußwirbel gleichmäßig flächenhaft je auf den den Schraubenlinien zugehörigen Zylindern vom Radius r_a und r_i verteilt zu denken. Man erhält dadurch eine gleichmäßige flächenhafte Verteilung von schraubenförmigen Wirbeln auf diesen Zylindern. Die Steigung H_w dieser Wirbel ist die gleiche wie die der Ausgangswirbel.

Denkt man sich nun jeden dieser Elementarschraubenwirbel durch einen stufenförmigen Wirbel ersetzt, so kann man die in Achsenrichtung liegenden Teile der Wirbel und ebenso die in Umfangsrichtung liegenden je für sich zusammenfassen. Dadurch erhält man den Ersatz der Schraubenwirbelsysteme auf den beiden Zylindern durch je ein System aus parallel zur Achse verlaufenden geraden Wirbelfäden und durch je ein System von senkrecht zur Achse verlaufenden ringförmigen Wirbelfäden.

Wir untersuchen zunächst das von einem auf einem Zylinder gleichmäßig verteilten System von Stabwirbeln erzeugte Geschwindigkeitsfeld. Im Äußeren wirkt ein solcher mit stabförmigen Wirbeln gleichmäßig besetzter Zylinder wie ein einziger Stabwirbel gleicher Gesamtzirkulation $\overline{\Gamma}_3$ in der Achse des Zylinders. Im Innern dagegen ist keine Geschwindigkeit vorhanden. Da für den inneren wie äußeren Zylinder die Gesamtzirkulation $\overline{\Gamma}_3$ gleich groß aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist, ergibt sich, daß im gemeinsamen Inneren und gemeinsamen Äußeren beider Zylinder die von dem Stabwirbelsystem herrührende Umfangsgeschwindigkeit v_u verschwindet, im Gebiete dazwischen aber

$$v_u = \frac{\overline{\Gamma}_3}{2\pi r} \qquad (r_i < r < r_a) \tag{43, 11}$$

ist. Einen von den Stabwirbeln herrührenden axialen Geschwindigkeitsanteil gibt es nicht.

Nun haben wir noch das von einem auf einem Zylinder gleichmäßig verteilten Ringwirbelsystem herrührende Geschwindigkeitsfeld zu untersuchen. Im Unendlichen ist die Geschwindigkeit als unverändert zu betrachten. Daraus folgt aber, daß im ganzen Äußeren des Zylinders durch das Ringwirbelsystem die Strömung ungeändert bleibt.

Beim Durchgang durch den Zylinder ändert sich die Axialkomponente dann sprunghaft entsprechend der Wirbeldichte des Ringwirbelsystems. Im Innern wird daher durch das Ringwirbelsystem eine

konstante axiale Zusatzgeschwindigkeit $\bar{v}_a$ erzeugt. Diese ist gleich der Wirbeldichte

$$\bar{v}_a = \frac{\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{H_w}. \tag{43, 12}$$

Die Wirbeldichte und damit die axiale Zusatzgeschwindigkeit ist der Quotient aus Gesamtzirkulation $\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}$ und der Steigung H_w der Schraubenwirbellinien. Diese Steigung H_w selbst berechnet sich aber aus der Zahl n der Umdrehungen in der Zeiteinheit und der Fortschrittsgeschwindigkeit v_w des Wirbelsystems. Diese ist aber der Mittelwert zwischen der im Äußeren vorhandenen Fortschrittsgeschwindigkeit v_0 und der im Inneren gegenüber v_0 um $\bar{v}_a$ vermehrten Geschwindigkeit $\bar{v}_m = v_0 + \bar{v}_a$, so daß also

$$v_w = v_0 + \frac{\bar{v}_a}{2} \tag{43, 13}$$

ist und damit

$$H_w = \frac{v_w}{n} = \frac{v_0 + \frac{\bar{v}_a}{2}}{n} \qquad \left(n = \frac{\omega}{2\pi}\right). \tag{43, 14}$$

Damit ergibt sich

$$\bar{v}_a = \frac{n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{v_0 + \frac{\bar{v}_a}{2}}. \tag{43, 15}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\bar{v}_a$:

$$\bar{v}_a^2 + 2\bar{v}_a v_0 = 2n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}.$$

$$\bar{v}_a = \sqrt{v_0^2 + 2n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}} - v_0 = v_0\left(\sqrt{1 + \frac{2n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{v_0^2}} - 1\right) \tag{43, 16}$$

und damit

$$\frac{\bar{v}_m}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{2n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{v_0^2}}. \tag{43, 17}$$

Hierin kann $\frac{2n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{v_0^2}$ noch umgeformt werden:

$$\frac{2n\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{v_0^2} = \frac{2n\mathfrak{z}\Gamma_m}{v_0^2}\cdot\frac{\bar{\Gamma}_\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}\Gamma_m} = \frac{2n\mathfrak{z}\Gamma_m}{v_0^2}\cdot\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_m}. \tag{43, 18}$$

Ist Γ_m die mittlere Zirkulation an den Schraubenflügeln, deren Spitzenradius R sei,

$$\Gamma_m = \int_0^1 \Gamma\, d\left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{43, 19}$$

und die mittlere Durchflußgeschwindigkeit in der Schraubenkreisebene

$$v_m = v_0 + \frac{v_a}{2}, \tag{43, 20}$$

so ergibt sich nach dem von FÖTTINGER abgeleiteten Turbinenleistungssatz, wenn $Q = F_s \cdot v_m$ die Durchflußmenge ist, als Leistung [Lit. 61] (14, 16)

$$N = \varrho\frac{\omega}{2\pi} Q\mathfrak{z}\Gamma_m = \varrho n v_m \pi R^2 \mathfrak{z}\Gamma_m. \tag{43, 21}$$

Hiermit wird

$$\frac{2n\,\mathfrak{z}\,\Gamma_m}{v_0^2} = \frac{N}{\frac{\varrho}{2}\,v_0^3\,\pi\,R^2}\cdot\frac{v_0}{v_m} = \frac{k_d}{\lambda^3}\cdot\frac{v_0}{v_m}$$

und damit

$$\frac{2n\,\bar{\Gamma}_{\mathfrak{z}}}{v_0^2} = \frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_m}\cdot\frac{k_d}{\lambda^3}\cdot\frac{v_0}{v_m}\,, \tag{43, 22}$$

wobei

$$k_d = \frac{N}{\frac{\varrho}{2}\,u^3\,\pi\,R^2}$$

die Leistungsziffer, $\lambda = v_0/u$ den Fortschrittsgrad bedeuten. Die Leistung der Schraube muß sich sowohl aus den Drall- und Durchflußverhältnissen in der Schraubenkreisebene wie auch aus denen in einer Ebene weit hinter der Schraube berechnen lassen.

In der Schraubenkreisebene berechnet sich (43, 21)

$$N = \varrho\,n\,v_m\,\pi\,R^2\,\mathfrak{z}\,\Gamma_m\,,$$

weit dahinter entsprechend

$$N = \varrho\,n\,\bar{v}_m\,\pi\,(r_a^2 - r_i^2)\,\mathfrak{z}\,\bar{\Gamma} \qquad (\mathfrak{z}\,\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_{\mathfrak{z}})\,. \tag{43, 23}$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich hieraus

$$K = \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2} = \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}}\cdot\frac{v_m}{\bar{v}_m}\,. \tag{43, 24}$$

Die Durchflußgeschwindigkeit v_m durch die Schraubenkreisebene läßt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung bestimmen. Man denkt sich hierbei die Wirbelbänder schon in der Schraubenkreisebene aufgerollt (Index ∞). Die Zusatzgeschwindigkeiten in axialer Richtung können dort aber nur halb so groß sein wie weit dahinter, so daß auch Innen- und Außenradius der Wirbelflächen in der Schraubenkreisebene etwas anders werden als weit dahinter.

Wir schreiben

$$\frac{r_{a\infty}^2 - r_{i\infty}^2}{R^2} = K_\infty\,, \quad \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2} = K\,. \tag{43, 25}$$

Dann muß also wegen der zu verlangenden Gleichheit der Leistung und der Durchflußmenge sein

$$\bar{v}_m K = \bar{v}_{m\infty} K_\infty$$

oder

$$K_\infty = \frac{\bar{v}_m}{\bar{v}_{m\infty}}\,K\,. \tag{43, 26}$$

Soll die gleiche Menge durch den Schraubenkreis strömen sowohl im Falle der nichtaufgerollten wie im Falle der aufgerollten Wirbelflächen, so muß sein

$$v_m\,\pi\,R^2 = \bar{v}_{m\infty}\,\pi\,(r_{a\infty}^2 - r_{i\infty}^2) + v_0\,\pi\,(R^2 - (r_{a\infty}^2 - r_{i\infty}^2))$$

oder

$$v_m = \bar{v}_{m\infty} K_\infty + v_0\,(1 - K_\infty)\,. \tag{43, 27}$$

Da nun

$$\bar{v}_{m\infty} = v_0 + \frac{\bar{v}_a}{2}, \qquad \bar{v}_m = v_0 + \bar{v}_a$$

oder

$$\bar{v}_{m\infty} = \bar{v}_m - \frac{\bar{v}_a}{2} = \frac{\bar{v}_m}{2} + \frac{v_0}{2}$$

ist, so wird

$$\frac{\bar{v}_m}{\bar{v}_{m\infty}} = \frac{2\,\frac{\bar{v}_m}{v_0}}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1} \tag{43, 28}$$

Setzt man (43, 26) und (43, 28) in (43, 27) ein, so erhält man

$$v_m = \bar{v}_m K + v_0 \left(1 - \frac{2\,\frac{\bar{v}_m}{v_0}}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1} K\right) \tag{43, 29}$$

und mit (43, 24)

$$v_m = v_m \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}} + v_0 - v_m \frac{2\,\frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}}}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1} \tag{43, 30}$$

und damit

$$v_m \left(1 - \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}} \frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}\right) = v_0 \,. \tag{43, 31}$$

Setzt man dies Ergebnis in (43, 22) ein, so erhält man

$$\frac{2n\bar{\Gamma}_3}{v_0^2} = \frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_m} \cdot \frac{k_d}{\lambda^3} \left(1 - \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}} \frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}\right) \tag{43, 32}$$

und da nach (43, 17) auch

$$\frac{2n\bar{\Gamma}_3}{v_0^2} = \left(\frac{\bar{v}_m}{v_0}\right)^2 - 1,$$

so wird zur Bestimmung von $\bar{v}_m/v_0$ gewonnen

$$1 + \frac{k_d}{\lambda^3} \left(\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_m} - \frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}\right) = \left(\frac{\bar{v}_m}{v_0}\right)^2. \tag{43, 33}$$

Die sich hieraus ergebenden $\bar{v}_m/v_0$ sind in Abb. 318 in Abhängigkeit von k_d/λ^3 und $\bar{\Gamma}/\Gamma_m$ dargestellt. Hiermit läßt sich auch gewinnen

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{1}{1 - \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}} \frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}} = \frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0}\left(1 - \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}}\right) + \left(1 + \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}}\right)} \tag{43, 34}$$

und damit

$$K = \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2} = \frac{\Gamma_m}{\Gamma} \frac{\frac{v_m}{v_0}}{\frac{\bar{v}_m}{v_0}} = \frac{\Gamma_m}{\Gamma} \frac{1 + \frac{v_0}{\bar{v}_m}}{\frac{\bar{v}_m}{v_0}\left(1 - \frac{\Gamma_m}{\Gamma}\right) + \left(1 + \frac{\Gamma_m}{\Gamma}\right)} = \frac{\Gamma_m}{\Gamma} \frac{\frac{1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0}}}{1 - \frac{\Gamma_m}{\Gamma} \frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}}. \quad (43, 35)$$

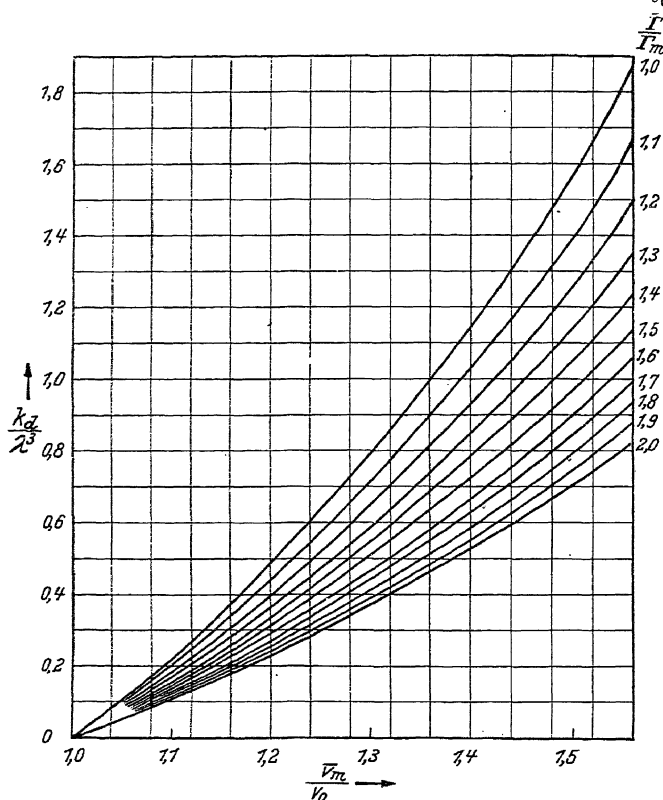



Abb. 318. Darstellung des Zusammenhanges zwischen $\frac{k_d}{\lambda^3}$, $\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_m}$, $\frac{\bar{v}_m}{v_0}$.

Nachdem die Größe $K = \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2}$ berechnet worden ist, muß noch das Verhältnis r_a/r_i berechnet werden. Dies kann man unter Zuhilfenahme des Schubes S. Der Schub ist aber nicht allein zu errechnen aus dem Anteil S_v, welcher der Vermehrung der axialen Geschwindigkeit entspricht, sondern auch aus der Verminderung S_p, welche durch den Strahlunterdruck p_u hervorgerufen wird. Es muß also sein (vgl. Abschn. 12i)

$$S = S_v - S_p . \quad (43, 36)$$

Hierbei ist dann

$$S_v = \varrho\, \bar{v}_m\, \pi\, (r_u^2 - r_i^2)\, \bar{v}_a\,, \tag{43, 37}$$

$$S_p = \int_{r_i}^{r_a} p_u\, 2\pi\, r\, dr\,. \tag{43, 38}$$

Der Unterdruck p_u ist

$$p_u = \frac{\varrho}{2}\,(v_u^2 - v_{ua}^2) \qquad \text{für } r_i < r < r_a\,. \tag{43, 39}$$

Die Umfangskomponente v_u berechnet sich aus der Zirkulation

$$\overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}} = 2\pi\, r\, v_u$$

zu

$$v_u = \frac{\overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}\,. \tag{43, 40}$$

Hiermit wird

$$p_u = \frac{\varrho}{2}\,\frac{\overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_a^2}\right) \qquad \text{für } r_i < r < r_a \tag{43, 41}$$

und damit

$$S_p = \frac{\varrho\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}^2}{8\pi} \int_{r_i^2}^{r_a^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_a^2}\right) dr^2\,,$$

$$S_p = \frac{\varrho\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}^2}{8\pi}\left[\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}\,(r_u^2 - r_i^2)\right]. \tag{43, 42}$$

Die Leistung N ist

$$N = \varrho\, \bar{v}_m\, \pi\, (r_u^2 - r_i^2)\, n\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}} \tag{43, 43}$$

oder mit

$$\frac{2\, n\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}}{v_0^2} = \gamma\,, \qquad \frac{\bar{v}_m}{v_0} = \sqrt{1 + \gamma}\,, \tag{43, 44}$$

$$N = \frac{\varrho}{2}\, v_0^3\, \pi\, (r_a^2 - r_i^2)\, \gamma \sqrt{1 + \gamma}\,. \tag{43, 45}$$

Der Gesamtschub ist

$$S = S_v - S_p = \varrho\, \bar{v}_m\, \pi\, (r_a^2 - r_i^2)\, \bar{v}_a - \frac{\varrho\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}^2}{8\pi}\left[\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\right] \tag{43, 46}$$

oder mit

$$\varrho\, \bar{v}_m\, \pi\, (r_a^2 - r_i^2) = \frac{N}{n\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}}\,, \qquad \frac{2\, n\, \overline{\Gamma}_{\mathfrak{z}}}{v_0^2} = \gamma\,, \qquad \frac{\bar{v}_a}{v_0} = \sqrt{1 + \gamma} - 1\,,$$

$$S = \frac{2N}{v_0}\,\frac{\sqrt{1 + \gamma} - 1}{\gamma} - \frac{\varrho\, v_0^4}{8\pi\, n^2}\,\gamma^2 \left[\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\right] \tag{43, 47}$$

oder mit dem Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{v_0\, S}{N}\,,$$

$$\eta = \frac{2\,(\sqrt{1 + \gamma} - 1)}{\gamma} - \frac{\varrho\, v_0^5}{8\pi\, n^2\, N}\,\gamma^2 \left[\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\right]. \tag{43, 48}$$

Mit

$$k_d = \frac{N}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^3 \pi R^5}, \qquad n = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad \lambda = \frac{v_0}{\omega R}$$

wird

$$\frac{\varrho\, v_0^5}{8\pi n^2 N} = \frac{\lambda^5}{k_d} \tag{43, 49}$$

und damit

$$\ln \frac{r_a^2}{r_i^2} - \left(1 - \frac{r_a^2}{r_i^2}\right) = \frac{k_d}{\lambda^5 \gamma^2}\left(\frac{2(\sqrt{1+\gamma}-1)}{\gamma} - \eta\right) = L\left(\frac{r_i}{r_a}\right) \tag{43, 50}$$

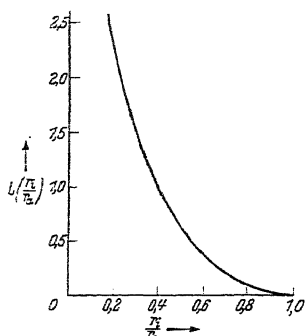



Abb. 319. Hilfsfunktion $L\left(\frac{r_i}{r_a}\right) = \frac{k_d}{\lambda^5 \gamma^2}\left(\frac{2\sqrt{1+\gamma}-1}{\gamma} - \eta\right)$ zur Bestimmung von r_i/r_a.

Zum Zwecke der numerischen Rechnung ist $L(r_i/r_a)$ in Abb. 319 aufgetragen.

Nunmehr sollen noch die Umfangskomponenten berechnet werden. Mit $\overline{\Gamma}_5 = 2\pi r v_u$ wird

$$N = \varrho\, v_m \pi (r_a^2 - r_i^2)\, \omega r v_u$$

oder mit $v_0/\omega R = \lambda$

$$k_d = \frac{N}{\frac{\varrho}{2}\,\omega^3 \pi R^5} = 2\frac{\overline{v}_m}{v_0}\frac{v_u}{v_0} K \cdot \frac{r}{R}\lambda^2$$

und damit

$$\frac{r}{R}\frac{v_u}{v_0} = \frac{k_d}{2\frac{\overline{v}_m}{v_0} K \lambda^2}. \tag{43, 51}$$

e) Beispiel für die Vereinfachung des Strömungsbildes bei Berücksichtigung des Aufrollvorgangs. Die Zirkulationsverteilung über den Schraubenflügel möge bekannt sein. Dann kann $\Gamma_m/\overline{\Gamma}$ bestimmt werden.

In Abb. 320 ist als Beispiel eine aus Versuchen [Vers. 21], [Lit. 130] gefundene Verteilung der Tangentialgeschwindigkeit v_u/v_0 über dem Schraubenradius aufgetragen. Hieraus läßt sich die Zirkulationsverteilung

$$\frac{\Gamma}{2\pi R v_0} = \frac{r}{R}\frac{v_u}{v_0}$$

bestimmen. Für das Beispiel liegt der Zirkulationsgrößtwert bei $r/R = 0{,}58$.

In Abb. 321 ist $\frac{r}{R}\cdot\frac{v_u}{v_0}$ über $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ aufgetragen. Durch Planimetrieren wird

$$\frac{\Gamma_m}{\overline{\Gamma}} = 0{,}725$$

gefunden.

Für das Beispiel ist $k_d = 0{,}0058$, $\lambda = 0{,}200$, $\eta = 0{,}785$ und damit

$$k_s = \frac{\eta}{\lambda} k_d = 0{,}0229\,, \qquad c_s = \frac{k_s}{\lambda^2} = 0{,}572\,.$$

Aus der Beziehung (43, 33)

$$1 + \frac{k_d}{\lambda^3}\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma_m} - \frac{k_d}{\lambda^3}\frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1} = \left(\frac{\bar{v}_m}{v_0}\right)^2$$

ergibt sich für

$$\frac{k_d}{\lambda^3} = 0{,}735\,, \qquad \frac{k_d}{\lambda^3}\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma_m} = 0{,}99\,,$$

nach Abb. 318

$$\frac{\bar{v}_m}{v_0} = 1{,}37\,.$$

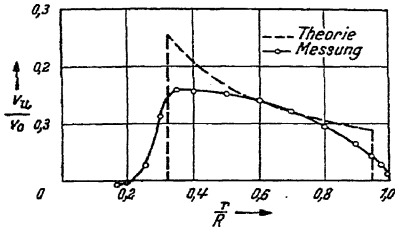



Abb. 320. Verteilung der Umfangskomponente hinter einer Schraube und Vergleich mit den Ergebnissen der Theorie der völlig aufgerollten Wirbelflächen.

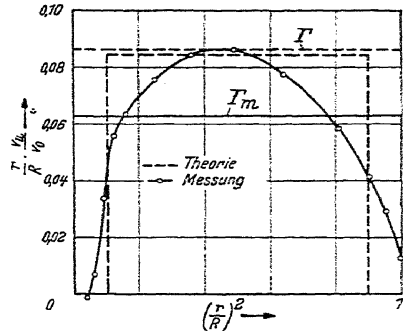



Abb. 321. Verteilung des Dralls hinter einer Schraube und Vergleich mit den Ergebnissen der Theorie der völlig aufgerollten Wirbelflächen.

Bei gleichmäßiger Verteilung des Schubs über den ganzen Schraubenkreis und ohne Strahldrehung hätte sich

$$\left(\frac{\bar{v}_m}{v_0}\right) = \sqrt{1 + c_s} = 1{,}252$$

ergeben. Die Zusatzgeschwindigkeit $\bar{v}_a$ ist also das

$$\frac{0{,}370}{0{,}252} = 1{,}47 \text{ fache}$$

der sich sonst errechnenden.

Aus (43, 31)

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{1}{1 - \frac{\Gamma_m}{\overline{\Gamma}}\frac{\frac{\bar{v}_m}{v_0} - 1}{\frac{\bar{v}_m}{v_0} + 1}}$$

ergibt sich für

$$\frac{\Gamma_m}{\overline{\Gamma}} = 0{,}73; \qquad \frac{\bar{v}_m}{v_0} = 1{,}37\,,$$

$$\frac{v_m}{v_0} = 1{,}128$$

und damit

$$K = \frac{\Gamma_m}{\bar{\Gamma}} \cdot \frac{v_m/v_0}{\bar{v}_m/v_0} = 0{,}73 \cdot \frac{1{,}129}{1{,}370} = 0{,}600 = \frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2}.$$

Mit (43, 44)

$$\gamma = \left(\frac{\bar{v}_m}{v_0}\right)^2 - 1 = 0{,}88$$

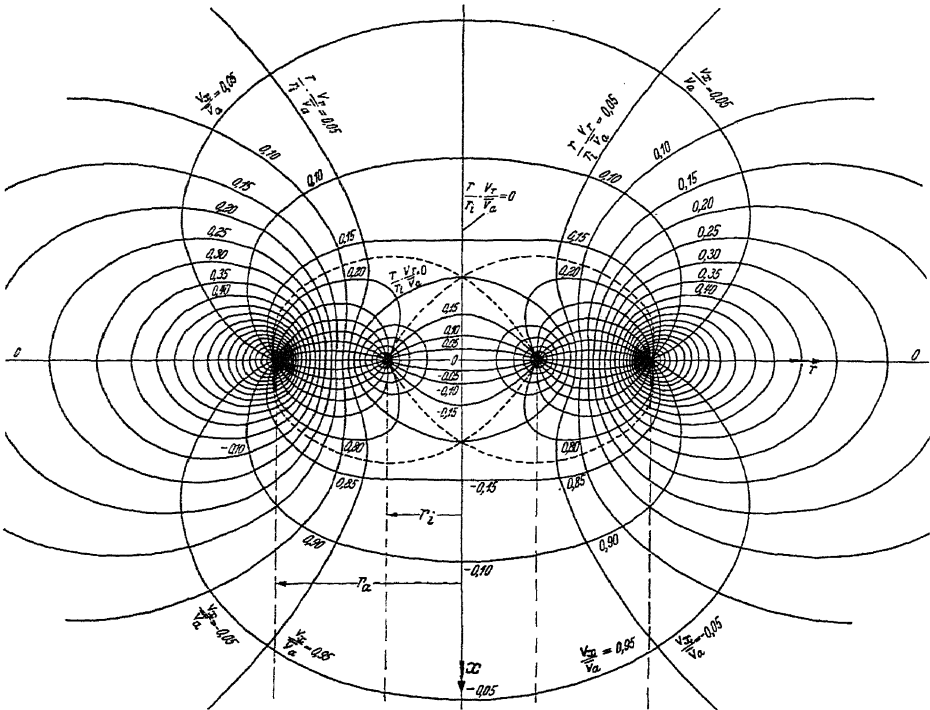



Abb. 322. Linien gleicher Axialkomponenten v_x und des r/r_i-fachen der Radialkomponenten im Felde einer Schraube nach der Theorie der völlig aufgerollten Wirbelflächen für den Fall $r_i/r_a = 0{,}4$ als Beispiel.

wird (43, 50)

$$L\left(\frac{r_i}{r_a}\right) = \ln\frac{r^2}{r_i^2} - \left(1 - \frac{r_i^2}{r_a^2}\right) = \frac{k_d}{\lambda^5 \cdot \gamma^2}\left(\frac{2\left(\sqrt{1+\gamma} - 1\right)}{\gamma} - \eta\right),$$

$$L\left(\frac{r_i}{r_a}\right) = \frac{0{,}0058}{0{,}00032 \cdot 0{,}775}\left(\frac{2 \cdot 0{,}37}{0{,}88} - 0{,}785\right) = 1{,}30,$$

also

$$\frac{r_i}{r_a} = 0{,}335, \qquad \frac{r_a}{r_i} = 2{,}97$$

und wegen $\frac{r_a^2 - r_i^2}{R^2} = 0{,}600$

$$\left(\frac{r_i}{R}\right)^2 = \frac{0{,}600}{2{,}97^2 - 1} = 0{,}07$$

oder

$$\frac{r_i}{R} = 0{,}278\,, \qquad \frac{r_a}{R} = 0{,}826\,.$$

Für $\frac{\bar v_m}{\bar v_{m\infty}}$ ergibt sich (43, 28)

$$\frac{v_m}{\bar v_{m\infty}} = \frac{2\,\frac{\bar v_m}{v_0}}{\frac{\bar v_m}{v_0}+1} = \frac{2\cdot 1{,}36}{2{,}36} = 1{,}15$$

und damit

$$K_\infty = \frac{r_{a\infty}^2 - r_{i\infty}^2}{R^2} = \frac{v_m}{\bar v_{m\infty}}\cdot K = 0{,}696\,.$$

In erster Näherung darf

$$\frac{r_a}{r_i}$$

gesetzt werden, womit sich

$$\frac{r_{i\infty}}{R} = 0{,}322\,, \qquad \frac{\quad}{R} = 0{,}952$$

ergibt.

Denkt man sich die Schraubenwirbelbänder schon gleich hinter der Schraube aufgerollt, so kann die Strömung dargestellt werden durch einen gleichmäßig mit Senken besetzten Kreisring, deren Dichte $\bar v_a$ ist, und eine dahinter überlagerte Parallelströmung. Innen- und Außenradius des Kreisrings sind $r_{i\infty}$ und $r_{a\infty}$.

In Abb. 322 ist ein Bild der Geschwindigkeitsverteilung einer solchen Strömung für den Fall $r_{i\infty}/r_{a\infty} = 0{,}4$ als Beispiel dargestellt. In dem oben wiedergegebenen Beispiel ist allerdings $r_i/r_a = 0{,}337$. Welche Geschwindigkeiten in axialer und in radialer Richtung sich hierfür im Abstande $r/R = -0{,}344$ vor der Schraube und im Abstande $x/R = +0{,}220$ hinter der Schraube ergeben würden, ist zusammen mit Versuchsergebnissen in Abb. 323 und 324 wiedergegeben.

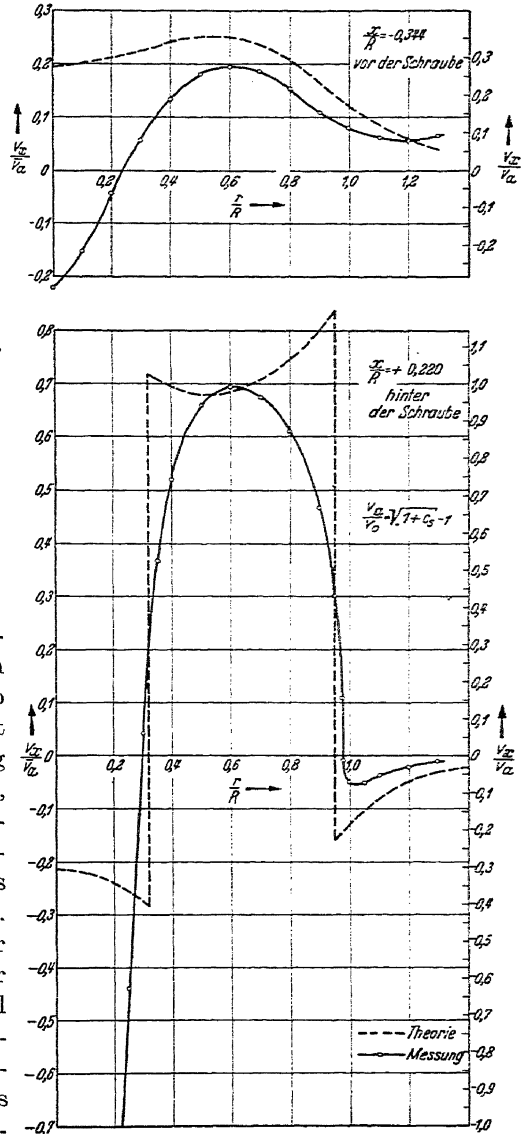



Abb. 323. Verteilung der Axialkomponenten v_x/v_a vor und hinter einer Schraube und Vergleich mit der Theorie der völlig aufgerollten Wirbelflächen. Ein Teil des Unterschiedes ist auf den Einfluß der Mischung und der Nabe zurückzuführen.

Für die Umfangskomponente erhalten wir, wenn wir wieder Reibungsfreiheit zugrunde legen, mit $k_{did} = 0{,}00543$, $\bar{v}_m/v_0 = 1{,}36$, $K = 0{,}603$, $\lambda = 0{,}198$ aus (43, 51)

$$\frac{r}{R} \cdot \frac{v_{u_i d}}{v_0} \qquad 2\,\frac{v_m}{v_0} \cdot K \cdot \lambda^2$$

$$\frac{r}{R} \quad v_{u_i d} = 0{,}0846\,.$$

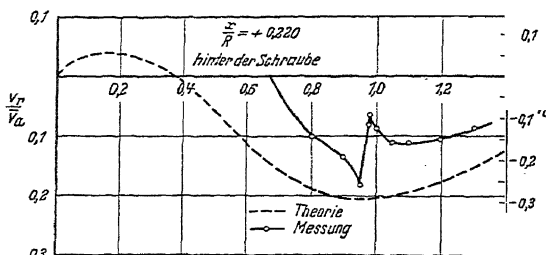
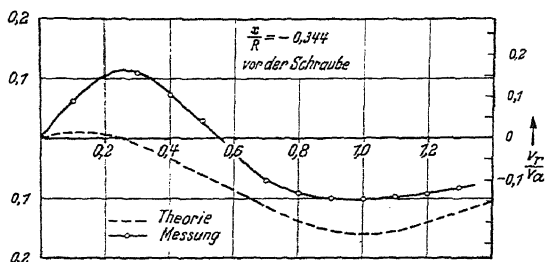



Abb. 324. Verteilung der Radialkomponenten v_r/v_a vor und hinter einer Schraube und Vergleich mit der Theorie der völlig aufgerollten Wirbelflächen. Ein Teil des Unterschiedes ist auf den Einfluß der Mischung und der Nabe zurückzuführen.

Das Ergebnis der Rechnung ist mit dem des Versuchs in Abb. 320 verglichen. Der Vergleich der Rechnungsergebnisse zeigt eine im allgemeinen wohl befriedigende Übereinstimmung, soweit man eine solche überhaupt von einer derartigen Näherungsrechnung verlangen darf.

Das Ergebnis der Rechnung für r_i/r_a ist außerordentlich empfindlich bezüglich der Größe des einzusetzenden Wirkungsgrades. Für viele Zwecke ist es jedoch zulässig, den Schraubenstrahl so zu behandeln, als wäre $r_i \to 0$.

44. Die Randbedingungen des durch den Tragflügel gestörten Schraubenstrahls und ihre Erfüllung.

a) Die Auswirkungen des Schraubenstrahls im allgemeinen. Ein erheblicher Teil des Tragflügels und meist auch erhebliche Teile des Leitwerkes werden unmittelbar durch den Schraubenstrahl beeinflußt. Je größer diese Flächen anteilmäßig und je größer die Belastung der Schraube, ihr Fortschrittsgrad und der Anstellbereich sind, um so größer wird der Einfluß, den der Schraubenstrahl auf das Flugzeug hat. Aber nicht nur die innerhalb des Schraubenstrahles liegenden Teile sondern auch die außerhalb befindlichen werden beeinflußt, wie sich durch neuere Forschungsergebnisse gezeigt hat. Im folgenden wird daher dargelegt, welchen Einfluß der Schraubenstrahl unter Berücksichtigung der axialen Zusatzgeschwindigkeit, der Strahldrehung und der Schräganblasung auf das Flugzeug hat.

Das Zusammenwirken von Tragflügel und Schraubenstrahl kann nur verstanden werden, wenn die Randbedingungen, welche die Schraubenstrahlgrenze erfüllen muß, aufgestellt werden. Ihre Aufstellung und die Methode ihrer Erfüllung werden deshalb zunächst beschrieben [Lit. 164, 165, 166].

b) Allgemeine Form der Randbedingungen für den Strahl. Wir denken uns zunächst den Schraubenstrahl ersetzt durch einen Strahl mit konstanter Strahlgeschwindigkeit im Unendlichen hinter der Schraube, ohne Drehung oder mit konstantem Drall. Außerhalb und innerhalb des Strahls möge also die Strömung eine Potentialströmung sein. Die Begrenzung des Strahles wird durch eine Wirbelschicht gebildet. Außer diesem singulären Verhalten der Strömung an der Strahlgrenze kommen noch andere Singularitäten in der Strömung vor; insbesondere sind dies die das Wirbelband hinter dem Tragflügel bildenden Wirbel. Wir wollen nunmehr untersuchen, wie die Strömung im Inneren und Äußeren des Strahles bestimmt werden kann. Außer durch die Singularitäten innerhalb dieser Gebiete ist die Strömung durch das Verhalten an der Strahlgrenze bestimmt.

An der Strahlgrenze muß aus Gründen des Gleichgewichts der Druck der äußeren Strömung (Gebiet I) gleich dem Druck der inneren Strömung (Gebiet II) sein. Als erste Randbedingung haben wir also

$$p_I = p_{II}. \tag{44, 1}$$

Anderenfalls wäre eine stationäre Strömung nicht möglich. Der Strahl besteht weiter immer aus denselben Luftteilchen; die Strahlbegrenzung muß daher aus Stromlinien bestehen. Die Störungen des Strahles wollen wir als klein voraussetzen. Der Strahl darf dabei, obgleich e etwas verformt wird, in erster Näherung als rund betrachtet werden. Die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten verschwinden an der Strahlgrenze; es gelten also die Gleichungen (Abb. 325)

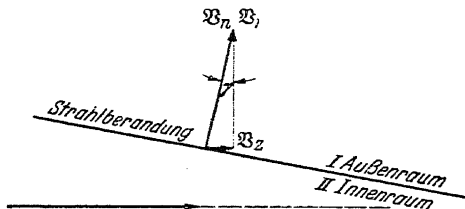



Abb. 325. Die verschwindende Normalkomponente der Geschwindigkeit am Strahlrande.

$$\begin{aligned} V_{n_I} &= V_{r_I}\cos\gamma + V_{z_I}\sin\gamma = 0, \\ V_{n_{II}} &= V_{r_{II}}\cos\gamma + V_{z_{II}}\sin\gamma = 0. \end{aligned} \tag{44, 2}$$

Hierbei ist γ der Winkel der Normalen n zur Strahloberfläche und einer Ebene senkrecht zur Schraubenstrahlachse z. Als zweite Randbedingung erhalten wir also

$$\frac{V_{r_I}}{V_{z_I}} = \frac{V_{r_{II}}}{V_{z_{II}}}. \tag{44, 3}$$

c) Umformung der Randbedingungen. Wir wollen nun mit $\overline{V}_I$ bzw. $\overline{V}_{II}$ die mittlere Parallelgeschwindigkeit im Äußeren bzw. Inneren des Strahles bezeichnen. Die Abweichungen davon, die Störgeschwindigkeiten, die z. B. durch den Tragflügel hervorgerufen werden, mögen die Komponenten v_x, v_y, v_z haben. Nach der Druckgleichung ist

$$p_{I,II} + \frac{\varrho}{2}\left[\left(\overline{V}_{I,II} + v_{z_{I,II}}\right)^2 + v^2_{y_{I,II}} + v^2_{x_{I,II}}\right] = C_{I,II}.$$

Bedeutet p_0 den Druck an einer Stelle, wo die Störgeschwindigkeit verschwindet, so wird

$$C_{I,II} = p_{0_{I,II}} + \frac{\varrho}{2}\,\overline{V}^2_{I,II}.$$

Dürfen die Störgeschwindigkeiten so klein angenommen werden, daß ihre Quadrate vernachlässigt werden können, so lautet die Druckgleichung

$$p_{I,II} + \varrho\,\overline{V}_{I,II}\,v_{z_{I,II}} = p_{0_{I,II}}. \qquad (44, 4)$$

Da im Unendlichen $v_{z_{I,II}}$ verschwindet und auf dem Rande $p_I = p_{II}$ ist, ist $p_{0_I} = p_{0_{II}} = p_0$. Wegen der Druckgleichheit am Rande folgt daraus

$$\overline{V}_I v_{z_I} = \overline{V}_{II} v_{z_{II}}. \qquad (44, 5)$$

$\overline{V}_I$ und $\overline{V}_{II}$ sind die mittleren Parallelgeschwindigkeiten in Richtung der Schraubenkraft, die in erster Näherung mit der Richtung der Schraubenachse zusammenfallend vorausgesetzt werden darf. Das Potential der Störungsströmung möge φ_I bzw. φ_{II} sein. Wegen

$$v_{z_I} = \frac{\partial \varphi_I}{\partial z}, \qquad v_{z_{II}} = \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial z}.$$

schreibt sich dann die erste Randbedingung (44, 1) in der Form

$$\overline{V}_I \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} = \overline{V}_{II} \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial z}. \qquad (44, 6)$$

Da $\overline{V}_I$ und $\overline{V}_{II}$ konstant sind, erhalten wir nach Multiplikation mit dz durch Integration

$$\overline{V}_I \varphi_I = \overline{V}_{II} \varphi_{II}, \qquad (44, 7)$$

falls

$$\varphi_{I,II} = \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial \varphi_{I,II}}{\partial z}\,dz + \varphi\,(-\infty)$$

gesetzt wird; die Konstante $\varphi\,(-\infty)$ hat auf jeder Stelle der Strahlberandung im Unendlichen denselben Wert. Für die zweite Randbedingung haben wir

$$V_r = \overline{V}_r + v_r = v_r; \qquad V_z = \overline{V} + v_z$$

und

$$\frac{V_r}{V_z} = \frac{v_r}{\overline{V} + v_z} = \frac{v_r}{\overline{V}}\left(1 - \frac{v_z}{\overline{V}} + \cdots\right) \approx \frac{v_r}{\overline{V}}$$

Wegen

$$v_{r_{I,\,II}} = \frac{\partial \varphi_{I,\,II}}{\partial r}$$

lautet damit die zweite Randbedingung (44,3)

$$\overline{V}_{II} \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \overline{V}_I \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}. \tag{44, 8}$$

Setzen wir

$$V_{II} = V_I + s' V_I, \qquad V_{II} = S V_I, \tag{44, 9}$$

also

$$S = 1 + s', \tag{44, 10}$$

so nehmen die beiden Randbedingungen die Form an

$$\varphi_I = S \varphi_{II}, \tag{44, 11}$$

$$S \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}. \tag{44, 12}$$

d) Die Verhältnisse weit hinter Tragflügel und Schraube. Um den Einfluß des Schraubenstrahls auf das Tragwerk untersuchen zu können, ist es der vereinfachten Verhältnisse wegen zweckmäßig zuerst die Strömung weit hinter Tragflügel und Schraube unter Beachtung der Randbedingungen zu bestimmen. Wir dürfen dabei voraussetzen, daß die Störungen weit hinter der Schraube und dem Tragflügel von verschwindendem Einfluß auf die Gestalt des Schraubenstrahls und des vom Tragflügel herrührenden Wirbelbandes sind, also insbesondere annehmen, daß die Störkomponente in der z-Richtung dort verschwindet. Somit gilt für das Potential

$$\Delta \varphi_{I,\,II} = \frac{\partial^2 \varphi_{I,\,II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{I,\,II}}{\partial y^2} = 0. \tag{44, 13}$$

Wir nehmen an, daß die Störungen senkrecht zur z-Achse auf der Strahlberandung so klein sind, daß wir den Schraubenstrahl als nicht deformiert, d. h. also als kreiszylindrisch ansehen dürfen. Der Radius des Kreises sei $R = 1$. Wegen der Spiegelungsmöglichkeit an einem Kreise ist daher die Lösung der Aufgabe, $\varphi_{I,\,II}$ als Realteil einer Funktion $\chi_{I,\,II}(\mathfrak{z})$ zu bestimmen, verhältnismäßig einfach. In den folgenden Abschnitten sollen daher zunächst ein Wirbel, ein Doppelwirbel und eine Parallelströmung so an einem Kreise gespiegelt werden, daß dieser zur Potentiallinie wird.

e) Spiegelung eines Wirbels am Kreise. Wir untersuchen die Strömung χ_a eines Wirbels von der Zirkulation $d\Gamma_a$ in einem Punkt $\mathfrak{z}_a = x_a + i\, y_a = r_0\, e^{i\,\alpha_0}$ im Äußeren des Einheitskreises und die Strö-

mung χ_i' eines Wirbels der gleichen Zirkulation $d\Gamma_i$ im Spiegelpunkt $\mathfrak{z}_i = x_i + y_i = \frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}_a} = \frac{x_a + i y_a}{|\mathfrak{z}_a|^2}$ am Einheitskreis (Abb. 326). Dann ist

$$\chi_a = -i \frac{d\Gamma_a}{2\pi} \ln(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_a)\,,$$
$$\chi_i' = -i \frac{d\Gamma_i}{2\pi} \ln(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_i)\,. \qquad (44, 14)$$

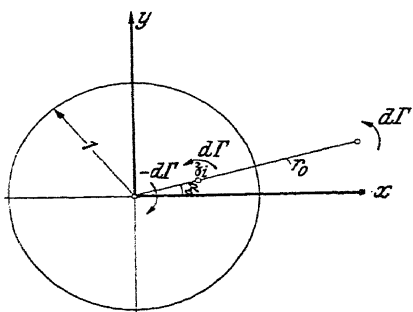



Abb. 326. Spiegelung eines Wirbels am Kreise.

Ferner lautet die durch einen in $\mathfrak{z} = 0$ gelegenen Wirbel der Zirkulation $d\Gamma_0$ hervorgerufene Strömung χ_0

$$\chi_0 = -i \frac{d\Gamma_0}{2\pi} \ln \mathfrak{z}\,. \qquad (44, 15)$$

Wir finden, wenn $\mathfrak{z}$ die Punkte des Einheitskreises durchläuft

$$\mathfrak{z}_a = r_0 e^{i\alpha_0}\,, \qquad \mathfrak{z}_i = \frac{1}{r_0} e^{i\alpha_0}\,,$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_a = (\cos\alpha - r_0 \cos\alpha_0) + i(\sin\alpha - r_0 \sin\alpha_0)\,,$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_i = \left(\cos\alpha - \frac{1}{r_0}\cos\alpha_0\right) + i\left(\sin\alpha_0 - \frac{1}{r_0}\sin\alpha_0\right),$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_a = r' e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha - r_0 \sin\alpha_0}{\cos\alpha - r_0 \cos\alpha_0}}\,,$$

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_i = r'' e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha - \frac{1}{r_0}\sin\alpha_0}{\cos\alpha - \frac{1}{r_0}\cos\alpha_0}}$$

$$r' = \sqrt{1 + r_0^2 - 2 r_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}\,,$$

$$r'' = \sqrt{1 + \frac{1}{r_0^2} - 2\frac{1}{r_0}\cos(\alpha - \alpha_0)}\,.$$

Mit

$$\ln(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_a) = \ln r' + i \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha - y_a}{\cos\alpha - x_a}\,,$$

$$\ln(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_i) = \ln r'' + i \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha - y_i}{\cos\alpha - x_i}$$

erhalten wir dann für Potential und Stromfunktion der einzelnen Wirbel auf dem Einheitskreis

$$\varphi_a = \frac{d\Gamma_a}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha - y_a}{\cos\alpha - x_a}\,,$$

$$\varphi_i' = \frac{d\Gamma_i}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\alpha - \frac{y_a}{|\mathfrak{z}_a|^2}}{\cos\alpha - \frac{y_a}{|\mathfrak{z}_a|^2}} \qquad (44, 16)$$

$$\varphi_0 = \frac{d\Gamma_0}{2\pi}\,\alpha\,.$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi_a &= -\frac{d\Gamma_a}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\ln\left[1+x_a^2+y_a^2-2x_a\cos\alpha-2y_a\sin\alpha\right],\\
\psi_i' &= -\frac{d\Gamma_i}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0}+\frac{1}{2}\ln(1+x_a^2+y_a^2-2x_a\cos\alpha-2y_a\sin\alpha)\right],\\
\psi_0 &= 0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(44,\,17)$$

Ist r der Betrag irgendeines Punktes $\mathfrak{z}$, so ist $\partial\varphi/\partial r = \partial\psi/r\,\partial\alpha$. Auf dem Einheitskreis wird $r = R = 1$, so daß die Normalkomponenten der Geschwindigkeit dort lauten

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_a}{\partial n} &= -\frac{d\Gamma_a}{2\pi}\,\frac{x_a\sin\alpha-y_a\cos\alpha}{1+x_a^2+y_a^2-2x_a\cos\alpha-2y_a\sin\alpha},\\
\frac{\partial\varphi_i'}{\partial n} &= -\frac{d\Gamma_i}{2\pi}\,\frac{x_a\sin\alpha-y_a\cos\alpha}{1+x_a^2+y_a^2-2x_a\cos\alpha-2y_a\sin\alpha},\\
\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} &= 0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(44,\,18)$$

Dabei haben wir $\partial\varphi/\partial n$ statt $\partial\varphi/\partial r$ geschrieben. Die Normalkomponenten gleich großer gleichsinniger Wirbel in gespiegelten Punkten sind auf dem Spiegelungskreis gleich groß und gleich gerichtet. Für

$$\mathfrak{z} = e^{i\alpha} = e^{i(\alpha_0+\beta)}$$

ergibt sich ferner mit $d\Gamma_a = d\Gamma_i = d\Gamma$

$$\begin{aligned}
\chi_a+\chi_i' &= -i\,\frac{d\Gamma}{2\pi}\ln(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_a)(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_i)\\
&= -i\,\frac{d\Gamma}{2\pi}\ln\left[e^{i(2\alpha_0-2\beta)}-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)e^{i(2\alpha_0+\beta)}+e^{i2\alpha_0}\right]\\
&= -i\,\frac{d\Gamma}{2\pi}\ln\left[e^{i2\alpha_0}\left(e^{i2\beta}-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)e^{i\beta}+1\right)\right]\\
&= -i\,\frac{d\Gamma}{2\pi}\ln\Big[(\cos2\alpha_0+i\sin2\alpha_0)\\
&\qquad\cdot\left(\cos2\beta+i\sin2\beta-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)(\cos\beta+i\sin\beta)+1\right)\Big].
\end{aligned}$$

Dies geht aber wegen $\cos2\beta+1 = 2\cos^2\beta$ und $\sin2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ über in

$$\chi_a+\chi_i' = -i\,\frac{d\Gamma}{2\pi}\left[i2\alpha_0+\ln r'''e^{\,i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2\sin\beta\cos\beta-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)\sin\beta}{2\cos^2\beta-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)}}\right]$$

Für das Potential ergibt sich mithin

$$\begin{aligned}
\varphi_a+\varphi_i' &= \frac{d\Gamma}{2\pi}\left[2\alpha_0+\mathrm{arc\,tg}\frac{\sin\beta\left[2\cos\beta-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)\right]}{\cos\beta\left[2\cos\beta-\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)\right]}\right]\\
&= \frac{d\Gamma}{2\pi}[2\alpha_0+\mathrm{arc\,tg\,tg}\,\beta] = \frac{d\Gamma}{2\pi}(2\alpha_0+\beta) = \frac{d\Gamma}{2\pi}(2\alpha_0+\alpha-\alpha_0)
\end{aligned}$$

und

$$\varphi_a + \varphi_i' = \frac{d\Gamma}{2\pi}(\alpha + \alpha_0) \qquad (44, 19)$$

Bis auf eine Konstante ist also $\varphi_a + \varphi_i'$ gleich φ_0. Bei der Spiegelung eines Wirbels an einem Kreise durch einen gleich großen gleichsinnigen Wirbel wird auf dem Kreise, wenn man in seiner Mitte noch einen gleich großen gegensinnigen Wirbel $d\Gamma_0 = -d\Gamma_i = -d\Gamma_a$ anbringt, das Potential $\varphi_a + \varphi_i' + \varphi_0$ konstant, der spiegelnde Kreis also Potentiallinie. Als Spiegelbild eines Wirbels im Äußeren hat ein Wirbel im Spiegelpunkt und im Mittelpunkt und umgekehrt zu gelten. Soll also χ_i das Spiegelbild der Strömung χ_a sein, dann muß sein

$$\chi_i = \chi_i' + \chi_0 \,. \qquad (44, 20)$$

Dann gilt

$$\varphi_a + \varphi_i = \text{konst.} \qquad (44, 21)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \,. \qquad (44, 22)$$

f) Spiegelung eines Doppelwirbels am Kreis. Man kann das Wirbelband hinter einem Tragflügel auch durch Doppelwirbel erzeugt denken. Die Dichte $d\lambda/ds$ dieser Doppelwirbelbelegung ist gleich der Zirkulation Γ, die in dem zugehörigen Teil des Tragflügels vorhanden ist. Wir wollen jene Spiegelung eines Doppelwirbels am Kreise untersuchen, bei welcher die Normalkomponenten der Geschwindigkeit des inneren und äußeren Doppelwirbels auf dem spiegelnden Kreis gleich werden und das Potential konstant ist, analog dem Falle des Einzelwirbels.

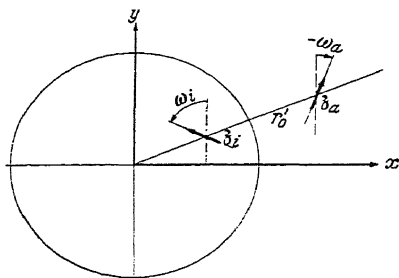



Abb. 327. Spiegelung eines Doppelwirbels am Kreise.

Da die den Doppelwirbel bildenden Wirbel gleich groß und gegensinnig sind, ist bei der Spiegelung eines im endlichen liegenden Doppelwirbels kein zusätzlicher Doppelwirbel im Kreismittelpunkt anzubringen. Der Doppelwirbel im Äußeren möge das Moment $d\lambda_a$ und eine um den Winkel ω_a von der y-Achse verschiedene Achsenrichtung haben und in $\mathfrak{z}_a = r_0\, e^{i\alpha_0}$ liegen (Abb. 327). Der Doppelwirbel im Inneren möge das Moment $d\lambda_i$ und eine um den Winkel ω_i von der y-Achse verschiedene Achsenrichtung haben. Er soll im Spiegelpunkt zu $\mathfrak{z}_a$, also in $\mathfrak{z}_i = \frac{1}{r_0}\, e^{i\alpha_0}$ liegen. Als Spiegelungskreis soll also wiederum der Einheitskreis dienen. Die Strömungspotentiale beider Wirbel lauten auf dem Einheitskreis

$$\chi_a = -i\, d\lambda_a\, e^{i\omega_a} \frac{1}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_a} = -i\, d\lambda_a\, e^{i\omega_a} \frac{1}{e^{i(\alpha_0+\beta)} - r_0\, e^{i\alpha_0}}$$

$$= -i\, d\lambda_a\, e^{i(\omega_a - \alpha_0)} \cdot \frac{1}{}$$

$$\chi_i = -i\, d\lambda_i\, e^{i\omega_i} \frac{1}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_i} = -i\, d\lambda_i\, e^{i\omega_i} \frac{1}{e^{i(\alpha_0+\beta)} - \frac{1}{r_0} e^{i\alpha_0}} \tag{44, 23}$$

$$= -i\, d\lambda_i\, e^{i(\omega_i - \alpha_0)} \cdot \frac{1}{e^{i\beta} - \frac{1}{r_0}} .$$

Die Potentiale sind also

$$\varphi_a = +d\lambda_a \Big[\cos(\omega_a - \alpha_0) \frac{-\sin\beta}{r_0^2 + 1 - 2r_0\cos\beta}$$

$$+ \sin(\omega_a - \alpha_0) \frac{\cos\beta - r_0}{r_0^2 + 1 - 2r_0\cos\beta}\Big]$$

$$\varphi_i = +d\lambda_i \Big[\cos(\omega_i - \alpha_0) \frac{}{\frac{1}{r_0^2} + 1 - 2\frac{1}{r_0}\cos\beta}$$

$$+ \sin(\omega_i - \alpha_0) \frac{\cos\beta - -}{\frac{1}{r_0^2} + 1 - 2\frac{1}{r_0}\cos\beta}$$

Damit auf dem Einheitskreis $\varphi_a + \varphi_i = \text{konst.}$ wird, muß

$$\left.\begin{aligned} d\lambda_i &= -d\lambda_a \cdot \frac{1}{r_0^2}, \\ (\omega_i - \alpha_0) &= -(\omega_a - \alpha_0) \end{aligned}\right\} \tag{44, 24}$$

gesetzt werden. $\omega_i - \alpha_0 = \vartheta_i$ und $\omega_a - \alpha_0 = \vartheta_a$ sind die Winkel zwischen den Achsen der Doppelwirbel und den Senkrechten zu den nach den Doppelwirbeln gehenden Radien (Abb. 328). Wir erhalten damit

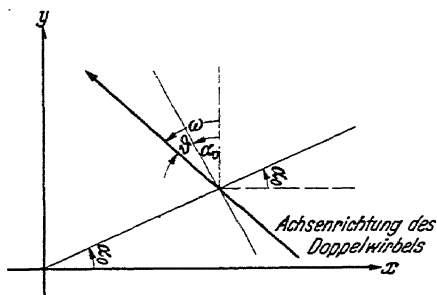



Abb. 328. Neigung der Doppelwirbelachse gegen die positive y-Achse; positive Neigung entgegen dem Sinne des Uhrzeigers.

$$\varphi_a = +d\lambda_a \left[\cos\vartheta_a \frac{-\sin\beta}{r_0^2 + 1 - 2r_0\cos\beta} + \sin\vartheta_a \frac{\cos\beta - r_0}{r_0^2 + 1 - 2r_0\cos\beta}\right],$$

$$\varphi_i = -d\lambda_a \Big[\cos\vartheta_a \frac{-\sin\beta}{r_0^2 + 1 - 2r_0\cos\beta} - \sin\vartheta_a \frac{}{r_0^2 + 1 - 2r_0}$$

und damit

$$\varphi_a + \varphi_i = -d\lambda_a \frac{\sin\vartheta_a}{r_0} = \text{konst.} \tag{44, 25}$$

Bis auf die rechtsstehende Konstante ist also auf dem Einheitskreis φ_a gleich $-\varphi_i$. Für die Stromfunktion finden wir auf dem Einheitskreis

$$\psi_a = -d\lambda_a\left[\sin\vartheta_a \frac{\sin\beta}{r_0^2+1-2r_0\cos\beta} + \cos\vartheta_a \frac{\cos\beta - r_0}{r_0^2+1-2r_0\cos\beta}\right],$$

$$\psi_i = +d\lambda_a\left[-\sin\vartheta_a \frac{\sin\beta}{r_0^2+1-2r_0\cos\beta} + \cos\vartheta_a \frac{\cos\beta - \frac{1}{r_0}}{r_0^2+1-2r_0\cos\beta}\right].$$

Durch Subtraktion ergibt sich damit

$$\psi_a - \psi_i = +d\lambda_a \frac{\cos\vartheta_a}{r_0} = \text{konst.} \tag{44, 26}$$

und bis auf die rechts stehende Konstante ψ_a gleich ψ_i. Wegen $\partial\varphi/\partial r = \partial\psi/r\,\partial\alpha$ gilt auf dem Einheitskreis, wenn wir die Normalenrichtung mit n bezeichnen,

$$\frac{\partial\psi_a}{r\,\partial\alpha} = \frac{\partial\psi_i}{r\,\partial\alpha}, \tag{44, 27}$$

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}. \tag{44, 28}$$

Die Beziehung (44, 27) folgt aus Gleichung (44, 26), (44, 28) aus (44, 27). Im Gegensatz dazu liefert die Beziehung (44, 24) die Resultierende der Störgeschwindigkeit, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_a + \varphi_i) = v_n. \tag{44, 29}$$

Ist die Doppelwirbelverteilung über ein von $\mathfrak{z}_a$ ausgehendes Streckenelement $d\mathfrak{z}_a$ erstreckt und die Achse senkrecht dazu, so möge der gespiegelte Doppelwirbel über ein Element $d\mathfrak{z}_i$ verteilt sein. Die Längen dieser Elemente seien ds_a und ds_i, also $|d\mathfrak{z}_a| = ds_a$ und $|d\mathfrak{z}_i| = ds_i$. Damit gilt für die Momente der Wirbelverteilungen $d\lambda_a = \Gamma_a\,ds_a$ und $d\lambda_i = \Gamma_i\,ds_i$, und es muß nach (44, 24)

$$\Gamma_i\,ds_i = -\frac{1}{r_0^2}\Gamma_a\,ds_a \tag{44, 30}$$

gesetzt werden. Mit $\mathfrak{z}_i = \frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}_a} = \frac{\mathfrak{z}_a}{r_0^2}$ wird aber

$$d\mathfrak{z}_i = \frac{dx_a}{r_0^2} - \frac{2x_a}{r_0^3}dr_0 + i\left(\frac{dy_a}{r_0^2} - \frac{2y_a}{r_0^3}dr_0\right)$$

und

$$|d\mathfrak{z}_i|^2 = \frac{1}{r_0^4}(dx_a^2 + dy_a^2) + \frac{4}{r_0^6}(x_a^2+y_a^2)\,dr_0^2 - \frac{4}{r_0^5}(x_a\,dx_a + y_a\,dy_a)\,dr_0,$$

$$= \frac{1}{r_0^4}ds_a^2 + \frac{4}{r_0^4}dr_0^2 - \frac{4}{r_0^4}dr_0^2 = \frac{1}{r_0^4}ds_a^2.$$

Damit ist

$$ds_i = \frac{1}{r_0^2}ds_a, \tag{44, 31}$$

und die Gleichung (44, 30) geht über in

$$\Gamma_i = -\Gamma_a .$$

g) Spiegelung einer Parallelströmung am Kreis. Fällt die Richtung des Schraubenstrahls nicht mit der Flugrichtung zusammen, so hat die Geschwindigkeit der äußeren Strömung eine quer zum Schraubenstrahl gerichtete Komponente. Ist diese klein, so gelten die der Herleitung der Randbedingungen zugrunde gelegten Voraussetzungen. Wir wollen daher hier auch die Spiegelung einer Parallelströmung am Kreise angeben. Diese Parallelströmung im Äußeren sei durch

$$\chi_a = i v_y \cdot \mathfrak{z} \qquad (44,32)$$

gegeben. Die y-Achse ist also, wenn $\partial\varphi/\partial s = v_s$ gesetzt wird, der Querströmungskomponente entgegengesetzt. Dann ist

$$\varphi_a = -v_y y ; \qquad \psi_a = v_y x . \qquad (44,33)$$

Die Spiegelung ist bekanntlich eine Doppelquelle mit zur Querströmungsrichtung paralleler Achsenrichtung, wenn der Kreis Potentiallinie sein soll. Das komplexe Potential lautet hierfür

$$\chi_i = i v_y \frac{1}{\mathfrak{z}} . \qquad (44,34)$$

Setzen wir $x = r\cos\alpha$ und $y = r\sin\alpha$ und $z = r e^{i\alpha}$, so wird damit

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a &= -v_y r \sin\alpha , & \psi_a &= v_y r \cos\alpha , \\ \varphi_i &= v_y \frac{\sin\alpha}{r} , & \psi_i &= v_y \frac{\cos\alpha}{r} . \end{aligned}\right. \qquad (44,35)$$

Die zusammengesetzte Strömung ergibt daher auf dem Einheitskreis ($r = 1$)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a + \varphi_i &= 0, \\ \psi_a - \psi_i &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (44,36)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = -v_y \sin\alpha ,$$

ein Ergebnis, das man auch auf direktem Wege finden kann.

h) Die vom Zusammenwirken von Wirbeln oder Doppelwirbeln mit dem Schraubenstrahl hervorgerufene Zusatzströmung im allgemeinen. Das Potential der von den im Äußeren des Schraubenstrahls gelegenen Wirbeln oder Doppelwirbeln hervorgerufenen Ausgangsstörungsströmung sei φ_{A_a}, das von den im Innern liegenden Wirbeln oder Doppelwirbeln herrührende sei φ_{B_i}. Mit diesen Potentialen können die Randbedingungen nicht befriedigt werden. Wir spiegeln daher zunächst die vorhandenen Singularitäten an dem als Kreis gedachten Strahlrand. Die von den Spiegelbildern herrührenden Potentiale seien φ_{A_i}

und φ_{B_a}. Dann gilt, wenn der Kreis als Potentiallinie angesetzt wird, auf dem Kreise bis auf Konstanten

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{A_i} &= -\varphi_{A_a}; & \frac{\partial \varphi_{A_i}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{A_a}}{\partial n}, \\ \varphi_{B_i} &= -\varphi_{B_a}; & \frac{\partial \varphi_{B_i}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{B_a}}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \tag{44, 37}$$

Die endgültige die Randbedingung befriedigende Lösung setzen wir in der Form

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_{AI} + \varphi_{BI} \text{ (außen)}, \\ \varphi_{II} &= \varphi_{AII} + \varphi_{BII} \text{ (innen)} \end{aligned} \tag{44, 38}$$

an, wobei wir die Summanden der rechten Seiten noch näher festlegen müssen. Die physikalisch gegebene Tatsache der Randbedingungen zeigt, daß im Äußeren des Strahles nur die in φ_{A_a} enthaltenen Singularitäten vorhanden sind. Infolgedessen setzt sich φ_I nur aus den Potentialen der äußeren Singularitäten, ihrer Spiegelbilder, der inneren Singularitäten und gewissen zur Befriedigung der Randbedingungen notwendigen Zusatzgliedern zusammen. Die Spiegelbilder der inneren Singularitäten sind also nicht zu berücksichtigen. Die Zusatzglieder können nur Anteile der schon vorhandenen Potentiale sein. Und zwar können sie, da das Potential zu einem Teil durch die äußeren vorhandenen Singularitäten fest vorgeschrieben ist, nur mit den innerhalb liegenden Singularitäten gebildet werden. Für die innere Strömung gelten die entsprechenden Überlegungen. Wir setzen daher mit n als Proportionalitätsfaktor an:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{AI} &= \varphi_{A_a} + n_{A_i}\varphi_{A_i}; & \varphi_{BI} &= \varphi_{B_i} + n_{B_i}\varphi_{B_i}, \\ \varphi_{AII} &= \varphi_{A_a} + n_{A_a}\varphi_{A_a}; & \varphi_{BII} &= \varphi_{B_i} + n_{B_a}\varphi_{B_a}. \end{aligned}\right\} \tag{44, 39}$$

Da φ_{A_a} und φ_{B_i} voneinander unabhängig sind, müssen die Randbedingungen für jeden Teil φ_A und φ_B erfüllt sein. Die Gleichungen (44, 11) und (44, 12) zerfallen daher in die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_{AI} &= S\varphi_{AII}; & \varphi_{BI} &= S\varphi_{BII}; \\ S\frac{\partial \varphi_{AI}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{AII}}{\partial n}; & S\frac{\partial \varphi_{BI}}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_{BII}}{\partial n}. \end{aligned}$$

Da nun wegen der Spiegelung $\varphi_a = -\varphi_i$, $\frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - n_{A_i} &= S(1 + n_{A_a}); & 1 + n_{B_i} &= S(1 - n_{B_a}); \\ S(1 + n_{A_i}) &= (1 + n_{A_a}); & S(1 + n_{B_i}) &= (1 + n_{B_a}). \end{aligned} \tag{44, 40}$$

Die Auflösung ergibt

$$\begin{aligned} n_{A_a} &= -\frac{(S-1)^2}{S^2+1}; & n_{B_a} &= \frac{S^2-1}{S^2+1}, \\ n_{A_i} &= -\frac{S^2-1}{S^2+1}; & n_{B_i} &= -\frac{(S-1)^2}{S^2+1}. \end{aligned} \tag{44, 41}$$

Wir setzen nunmehr weiter s' so klein voraus, daß quadratische und Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Damit ist:

$$(S-1)^2 = s'^2 \sim 0,$$

$$S^2 + 1 = 2 + 2s' + s'^2 \sim 2(1+s'),$$

$$\frac{(S-1)^2}{S^2+1} \sim 0,$$

$$S^2 - 1 = 2s' + s'^2 \sim 2s',$$

$$\frac{S^2-1}{S^2+1} = s' - s'^2 \pm \cdots \sim s'.$$

Wir erhalten schließlich für die Faktoren der Zusatzpotentiale

$$\left.\begin{aligned} n_{A_a} &= 0; & n_{B_a} &= s' \\ n_{A_i} &= -s'; & n_{B_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (44, 42)$$

und die die Randbedingungen befriedigende Lösung lautet:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_{A_a} - s'\varphi_{A_i} + \varphi_{B_i}, \\ \varphi_{II} &= \varphi_{A_a} + \varphi_{B_i} + s'\varphi_{B_a} \end{aligned}\right\} \quad (44, 43)$$

i) Die Zulässigkeit und Zweckmäßigkeit der Einführung von Doppelwirbeln. Wenn es auch zunächst so scheint, als wäre die oben beschriebene Durchführung der Spiegelung von Doppelwirbeln etwas Überflüssiges, so erweist sich doch, daß gerade durch sie die Bestimmung der durch Zusammenwirken des Tragflügels und des Schraubenstrahls hervorgerufenen Zusatzströmung besonders anschaulich wird. In Abb. 329 ist die Spur eines V-förmigen Tragwerks an der Kreisberandung eines Schraubenstrahls gespiegelt. Die Auftriebsverteilung möge elliptisch sein.

Die Strömung im Äußeren des Schraubenstrahls wird also dargestellt:

1. Durch die Strömung A_a, d. h. durch die der Zirkulationsverteilung Γ_0 entsprechende Doppelwirbelverteilung außerhalb des Schraubenstrahls (Abb. 329, A_a);

2. durch die Strömung B_i, d. h. durch die der Zirkulationsverteilung Γ_0 entsprechende Doppelwirbelverteilung innerhalb des Schraubenstrahls (Abb. 329, B_i);

3. durch die Strömung A_i, d. h. durch das s'fache Spiegelbild der äußeren Doppelwirbelverteilung an der Kreisberandung des Schraubenstrahls (Abb. 329, A_i).

Die Strömung im Inneren des Schraubenstrahls wird entsprechend dargestellt:

1. Durch die Strömung A_a, d. h. durch die der Zirkulationsverteilung Γ_0 entsprechende Doppelwirbelverteilung innerhalb des Schraubenstrahls (Abb. 329, A_a);

2. durch die Strömung B_i, d. h. durch die der Zirkulationsverteilung Γ_0 entsprechende Doppelwirbelverteilung innerhalb des Schraubenstrahls (Abb. 329, B_i);

3. durch die Strömung B_a, d. h. durch das s'fache Spiegelbild der inneren Doppelwirbelverteilung an der Kreisberandung des Schraubenstrahls (Abb. 329, B_a).

Abb. 329. Spiegelung der Spur eines V-förmigen Tragwerks am Kreise und die durch die Randbedingungen gegebenen Strömungsanteile bei elliptischer Auftriebsverteilung.

Da man aus der Zirkulationsverteilung durch Differentiation die Wirbelverteilung des Wirbelbandes hinter dem Tragflügel erhält, so mögen auch die den aufgezählten Strömungsanteilen entsprechenden Wirbelverteilungen dargestellt werden. Die dargestellten Doppelwirbelverteilungen dieser Anteile endigen aber alle an der Schraubenstrahlgrenze mit einem endlichen Wert Γ_0 bzw. $\pm s'\Gamma_0$. Diesen endlichen Werten der Doppelwirbelverteilungen entspricht aber je ein isolierter Wirbel $\pm\Gamma_0$ bzw. $\pm s'\Gamma_0$ der Wirbelverteilungen. Die den aufgezählten Strömungsanteilen entsprechenden Wirbelverteilungen sind aus der Abb. 330 ersichtlich.

Für qualitative Untersuchungen des Zusammenwirkens eines Schraubenstrahls und eines Tragflügels genügt es offenbar, von den Spannweiteneinflüssen, der Tiefenverteilung und der Verwindung abzusehen. Dann verbleibt die Untersuchung eines unverwundenen Tragflügels konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite im Schraubenstrahl. Bei fehlendem Schraubenstrahl wäre die Zirkulationsverteilung dieses Tragflügels über die Spannweite konstant. Die entsprechenden Doppelwirbelverteilungen unter Hinzunahme des Schraubenstrahls sind in Abb. 331 dargestellt. Die sich hieraus ergebende Wirbelverteilung

ist in Abb. 332 enthalten. Sie besteht nur aus je einem Einzelwirbel an der Durchdringungsstelle des Tragflügels mit dem Schraubenstrahl.

Dies Ergebnis hätte man, wenn man von der der Zirkulationsverteilung bei fehlendem Schraubenstrahl entsprechenden Wirbelverteilung ausgegangen wäre, nicht ohne weiteres erhalten. Erst wenn man sich die Auftriebsverteilung an der Durchdringungsstelle der Tragflügel mit dem Schraubenstrahl auf ein sehr kleines Stück unterbrochen denken würde, erhält man das oben dargelegte Ergebnis, entsprechend den Einzelwirbeln, welche dann von der Unterbrechungsstelle innen und außen abgehend zu denken wären. Da diese innen und außen entgegengesetzten Umlaufsinn haben, endliche Stärke besitzen und dicht benachbart sind, würden sie sich bei fehlendem Schraubenstrahl aufheben, so daß es erlaubt ist, sich den Tragflügel an der Durchdringungsstelle unterbrochen zu denken. Daß man dies aber tun muß, um die Randbedingungen mit Hilfe der Spiegelung befriedigen zu können, ist erst über den Umweg über die Doppelwirbelverteilung zu erkennen.

Abb. 330. Die den Strömungsanteilen bei elliptischer Auftriebsverteilung entsprechenden Wirbelverteilungen.

k) Der schräg angeströmte Schraubenstrahl. Die Betrachtung der Randbedingungen lehrt ohne weiteres, daß die Zusatzströmung infolge eines schräg in die äußere Strömung eingebetteten Schraubenstrahles im Äußeren so sein muß, wie wenn der Schraubenstrahl zu

25*

einem festen Zylinder erstarrt wäre. Denn diese Strömung erfüllt ohne weiteres die Kontinuitätsbedingung Gl. (44, 3) und die Bedingungen Gl. (44, 1) bzw. (44, 7). Da jedoch bezüglich der Wirkung der Schräganströmung Schwierigkeiten vermutet werden könnten, wird hier die Ableitung entsprechend den allgemeinen Ergebnissen auch exakt durchgeführt.

Durch Schräganblasung des Schraubenstrahls wird seine Richtung geändert. Wir bezeichnen die ursprüngliche im wesentlichen

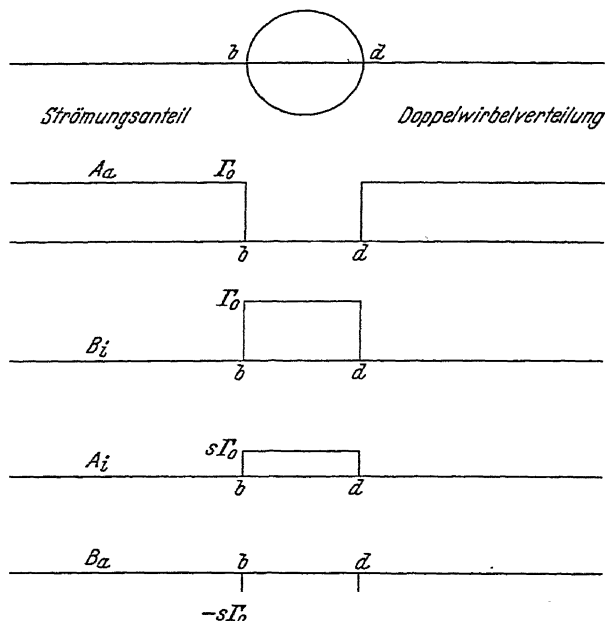



Abb. 331. Spiegelung der Spur eines Tragflügels konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite und die durch die Randbedingungen gegebenen Strömungsanteile.

mit der Schraubenachse zusammenfallende Richtung als virtuelle Schraubenstrahlrichtung. Das Potential des Störungsanteiles, des Stromes, der schräg zur virtuellen Schraubenstrahlrichtung kommt, sei φ_{A_a}, die Geschwindigkeitskomponente parallel zur virtuellen Schraubenstrahlrichtung $\overline{V}_I$. Die Bezeichnung $\overline{V}_I$ ist berechtigt und bedeutet die schon im zweiten Abschnitt eingeführte Geschwindigkeit; denn wie wir bald sehen werden, fällt die virtuelle Strahlrichtung mit der Richtung der Schraubenkraft zusammen.

Legen wir das Koordinatensystem in der zur virtuellen Schraubenstrahlrichtung senkrechten Ebene so wie in Abb. 327, so lautet das Potential der äußeren Ausgangsstörungsströmung

$$\varphi_{A_a} = -v_{y\,\mathrm{virt}}\, y = -v_{y\,\mathrm{virt}}\, r \sin\alpha\,.$$

Das Potential des Spiegelbildes dazu ist

$$\varphi_{A_i} = \frac{v_{y\,\mathrm{virt}} \sin\alpha}{r}$$

Da weiter keine Singularitäten vorhanden sind, lauten die Gleichungen (44, 43)

$$\varphi_I = \varphi_{A_a} - s'\varphi_{A_i} = -v_{y\,\mathrm{virt}}\, r \sin\alpha - s' v_{y\,\mathrm{virt}} \frac{\sin\alpha}{r} = -\left(1 + \frac{s'}{r^2}\right) y\, v_{y\,\mathrm{virt}}\,; \qquad (44, 44)$$
$$\varphi_{II} = \varphi_{A_a} = -y\, v_{y\,\mathrm{virt}}\,.$$

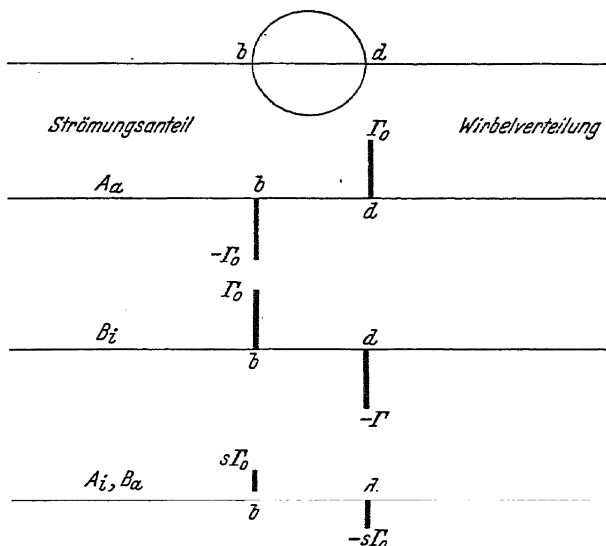



Abb. 332. Die den Strömungsanteilen bei konstanter Auftriebsverteilung entsprechenden Wirbelverteilungen.

Auf Grund dieser Gleichungen können wir Aussagen über die Vorgänge im Inneren und Äußeren des Strahles machen. Die axiale Geschwindigkeit im Inneren des virtuellen Schraubenstrahles ist $\overline{V}_{II}$. Ihr überlagert sich wegen des Potentials φ_{II} die dazu senkrechte Störgeschwindigkeit $v_{y\,\mathrm{virt}}$ (Abb. 333). Beide Geschwindigkeiten ergeben vektoriell addiert die resultierende Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{\mathrm{res}}$ und damit die tatsächliche Richtung des Schraubenstrahls. Ist $\mathfrak{v}_{\mathrm{zus}}$ die Änderung der Fluggeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ in bezug auf $\mathfrak{v}_{\mathrm{res}}$, gilt also

$$\mathfrak{v}_{\mathrm{res}} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_{\mathrm{zus}}\,,$$

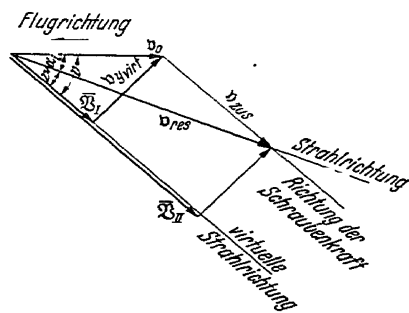



Abb. 333. Die Geschwindigkeitsverhältnisse im Innern des schräg angeströmten Schraubenstrahles.

so sieht man, daß die Richtung der Schraubenkraft in die Richtung von $\mathfrak{v}_{zus}$ fallen muß. Denn nach dem Impulssatz ist die wirkende Kraft der Änderung der Geschwindigkeit proportional. Da $\mathfrak{v}_{zus}$ parallel zur virtuellen Strahlrichtung ist, fällt also die Richtung der Schraubenkraft mit der virtuellen Schraubenstrahlrichtung zusammen. Schließt die Richtung der Schraubenkraft, also in erster Näherung die Schraubenachse, mit der Flugrichtung den Winkel ν ein, so ist

$$v_{y\,\mathrm{virt}} = v_0 \sin\nu\,.$$

Ist ν klein, so ist $v_{\mathrm{res}} \backsim v_0 + v_{\mathrm{zus}}$. Die Richtung des tatsächlichen Strahles ist gegen die Flugrichtung um $\alpha_{i\,\mathrm{Str}} = \nu \quad \cdot \nu'$ geneigt. Wegen

$$\nu = \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0}\,, \qquad \nu' = \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0 + v_{\mathrm{zu}}}$$

wird damit

$$\alpha_{i\,\mathrm{Str}} = \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0} \cdot \quad \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0 + v_{\mathrm{zus}}} : \; : \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0} \quad \overline{(v_0 + v_{\mathrm{zus}})}\,.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{v}_{\mathrm{zus}} = \overline{\mathfrak{V}}_{II} - \overline{\mathfrak{V}}_I = \overline{\mathfrak{V}}_I + s'\overline{\mathfrak{V}}_I \qquad \overline{\mathfrak{V}}_I = s'\overline{\mathfrak{V}}_I$$

und

$$\frac{v_{\mathrm{zus}}}{\overline{V}_I}$$

Mit $V_I = v_0 \cos\nu$ und $s \quad : s'\cos\nu$ ist dann die tatsächliche Richtung des Schraubenstrahles gegen die Flugrichtung um den Winkel

$$\alpha_{i\,\mathrm{Str}} = \nu \cdot \frac{s\,v_0}{v_0 + s\,v_0} \backsim s\,\nu \tag{44, 45}$$

geneigt. Dieses Ergebnis gilt weit hinter Tragflügel und Schraube für ein im Innern des Strahles liegendes Teilchen. Im Äußeren des Strahles überlagert sich wegen φ_I senkrecht zu $\overline{V}_I$ die Geschwindigkeit $\left(1 + \frac{s'}{r^2}\right) v_{y\,\mathrm{virt}}$. Nach Abb. 334 ist dann

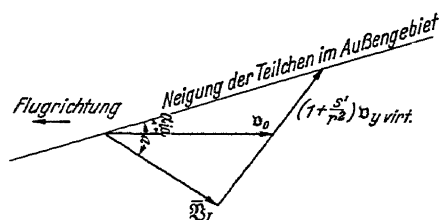



Abb. 334. Die Geschwindigkeitsverhältnisse im Äußeren des schräg angeströmten Schraubenstrahles.

$$\mathrm{tg}\,(-\alpha_{i_a} + \nu) = \frac{\left(1 + \frac{s'}{r^2}\right) v_{y\,\mathrm{virt}}}{\overline{V}_I}\,.$$

Sind die Winkel klein, so wird

$$-\alpha_{i_a} + \nu = \left(1 + \frac{s}{r^2}\right) \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0}$$

und

$$-\alpha_{i_a} = -\frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0} + \left(1 + \frac{s}{r^2}\right) \frac{v_{y\,\mathrm{virt}}}{v_0} = \frac{s}{r^2}\,\nu\,.$$

Für die Neigung der Teilchen im Außengebiet gegen die Flugrichtung ergibt sich also

$$\alpha_{i_a} = -\frac{s}{r^2}\,\nu\,. \tag{44, 46}$$

Hierbei ist der Radius der Schraube als Längeneinheit gewählt.

1) Einfluß der Strahldrehung. Auch bezüglich der Strahldrehung ist es von vornherein schon einleuchtend, daß sie die Randbedingungen nicht stört, so daß ihr keinerlei Zusatzströmungen entsprechen. Hier wurde die Schraubenstrahldrehung als Drehung mit konstantem Drall behandelt, wie es dem Verhalten der Schrauben im wesentlichen entspricht. Aber auch bezüglich der Strahldrehung wurden ursprünglich Schwierigkeiten vermutet, so daß mit Hilfe der oben dargelegten Ergebnisse auch der Einfluß der Schraubenstrahldrehung exakt untersucht wurde.

Wir wollen annehmen, daß im Strahl außer axialen Zusatzgeschwindigkeiten auch noch ein Drall vorhanden sei. Der Drall sei konstant, also

$$r \cdot v_u = \text{konst.}$$

Im Äußeren soll $v_u = 0$ sein. Dann ist die Druckbedingung ohne weiteres erfüllt, da sich der Druck im Strahlinneren danach regelt. Da die Radialkomponenten sowohl im Inneren als auch auf dem Rande verschwinden und die äußere Strömung ebenfalls keine Radialkomponenten besitzt, ist auch die zweite Randbedingung erfüllt. Die Strahldrehung hat also keinen Einfluß auf das Verhalten am Strahlrande.

Daß die Randbedingungen erfüllt werden, kann auch mit den Gleichungen (44, 43) gezeigt werden. Für unseren Fall gilt

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varphi_{Bi}\,, \\ \varphi_{II} &= \varphi_{Bi} + s'\,\varphi_{Ba} \end{aligned} \tag{44, 47}$$

Nach den gemachten Voraussetzungen muß φ_I gleich null oder konstant sein. Im Innern ist, da $r v_u =$ konst. sein soll, $\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \alpha} =$ konst. zu setzen. Da der Strahlrand eine Diskontinuitätsfläche darstellt, enthält φ_{Bi} einen von dem Potential einer Wirbelverteilung 2 herrührenden Bestandteil φ_{Bi2}. Die Wirbel sind mit konstanter Wirbeldichte $\Gamma' = d\Gamma/d\sigma$ kontinuierlich auf dem Strahlrande verteilt. Ist die Zirkulation eines auf das Umfangselement $d\sigma$ verteilten Einzelwirbels $\Gamma' d\sigma$, so wird das komplexe Potential der gesamten Wirbelverteilung 2 lauten:

$$\chi(\mathfrak{z}) = -i\,\frac{\Gamma'}{2\pi} \oint \ln(\mathfrak{z} - Z)\, d\sigma\,.$$

Dabei ist $\mathfrak{z}$ der Aufpunkt und Z der laufende Punkt längs des Kreises. Mit $Z = R e^{i\alpha}$ und $d\sigma = R\,d\alpha$ wird $d\sigma = -i R \frac{dZ}{Z}$ und damit

$$\chi(\mathfrak{z}) = -\frac{\Gamma'}{2\pi} R \oint \ln(\mathfrak{z} - Z) \frac{dZ}{Z}$$

Wir untersuchen nun die beiden Fälle $|\mathfrak{z}| \gtrless |Z|$. Ist $|\mathfrak{z}| > |Z|$, so ist

$$\chi_{Bi2} = -\frac{\Gamma'}{2\pi} R \left[\oint \ln\left(1 - \frac{Z}{\mathfrak{z}}\right) \frac{dZ}{Z} + \oint \ln \mathfrak{z}\, \frac{dZ}{Z}\right].$$

Das erste Integral verschwindet, wie mit Hilfe der Reihenentwicklung gezeigt werden kann, und es bleibt

$$\chi_{Bi2} = -\frac{\Gamma'}{2\pi} R \cdot 2\pi i \cdot \ln \mathfrak{z} .$$

Da aber $\Gamma = 2 R\pi \cdot \Gamma'$ die Gesamtzirkulation darstellt, so ist

$$\chi_{Bi2} = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \mathfrak{z} .$$

Die Wirbelverteilung 2 wirkt also außerhalb wie ein im Ursprung angebrachter Wirbel, dessen Zirkulation gleich der Gesamtzirkulation der Wirbelverteilung ist. Da nun φ_{Bi2} außerhalb des Kreises verschwinden soll, können wir dies erreichen, wenn wir im Ursprung einen entgegengesetzt drehenden Wirbel 1 gleicher Zirkulationsstärke anbringen. Es bleibt dann allerdings noch zu untersuchen, ob diese Annahme auch den im Inneren geforderten Verhältnissen entspricht. Ist $|\mathfrak{z}| < |Z|$, so ist

$$\chi_{Bi2} = -\frac{\Gamma'}{2\pi} R \left[\oint \ln\left(1 - \frac{\mathfrak{z}}{Z}\right)\frac{dZ}{Z} + \oint \ln Z \frac{dZ}{Z} + \pi i \oint \frac{dZ}{Z}\right] .$$

Das erste Integral verschwindet und es bleibt

$$\chi_{Bi2} = -\frac{\Gamma'}{2\pi} R [2\pi i \ln R - 2\pi^2 + \pi i \cdot 2\pi i] = \Gamma - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R . \quad (44, 48)$$

Das Potential φ_{Bi2} der Wirbelverteilung 2 ist im Inneren konstant, liefert also keinen Beitrag zur Geschwindigkeit. Für den im Ursprung angebrachten Wirbel 1 gilt

$$\chi_{Bi1} = +i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \mathfrak{z} ; \quad (44, 49)$$

daraus folgt

$$\frac{d\chi_{Bi1}}{d\mathfrak{z}} = \overline{\mathfrak{w}} = u - iv = i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\mathfrak{z}} = i \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{x}{r^2} - i \frac{y}{r^2}\right) ,$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$. Damit haben wir

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{r^2} ; \qquad v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{r^2}$$

und

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} . \quad (44, 50)$$

Wir wollen noch zeigen, daß w der Betrag der Umfangsgeschwindigkeit v_u ist. Aus χ_{Bi1} folgt $\varphi_{Bi1} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \alpha$; daraus ergibt sich

$$v_u = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \alpha} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} .$$

Damit wäre also die Bedingung $r v_u =$ konst. erfüllt; ihr wird Genüge geleistet durch das Potential der Wirbelverteilung 2 auf dem Strahlrande und des entgegengesetzt drehenden Wirbels 1 in Strahlmitte.

Nun ist nur noch zu zeigen, daß φ_{B_a} im Inneren konstant ist oder verschwindet. φ_{B_a} ist das Potential der Spiegelbilder der im Inneren gelegenen Singularitäten. Das Spiegelbild des Einzelwirbels 1 rückt ins Unendliche, sein Potential nimmt im Endlichen einen konstanten Wert an, liefert also innerhalb des Kreises keinen Beitrag zur Geschwindigkeit. Das Spiegelbild der Wirbelverteilung 2 ist diese Wirbelverteilung selbst, die im Inneren ohne Einfluß auf die Geschwindigkeit ist. Die Geschwindigkeit wird also im Inneren lediglich durch den Einzelwirbel hervorgebracht. Im Äußeren existiert wegen der physikalisch gegebenen Tatsache der Wirbelverteilung auf dem Rande keine Geschwindigkeit. Damit sind aber die Verhältnisse so gegeben, wie sie zu Anfang dieses Abschnitts angenommen wurden.

45. Die Verteilung des Auftriebs, des Widerstandes und des Längsmomentes des Flugzeugflügels über die Spannweite unter dem Einfluß des Schraubenstrahles im allgemeinen.

a) Der wirksame Anstellwinkel. Jedes Tragflügelprofil gibt bei einer gewissen Anströmrichtung den Auftrieb null. Von dieser auftriebsfreien Anströmrichtung sei der Anstellwinkel gemessen. Da aber bei einem Tragflügel endlicher Spannweite durch das abgehende Wirbelband zur Anströmrichtung senkrechte Störungsgeschwindigkeiten hervorgerufen werden, fällt die wirksame Anströmrichtung mit der Flugrichtung nicht zusammen. Eine weitere Änderung der Anströmgeschwindigkeit wird durch die Wirkung des Schraubenstrahls hervorgerufen. Ist der Anstellwinkel gegen die Flugrichtung α und ist die Änderung des Anstellwinkels durch die Störungen α_i, so ist der wirksame Anstellwinkel (Abb. 335):

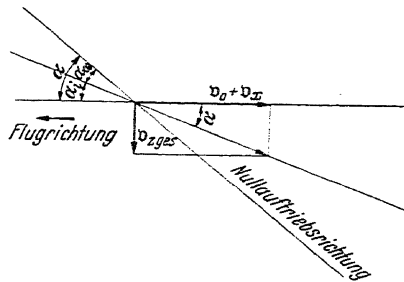



Abb. 335. Der wirksame Anstellwinkel.

$$\alpha_\infty = \alpha - \alpha_i . \qquad (45, 1)$$

Das Koordinatensystem werde jetzt so gewählt, daß die x-Achse der Flugrichtung entgegenläuft, die y-Achse in die Holmachse fällt und die z-Achse zu beiden senkrecht nach unten steht. Der besseren Unterscheidung wegen soll jetzt $v_{q\,\text{virt}}$ für die Querströmkomponente $v_{y\,\text{virt}}$ geschrieben werden. Die q-Achse liegt also in der von der virtuellen Strahlrichtung und der x-Richtung gebildeten Ebene.

Ist v_x die axiale Komponente der durch die Wirkung der Schraube am Orte des Flügels hervorgerufenen zusätzlichen Geschwindigkeit, $v_{z\,\text{ges}}$ die gesamte vertikale Komponente der durch die Wirkung des

Tragflügels und des Schraubenstrahles hervorgerufenen zusätzlichen Geschwindigkeit, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{v_{z\,\mathrm{ges}}}{v_0 + v_x}\,.$$

Sind v_x und $v_{z\,\mathrm{ges}}$ klein gegenüber der Fluggeschwindigkeit v_0, so wird

$$\alpha_i = \frac{v_{z\,\mathrm{ges}}}{v_0\left(1+\frac{v_x}{v_0}\right)} \quad \frac{v_{z\,\mathrm{ges}}}{v_0} - \frac{v_{z\,\mathrm{ges}}}{v_0}\cdot\frac{v_x}{v_0}$$

und

$$\alpha_i = \frac{v_{z\,\mathrm{ges}}}{v_0}\left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right). \tag{45, 2}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, v_x und $v_{z\,\mathrm{ges}}$ zu bestimmen.

Zur Bestimmung der Komponente v_x können wir die bei der Schräganblasung des Schraubenstrahls gemachten Untersuchungen zu Hilfe nehmen. Nach Abb. 336 erhalten wir für das Innere des Schraubenstrahls weit hinter der Schraube

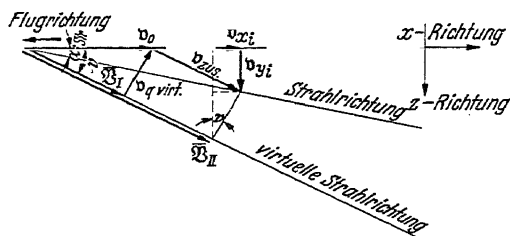



Abb. 336. Die Zusatzgeschwindigkeit im Innern des Schraubenstrahles.

$$v_{x_i} = v_{\mathrm{zus}}\cos\nu$$

oder mit

$$v_{\mathrm{zus}} = s\,v_0\,, \qquad s = s'\cos\nu\,,$$

$$v_{x_i} = s\,v_0\cos\nu$$

und bei kleinem ν

$$v_{x_i} = s\,v_0\,. \tag{45, 3}$$

In geringerer Entfernung von der Schraube ist die Zusatzgeschwindigkeit kleiner. Wir schreiben daher

$$v_{x_i} = \psi_{x_i}\,s\,v_0\,. \tag{45, 4}$$

Die Größe s ergibt sich aus dem Schubbelastungsgrad $c_s^{(\infty)}$ der gleichwertigen unendlichvielflügeligen Schraube

$$s = \sqrt{1 + c_s^{(\infty)}} - 1\,,$$

$$c_s^{(\infty)} = \frac{S}{\gamma_{31}^{(3)}\,\frac{\varrho}{2}\,v_0^2\,\frac{\pi D^2}{4}}\,.$$

Als Strahldurchmesser kann $D^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{31}^{(3)}}}\,D$, d. h. der Durchmesser $D^{(\infty)}$ der zur gegebenen Schraube gleichwertigen unendlichvielflügeligen Schraube des Durchmessers D gelten.

Im Äußeren des Schraubenstrahles weit hinter der Schraube gilt nach der Abb. 337

$$v_{x_a} = v_{q\,\mathrm{virt}}\cdot\frac{s'}{r^2}\sin\nu = \frac{s'}{r^2}\,v_0\sin^2\nu\,.$$

Bei kleinen Winkeln ν ist $v_{x\,a} \sim 0$ und demnach vernachlässigbar. In geringerer Entfernung von der Schraube werden aber durch deren

Einfluß weitere axiale Geschwindigkeiten hervorgerufen. Diese müssen geschrieben werden

$$v_{x_a} = \psi_{x_a} s \cdot v_0 \,. \tag{45,5}$$

Wir dehnen deshalb die Beziehung (45,3) in der Form

$$\frac{v_x}{v_0} = \psi_x \cdot s \tag{45,6}$$

auf das gesamte Strömungsgebiet aus. ψ_x ist aus Abb. 302 zu entnehmen.

Die Anteile an der Vertikalkomponente $v_{z\,\mathrm{ges}}$ sind:

1. Die infolge Schräganblasung unter dem Winkel ν vorhandene Vertikalkomponente v_ν. Nach Abb. 336 und 337 ist

Abb. 337. Die Zusatzgeschwindigkeit im Äußeren des Schraubenstrahles.

$$v_{y_i} = v_{\mathrm{zus}} \sin \nu = v_0 s \nu \,,$$

$$v_{y_a} = -\frac{s'}{r^2} v_{q\,\mathrm{virt}} \cos \nu = -\frac{s}{r^2} v_0 \sin \nu = -v_0 s \nu \frac{1}{r^2} \,.$$

Schreiben wir beide Aussagen in der Form

$$v_{z_I} = v_0 s \nu \psi_\nu \,, \tag{45,7}$$

so ist $\psi_{\nu_i} = 1$ und $\psi_{\nu_a} = -R^2/r^2$ zu setzen, wobei $R = 1$ der Schraubenstrahlradius ist. Bei kleinen ν-Werten kann an Stelle des Abstandes r eines äußeren Teilchens von Schraubenstrahlmitte der Abstand ϱ von der Schraubenachse genommen werden.

Nachdem die z-Komponente der Geschwindigkeit infolge Schräganblasung festgelegt ist, kann in dem folgenden wegen der vorausgesetzten Kleinheit des $\alpha_{i\,\mathrm{str}}$ angenommen werden, daß der Schraubenstrahl mit der x-Richtung zusammenfällt. Damit wird $s = s'$.

2. Die Vertikalkomponente der durch den Schraubenstrahl hervorgerufenen Radialgeschwindigkeit. Ist R der Radius des Strahles und r der Abstand eines Teilchens von der Strahlachse bzw. Schraubenachse, so lautet die Radialgeschwindigkeit (Abb. 338)

$$v_r = \frac{R}{r} s v_0 \psi_r \,,$$

ihre Vertikalkomponente nach Abb. 338

$$v_{z_{II}} = s v_0 \frac{z R}{r^2} \psi_r \,, \tag{45,8}$$

ψ_r ist aus Abb. 302 zu entnehmen.

3. Die Vertikalkomponente der durch den Schraubenstrahl erzeugten Umfangsgeschwindigkeit v_u. Die von einem auf der Strahlachse angebrachten Wirbel hervorgerufene Umfangsgeschwindigkeit hat den

Wert $v_u = -\frac{\Gamma m}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$, wenn Γm der mittlere Drall des Schraubenstrahls ist. Ihre Vertikalkomponente ist (Abb. 339) $v_{z_{III}} = v_u \frac{y}{r}$. Nach (46, 34) ist

$$\frac{v_u}{s\,v_0} \infty \frac{\lambda}{\eta} \cdot \frac{R}{r}.$$

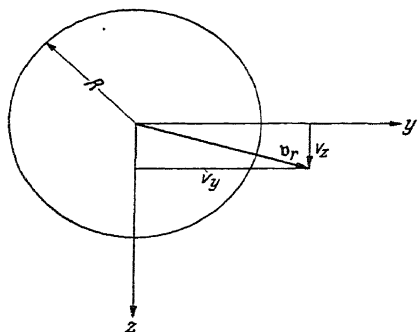



Abb. 338. Die Vertikalkomponente der Radialgeschwindigkeit.

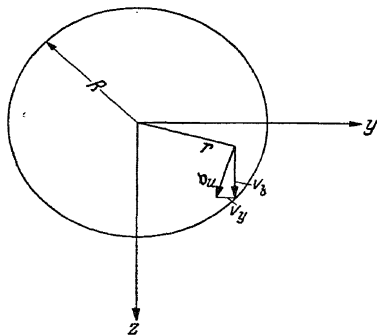



Abb. 339. Die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit bei konstantem Drall des Schraubenstrahles.

Damit ergibt sich für die Vertikalkomponente der Umfangsgeschwindigkeit

$$= s\,v_0 \frac{\lambda}{\eta} \frac{R}{r} \frac{y}{r} = s\,v_0 \frac{y\,R}{r^2} \psi_u, \qquad (45,9)$$

wobei im Strahläußeren ($r > R$)

$$\psi_{u_a} = 0$$

bzw. im Strahlinneren ($r < R$)

$$\psi_{u_i} = \frac{\lambda}{\eta} \frac{y}{r}$$

zu setzen ist. λ bedeutet den Fortschrittsgrad, η den Wirkungsgrad der Schraube.

Die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit, die durch das Vorhandensein der Singularitäten innerhalb und außerhalb des Strahles hervorgerufen wird. Sie setzt sich zusammen aus:

0. Der induzierten Geschwindigkeit $v_{z_0} = v_{i_0}(\Gamma_0)$ der durch den Schraubenstrahl unbeeinflußten Zirkulationsverteilung. Die Achsen der vom Tragflügel ausgehenden Wirbel dürfen dabei als in die x-Richtung fallend behandelt werden.

4. Der Vertikalkomponente einer zusätzlichen Strömung, die zur Erfüllung der Randbedingung nötig ist. Diese Strömung muß angebracht werden, da die von der vom Schraubenstrahl unbeeinflußten Zirkulationsverteilung herrührende Strömung allein den Randbedin-

gungen nicht genügt. Für 0. und 4. zusammen gelten die Gleichungen

$$\varphi_I = \varphi_{A_a} + \varphi_{B_i} - s\,\varphi_{A_i}\,,$$
$$\varphi_{II} = \varphi_{A_a} + \varphi_{B_i} + s\,\varphi_{B_a}\,.$$

Da φ_{A_a} und φ_{B_i} für 0. verwendet werden, bleibt für 4.:

$$\varphi_{I\,\text{zus}} = - \text{[illegible]}$$
$$\varphi_{II\,\text{zus}} = + \text{[illegible]} \qquad (45, 10)$$

Die entsprechenden Vertikalkomponenten der zusätzlichen Strömung können in der Form $v_{z_{IV}} = s\,v_{i1}(\Gamma_0)$ geschrieben werden.

Durch die in 1., 2., 3., 4. ermittelten Vertikalkomponenten sind die Abwindverhältnisse gegenüber der durch den Schraubenstrahl ungestörten Strömung verändert. Diese Änderung bedingt eine neue Zirkulationsverteilung. Da sich die die neue Zirkulationsverteilung hervorrufenden Geschwindigkeiten in der Form $s\,v_z$ schreiben lassen, setzen wir für die Gesamtzirkulation

$$\Gamma_0 + s\,\Gamma_1$$

an. Diese zusätzliche Zirkulation $s\,\Gamma_1$ induziert nun ihrerseits eine Abwärtsgeschwindigkeit. Damit ergibt sich als weitere Vertikalkomponente:

5. Die durch die zusätzliche Zirkulationsverteilung $s\,\Gamma_1$ hervorgerufene zusätzliche induzierte Geschwindigkeit

$$v_{z_V} = s\,v_{i_0}(\Gamma_1)\,. \qquad (45, 11)$$

Damit wären aber nun die Randbedingungen nicht mehr erfüllt. Zur Richtigstellung müßte $s\Gamma_1$ wieder gespiegelt werden. Entsprechend den Gleichungen (45, 10) hätten die neuen Zusatzpotentiale jetzt den Faktor s^2, den wir aber, der vorausgesetzten Kleinheit von s entsprechend, vernachlässigen dürfen. Damit kann die Berechnung mit $s\,v_{i0}(\Gamma_1)$ abgebrochen werden. Nehmen wir nämlich an, daß durch die zusätzlichen Geschwindigkeiten und die dadurch notwendigen Spiegelungen die Gesamtzirkulation

$$\Gamma = \Gamma_0 + s\,\Gamma_1 + s^2\Gamma_2 + s^3\Gamma_3 + \cdots \qquad (45, 12)$$

wird, so haben wir für

$$|\Gamma_\nu| < |\Gamma_0| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

mit

$$\Gamma^* = \Gamma_0(1 + s + s^2 + \cdots) = \Gamma_0 \frac{1}{1-s}$$

eine Zirkulation, die größer ist als die Gesamtzirkulation Γ. Der Unterschied zwischen Γ^* und $\Gamma_0 + s\,\Gamma_1$ ist dann ungefähr

$$\Gamma^* - (\Gamma_0 + s\,\Gamma_1) \approx \Gamma^* - (\Gamma_0 + s\,\Gamma_0) = \Gamma_0\left[\frac{1}{1-s} - (1+s)\right] = \Gamma_0 \frac{s^2}{1-s}.$$

Die Vernachlässigung, die durch Abbrechen der Reihe hervorgerufen wird, liegt also größenordnungsmäßig bei $s^2\Gamma_0$.

Mit der Summe aller Vertikalkomponenten wird dann

$$\frac{v_{z\,\text{ges}}}{v_0} = \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + s\left[\frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\,\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\,\psi_r + \frac{yR}{r^2}\,\psi_u\right] = \frac{v_{z0}}{v_0} + s\,\frac{v_{z1}}{v_0}. \tag{45, 13}$$

Hierin ist also $s v_{z1} = v_{zI} + v_{zII} + v_{zIII} + v_{zIV} + v_{zV}$.

Nach Gleichung (45, 6) wird (45, 2)

$$\alpha_i = \frac{v_{z\,\text{ges}}}{v_0}\,(1 - s\,\psi_x)$$

und unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung (45, 13)

$$\alpha_i = \frac{v_{z0}}{v_0} + s\,\frac{v_{z1}}{v_0} - s\,\psi_x\,\frac{v_{z0}}{v_0} = \frac{v_{z0}}{v_0} + s\left(\frac{v_{z1}}{v_0} - \psi_x\,\frac{v_{z0}}{v_0}\right).$$

Mit den gefundenen Werten ergibt sich dann

$$\alpha_i = \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + s\left[\frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\,\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\,\psi_r + \frac{yR}{r^2}\,\psi_u - \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0}\,\psi_x\right]. \tag{45,14}$$

b) Die zusätzliche Zirkulation. Die unter dem Einfluß des Schraubenstrahls zustande kommende Zirkulation ist entsprechend den obigen Darlegungen

$$\Gamma = \Gamma_0 + s\,\Gamma_1\,.$$

Hierbei ist Γ_0 die ohne Schraubenstrahleinfluß, jedoch bei gleichem Turbulenzgrad der Strömung, wie wenn der Schraubenstrahl vorhanden wäre, vorhandene Zirkulation. $\Delta\Gamma = s\,\Gamma_1$ ist die durch den Schraubenstrahleinfluß bedingte zusätzliche Zirkulation. Die Berechnung von Γ_0 wird ausführlich in der Tragflügeltheorie behandelt und ergibt sich aus

$$\Gamma_0 = \pi\,v_0\,t_{\text{red}}\left(\alpha - \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0}\right)$$

mit $t_{\text{red}} = t \cdot \frac{d c_a / d\alpha_\infty}{2\pi}$. Entsprechend wird für die Gesamtzirkulation

$$\Gamma = \pi\,t_{\text{red}}\,(v_0 + v_x)\,(\alpha - \alpha_i) = \pi\,t_{\text{red}}\,v_0\,(1 + s\,\psi_x)\,(\alpha - \alpha_i)\,.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\;}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}} = \frac{\Gamma_0}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}} + \frac{s\,\Gamma_1}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}} = (1 + s\,\psi_x)\,(\alpha - \alpha_i)$$

und unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\frac{\;}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}} + \frac{s\,\Gamma_1}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}} = \left[\alpha - \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0}\right] - s\left[\frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\,\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\,\psi_r + \frac{yR}{r^2}\,\psi_u - \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0}\,\psi_x - \frac{\Gamma_0}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}}\,\psi_x\right]. \tag{45, 15}$$

Daraus folgt für die zusätzliche Zirkulation

$$\frac{\Gamma_1}{\pi v_0 t_{\mathrm{red}}} = \left(\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{\Gamma_0}{\pi v_0 t_{\mathrm{red}}}\right)\psi_x - \frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} - \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} - \nu\psi_\nu - \frac{zR}{r^2}\psi_r - \frac{yR}{r^2}\psi_u . \tag{45,16}$$

Damit ist die Bestimmung der Zirkulation Γ_1 zurückgeführt auf die Bestimmung der Zirkulationsverteilung von einem Flügel gleicher Tiefenverteilung t_{red} und einer geometrischen Anstellwinkelverteilung

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left(\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{\Gamma_0}{\pi v_0 t_{\mathrm{red}}}\right)\psi_x - \frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} - \nu\psi_\nu - \frac{zR}{r^2}\psi_r - \frac{yR}{r^2}\psi_u \\ &= \alpha\psi_x - \frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} - \nu\psi_\nu - \frac{zR}{r^2}\psi_r - \frac{yR}{r^2}\psi_u\end{aligned} \tag{45,17}$$

bei homogener Anströmgeschwindigkeit v_0.

Da sich die einzelnen Strömungsanteile linear überlagern lassen, läßt sich auch Γ_1 aus den durch einzelne Strömungsanteile hervorgerufenen Anteilen an Γ_1 durch lineares Überlagern gewinnen. Die Bestimmung von Γ_1 bzw. einzelnen Teilen ist hiermit auf die bekannte Aufgabe der Tragflügeltheorie zurückgeführt, zu deren Lösung brauchbare Rechnungsverfahren entwickelt sind, worauf hier allgemeiner einzugehen jedoch nicht zweckmäßig ist.

c) Die zusätzliche Auftriebsverteilung. Der Auftriebsanteil eines Tragflügelelementes ist

$$dA = \varrho\,\Gamma v_\infty\,dy ,$$

wobei v_∞ die Anströmgeschwindigkeit

$$v_\infty = v_0 + v_x = v_0(1 + s\,\psi_x)$$

ist. Mit $\Gamma = \Gamma_0 + s\,\Gamma_1$ ergibt sich also

$$dA = \varrho(\Gamma_0 + s\,\Gamma_1)\,v_0(1 + s\,\psi_x)\,dy$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$dA = [\varrho\,\Gamma_0 v_0 + s\,\varrho\,v_0(\Gamma_1 + \psi_x\Gamma_0)]\,dy .$$

Da der Auftrieb ohne Einfluß des Schraubenstrahls gegeben ist durch

$$dA_0 = \varrho\,\Gamma_0 v_0\,dy ,$$

so wird die durch den Einfluß des Schraubenstrahls bedingte Änderung der Auftriebsverteilung

$$dA - dA_0 = d\Delta A = s\,\varrho\,v_0(\Gamma_1 + \psi_x\Gamma_0)\,dy .$$

Setzen wir $d\Delta A = s\,dA_1$, so ist damit

$$dA_1 = \varrho\,v_0(\psi_x\Gamma_0 + \Gamma_1)\,dy . \tag{45,18}$$

Die verhältnismäßige Änderung des Auftriebs ist gegeben durch

$$\frac{\frac{d}{dy}\Delta A}{s\frac{d}{dy}A_0} = \frac{\frac{d}{dy}A_1}{\frac{d}{dy}A_0} = \frac{\psi_x \Gamma_0 + \Gamma_1}{\Gamma_0} = \psi_x + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\,. \tag{45, 19}$$

d) Die zusätzliche Widerstandsverteilung. Der Widerstand eines Tragflügelelements ist

$$dW = \varrho\,\Gamma\,\alpha_i v_\infty\,dy + \frac{\varrho}{2}\,v_\infty^2\,t\,dy\,c_{w_p}.$$

Mit

$$\alpha_i v_\infty = \frac{v_{z\,\text{ges}}}{v_0+v_x}(v_0+v_x) = v_{z\,\text{ges}}$$
$$= v_0\left[\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + s\left\{\frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right\}\right]$$

wird dann

$$dW = \varrho\,(\Gamma_0 + s\Gamma_1)\left[\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + s\left\{\frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\psi_\nu\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right\}\right] v_0\,dy + \frac{\varrho}{2}\,(v_0+v_x)^2\,t\,dy\,c_{w_p},$$

oder unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$dW = \left[\varrho\,\Gamma_0 v_0 \frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0}\,dy + \frac{\varrho}{2}\,v_0^2 t\,dy\,c_{w_p}\right] + s\varrho\left[\Gamma_1\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0}\,v_0\right.$$
$$\left. + \Gamma_0\left\{\frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right\}v_0 + v_0^2\psi_x t\,c_{w_p}\right]dy.$$

Da der Widerstand des Flügels ohne Schraubeneinfluß durch

$$dW_0 = \varrho\,\Gamma_0 v_{i0}(\Gamma_0)\,dy + \frac{\varrho}{2}\,v_0^2 t\,dy\,c_{w_p}$$

gegeben wäre, so ergibt sich als zusätzlicher Widerstand

$$dW - dW_0 = d\Delta W = s\left[\varrho\,\Gamma_0 v_0\,dy\left\{\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\psi_\nu\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right\} + \varrho\,v_0^2\psi_x t\,c_{w_p}\,dy\right].$$

Setzen wir

$$d\Delta W = d\Delta W_i + d\Delta W_p = s\,dW_1,$$

wobei die Indizes i und p den induzierten bzw. Profilwiderstand bedeuten, so ist also

$$\left.\begin{aligned} dW_1 = \varrho\,\Gamma_0 v_0\,dy&\left[\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\psi_\nu\right.\\ &\left.+ \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right] + \varrho\,v_0^2\psi_x t\,c_{w_p}\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{45, 20}$$

Für die verhältnismäßige Änderung des induzierten Widerstandes erhalten wir somit

$$\frac{\frac{d}{dy}\Delta W_i}{s\frac{d}{dy}W_{i0}} = \frac{\frac{d}{dy}W_{i1}}{\frac{d}{dy}W_{i0}}$$

$$= \frac{v_0}{v_{i0}(\Gamma_0)}\left[\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\frac{v_{i0}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i1}(\Gamma_0)}{v_0} + \frac{v_{i0}(\Gamma_1)}{v_0} + \nu\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right]$$

$$= \frac{v_{i1}(\Gamma_0) + v_{i0}(\Gamma_1)}{v_{i0}(\Gamma_0)} + \frac{v_0}{v_{i0}(\Gamma_0)}\left(\nu\psi_\nu + \frac{zR}{r^2}\psi_r + \frac{yR}{r^2}\psi_u\right) + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}. \quad (45,21)$$

Die verhältnismäßige Änderung des Profilwiderstandes ist

$$\frac{\frac{d}{dy}\Delta W_p}{s\frac{d}{dy}W_{p0}} = \frac{\frac{d}{dy}W_{p1}}{\frac{d}{dy}W_{p0}} = 2\psi_x. \quad (45,22)$$

Die Widerstandsänderung besteht somit aus drei Anteilen, deren Ursachen sind:

1. Die Vermehrung $s\psi_x v_0$ der Anströmgeschwindigkeit (Änderung des Profilwiderstandes) (45,22).

2. Die Veränderung $s\Gamma_1$ der Zirkulation (letzter Anteil an der Änderung des induzierten Widerstandes) (45,21).

3. Die Veränderung $s v_z$ der Abwärtskomponente der wirksamen Anströmgeschwindigkeit (die übrigen Teile der Änderung des induzierten Widerstandes) (45,21).

e) Die Verteilung des zusätzlichen Längsmomentes. Für jedes Flügelprofil gibt es einen Bezugspunkt F, für welchen der Momentenbeiwert c_{m_F} wenigstens in einem gewissen Anstellungsbereich konstant ist. Auf diesen Punkt F bezogen wird also das Längsmoment eines Flügelteilchens

$$d M_F = \frac{\varrho}{2} v_\infty^2 t^2 dy\, c_{m_F}.$$

Wegen $v_\infty = v_0(1 + s\psi_x)$ wird damit unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$d M_F = \frac{\varrho}{2} v_0^2 t^2 dy\, c_{m_F} + s\frac{\varrho}{2} v_0^2 t^2 dy\, c_{m_F} 2\psi_x = \frac{\varrho}{2} v_0^2 t^2 dy\, c_{m_F}(1 + 2s\psi_x).$$

Ohne Schraubenstrahleinfluß wäre das Längsmoment gegeben durch

$$d M_{F_0} = \frac{\varrho}{2} v_0^2 t^2 dy\, c_{m_F},$$

so daß die Änderung des Längsmomentes ist

$$d\Delta M_F = \frac{\varrho}{2} v_0^2 t^2 dy\, c_{m_F} \cdot 2s\psi_x = s\, d M_{F_1}. \quad (45,23)$$

Die verhältnismäßige Änderung des Längsmomentes wird also

$$\frac{\frac{d}{dy}\,\Delta M_F}{s\,\frac{d}{dy}\,M_{F_0}} = \frac{\frac{d}{dy}\,M_{F_1}}{\frac{d}{dy}\,M_{F_0}} = 2\,\psi_x\,. \tag{45, 24}$$

Hiernach kann man jedoch das gesamte Längsmoment nur bestimmen, wenn die Bezugspunkte F aller Profile des Tragflügels auf einer Geraden rechtwinklig zur Flugrichtung liegen. Ist dies nicht der Fall, so möge F um x_F hinter einem festen Bezugspunkt liegen. Hierauf bezogen wird

$$d\,M = x_F\,d\,A + d\,M_F$$

und mit dem Moment des ungestörten Flügels

$$d\,M_0 = x_F\,d\,A_0 + d\,M_{F_0}$$

die Änderung durch den Schraubenstrahl

$$d\,\Delta M = s\,d\,M_1 = s\,(x_F\,d\,A_1 + d\,M_{F_1})\,. \tag{45, 25}$$

46. Einige rechnerische Ergebnisse und deren Vergleich mit Versuchen.

a) Eignung des Tragflügels unendlicher Spannweite konstanter Tiefe zu grundsätzlichen Untersuchungen. Obgleich die vorstehenden Untersuchungen des Schraubenstrahleinflusses auf einen Tragflügel auf die Aufgabe der Zirkulationsbestimmung um einen Tragflügel in homogener Strömung zurückführten, deren Lösung an sich wohlbekannt ist, erscheint es doch zweckmäßig, noch eine Reihe von grundsätzlichen Beispielen durchzurechnen. Hierbei zeigt es sich, daß die wesentlichen Einflüsse schon am Beispiel des Flügels konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite erkannt werden können. Auf ihn allein sollen sich daher die folgenden Ausführungen beschränken. Die Lösung für konkretere Fälle unter Beachtung der Tiefenverteilung und der endlichen Spannweite dürfte dem Leser nicht allzu schwer fallen.

Erfreulich ist es, daß sich einige Ergebnisse in geschlossener Form darstellen lassen. Zunächst möge aber dazu die Aufgabe des Flügels konstanter Tiefe unendlicher Spannweite und von beliebiger Verwindung oder in einer mit kleinen Einschränkungen beliebigen Anströmung behandelt werden.

b) Die dem Tragflügel konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite entsprechende Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Hinter einem Tragflügel bleibt bekanntlich eine Wirbelfläche zurück, welche in erster, aber meist ausreichender Annäherung als eben und mit einer in allen Querschnitten gleichen Wirbelverteilung behandelt werden kann. Die durch diese freie Wirbelfläche induzierte Strömung ist in

dem durch die Ebene der Wirbelfläche abgegrenzten oberen und unteren Halbraum spiegelbildlich gleich.

Jedes Tragflügelprofil besitzt in ebener Strömung eine Anstellung, bei welcher der Auftrieb verschwindet. Der Unterschied einer beliebigen Anstellung von dieser möge der aerodynamische Anstellwinkel α_∞ heißen. Beim Tragflügel beliebiger Verwindung und Spannweite bezeichnet man mit α_0 den Anstellwinkel gegen die örtliche, vom Tragflügel jedoch noch nicht beeinflußte Anströmrichtung, gemessen von der Nullauftriebsrichtung. Dabei macht es nichts aus, ob die Anströmung selbst in einer homogenen Parallelströmung besteht oder in einer ebensolchen mit überlagerter kleiner Störung, solange diese selbst aus einer Potentialströmung besteht. Wir wollen uns dabei auf Störungsströmungen beschränken, die nur in Ebenen senkrecht zur homogenen Hauptströmung erfolgen.

Wir denken uns nun den Tragflügel durch eine tragende Linie ersetzt. Sie stehe senkrecht zur Flugrichtung. Die Zirkulation Γ um diese tragende Linie ist dann gleich dem Unterschied des Potentials $\varphi_{i\infty}$ auf Ober- und Unterseite der anschließenden freien Wirbelfläche

$$\Gamma = \varphi_{i\infty}\big|_{\text{oben}} - \varphi_{i\infty}\big|_{\text{unten}} = \varphi_{i\infty+} - \varphi_{i\infty-}\,.$$

Seitwärts und im Unendlichen über und unter der Wirbelfläche möge $\varphi_{i\infty} = 0$ sein. Dann ist $\varphi_{i\infty+} = -\varphi_{i\infty-}$ und $\Gamma = 2\varphi_{i\infty+}$. Weit hinter der tragenden Linie ist die induzierte Strömung eben. Wir dürfen deshalb $\varphi_{i\infty}$ als Realteil $\Re$ der Funktion $\chi_{i\infty}$ einer komplexen Veränderlichen $\mathfrak{z} = y + iz$ auffassen (Abb. 340). Der Imaginärteil $\Im$ ist die Stromfunktion $\psi_{i\infty}$ der durch die Wirbelfläche induzierten Strömung

$$\chi_{i\infty} = \varphi_{i\infty} + i\psi_{i\infty}\,.$$

Die durch sie weit hinter dem Tragflügel hervorgerufenen Geschwindigkeitskomponenten sind also durch

$$\frac{d\chi_{i\infty}}{d\mathfrak{z}} = v_{i\infty y} - i\,v_{i\infty z}$$

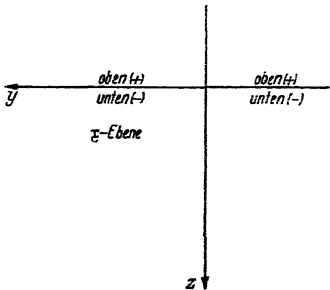



Abb. 340. Die $\mathfrak{z} = y + iz$-Ebene der induzierten Strömung.

gegeben. Am Orte der tragenden Linie sind die induzierten Geschwindigkeiten aus Symmetriegründen nur halb so groß. Wir können sie als Ableitungen des komplexen Potentials $\chi_i = \frac{1}{2}\chi_{i\infty}$ ansehen. Damit ist

$$\Gamma = 4\varphi_{i+} = 4\Re\{\chi_i\}_+\,. \tag{46, 1}$$

Der wirksame Anstellwinkel ist dann (Abb. 341)

$$\alpha_\infty = \alpha_0 - \alpha_i\,, \tag{46, 2}$$

wobei unter Voraussetzung kleiner Winkel geschrieben werden kann

$$\alpha_i = \frac{v_z}{v_0} = -\mathfrak{J}\left\{\frac{d\chi_i}{d\mathfrak{x}}\right\}_+ \cdot \frac{1}{v_0}. \tag{46, 3}$$

Wir wollen nun entsprechend α_0 als Imaginärteil der Ableitung eines außerhalb des Tragflügels regulären komplexen Potentials χ_0 auffassen, also

$$\alpha_0 = -\frac{v_{0z}}{v_0} = \mathfrak{J}\left\{\frac{d\chi_0}{d\mathfrak{x}}\right\}_+ \cdot \frac{1}{v_0}. \tag{46, 3}$$

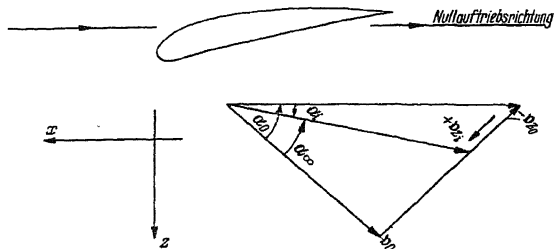



Abb. 341. Zur Erklärung des wirksamen Anstellwinkels.

v_{0z} setzt sich aus den durch die Verwindung des Tragflügels und den aus der Störungsströmung gegebenen Größen zusammen. Den Ergebnissen der Potentialtheorie entsprechend ist

$$\frac{d\chi_0(\mathfrak{x})}{d\mathfrak{x}} = \frac{v_0}{\pi}\int \alpha_0(y)\,\frac{d\ln(\mathfrak{x}-y_1)}{dy_1}\,dy_1, \tag{46, 4}$$

wobei $\mathfrak{x} = y + iz$ ein beliebiger Aufpunkt und y_1 die Abszisse auf der tragenden Linie ist (Abb. 342). Das Integral ist über die ganze Spannweite zu erstrecken. Faßt man das Integral als den Grenzwert einer Summe auf, so überzeugt man sich leicht, daß der Imaginärteil für $\mathfrak{x} \to y$ den Wert $v_0\,\alpha_0(y)$ annimmt.

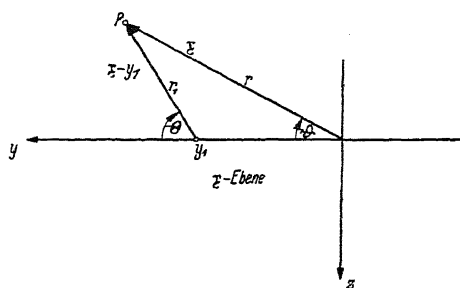



Abb. 342. Zur Bestimmung der Funktion $\chi_0'(\mathfrak{x})$.

Gilt nun für ein Tragflügelprofil bei kleinem α_∞

$$c_a = 2\pi k\,\alpha_\infty,$$

so wird mit $k \cdot t = t_{\text{red}}$ wegen

$$\Gamma = \frac{c_a}{2}\,v_0\,t$$

$$\Gamma = 4\,\mathfrak{R}\{\chi_i\}_+ = \pi\,t_{\text{red}}\,v_0\,\alpha_\infty = \pi\,t_{\text{red}}\,v_0\,(\alpha_0 - \alpha_i) = \pi\,t_{\text{red}}\,\mathfrak{J}\left\{\frac{d\chi_0}{d\mathfrak{x}} + \frac{d\chi_i}{d\mathfrak{x}}\right\}_+$$

Dafür können wir unter Voraussetzung reeller t_{red} schreiben

$$\mathfrak{R}\{\chi_i\}_+ = \mathfrak{J}\left\{\frac{\pi\,t_{\text{red}}}{4}\left(\frac{d\chi_0}{d\mathfrak{x}} + \frac{d\chi_i}{d\mathfrak{x}}\right)\right\}_+$$

oder
$$\Re\{\chi_i\}_+ = \Re\left\{-i\,\frac{\pi\,t_{\text{red}}}{4}\left(\frac{d\chi_0}{d\mathfrak{x}} + \frac{d\chi_i}{d\mathfrak{x}}\right)\right\}_+.$$

Um das Symbol $\Re$ weglassen zu dürfen, beschränken wir uns auf einen Tragflügel unendlicher Spannweite und konstanter reduzierter Flügeltiefe t_{red}. Dann suchen wir nach einem komplexen Potential χ_i, welches der Randbedingung
$$\chi_{i+} = -i\,\frac{\pi\,t_{\text{red}}}{4}\left(\frac{d\chi_0}{d\mathfrak{x}} + \frac{d\chi_i}{d\mathfrak{x}}\right)_+ \tag{46, 5}$$
beigegebenem $d\chi_0/d\mathfrak{x} = \chi_0'$ genügt. Da χ_0' aber entsprechend seiner Definition (46, 4) in der ganzen $\mathfrak{x}$-Ebene außerhalb der tragenden Linie ebenso wie χ_i regulär ist, so gilt die durch die Randbedingung gegebene Differentialgleichung für die ganze obere Halbebene (3. und 4. Quadrant). Sie heißt mit $\frac{4}{\pi\,t_{\text{red}}} = \tau$
$$\chi_i' - i\tau\chi_i + \chi_0' = 0\,. \tag{46, 6}$$
Ihre Lösung ist allgemein
$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} - \int \chi_0'(\mathfrak{x})\,e^{-i\tau\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\right). \tag{46, 7}$$
Die Integrationskonstante $\mathfrak{C}$ ist dabei so zu wählen, daß χ_i regulär wird. Für die untere Halbebene hätten wir entsprechend
$$\chi_i' + i\tau\chi_i + \chi_0' = 0\,.$$

c) Die Zirkulationsverteilungen für einige elementare Verwindungen. Zunächst sollen für einige elementare Verwindungen die Zirkulationsverteilungen auf die beschriebene Weise bestimmt werden. In einigen Fällen sind die Lösungen bekannt. Wenn sie hier nochmals dargestellt werden, so nur, um die allgemeine Brauchbarkeit des Verfahrens zu zeigen.

α) Konstanter Anstellwinkel. Bei konstantem Anstellwinkel $\alpha_0 =$ konst. ist
$$\chi_0' = i\,v_0\,\alpha_0\,. \tag{46, 8}$$
Damit wird für $\mathfrak{C} = 0$
$$\chi_i = -e^{i\tau\mathfrak{x}}\cdot i\,v_0\,\alpha_0\int e^{-i\tau\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x} = \frac{v_0\,\alpha_0}{\tau} \tag{46, 9}$$
und
$$\Gamma = 4\,\Re\{\chi_i\} = \pi\,t_{\text{red}}\,v_0\,\alpha_0\,. \tag{46, 10}$$

β) Sinusförmige Verwindung. Es möge die Verwindung
$$\alpha_0 = \beta\sin\frac{y}{r}$$
sein. Die halbe Periode sei also $r\pi$. Hierfür ist offenbar
$$\chi_0' = -\beta\,v_0\,e^{-i\frac{\mathfrak{x}}{r}} \tag{46, 11}$$

oder für $\mathfrak{x} = y$

$$\chi'_{0+} = -\beta v_0 \cos\frac{y}{r} + i\beta v_0 \sin\frac{y}{r}\,.$$

Mit $\mathfrak{C} = 0$ ergibt sich die Lösung

$$\chi_i = e^{i\tau\mathfrak{x}}\cdot\beta v_0\int e^{-i\left(\frac{1}{r}+\tau\right)\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x} = i\,\frac{\beta v_0}{\frac{1}{r}+\tau}\,e^{-i\frac{\mathfrak{x}}{r}} \tag{46, 12}$$

und (Abb. 343)

$$\Gamma = \frac{\pi t_{\text{red}}\,\beta v_0}{1+\frac{\pi t_{\text{red}}}{4r}}\sin\frac{y}{r} = \frac{\pi t_{\text{red}}\,v_0\alpha_0}{1+\frac{\pi t_{\text{red}}}{4r}}\,. \tag{46, 13}$$

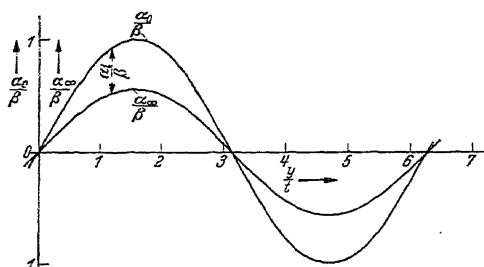



Abb. 343. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei sinusförmiger Verwindung.

γ) **Unstetige Verwindung um einen konstanten Wert.** Die Verwindung möge nun sein

$$\alpha_0 = \frac{\beta}{2} \qquad \text{für} \qquad y > 0\,,$$

$$\alpha_0 = -\frac{\beta}{2} \qquad \text{für} \qquad y < 0\,.$$

Es soll sich also um den Fall einer unstetigen Verwindung um einen konstanten Winkel β im Punkte $y = 0$ handeln (Abb. 344). Hierfür ist offenbar

$$\chi'_0 = \frac{v_0\beta}{\pi}\left(\ln\mathfrak{x} + i\,\frac{\pi}{2}\right), \tag{46, 14}$$

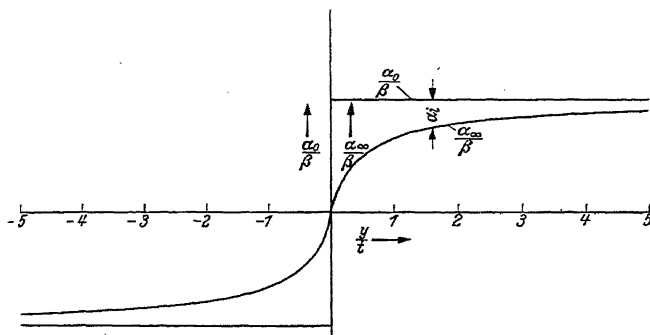



Abb. 344. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei unstetiger antisymmetrischer Verwindung um einen konstanten Wert.

oder für $\mathfrak{x} = re^{-i\vartheta} \to \pm y$

$$\chi'_{0+} = \frac{v_0\beta}{\pi}\ln y \pm i\,\frac{v_0\beta}{2}\,,$$

wobei das positive Zeichen für $y > 0$, das negative für $y < 0$ gilt.

Damit wird

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} - \frac{v_0\beta}{\pi}\int e^{-i\tau\mathfrak{x}}\ln\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} - i\frac{v_0\beta}{2}\int e^{-i\tau\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\right).$$

Bei Anwendung der partiellen Integration für das erste Integral ergibt sich

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} - \frac{i v_0\beta}{\pi\tau}e^{-i\tau\mathfrak{x}}\ln\mathfrak{x} + \frac{i v_0\beta}{\pi\tau}\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}}d\mathfrak{x} + \frac{v_0\beta}{2\tau}e^{-i\tau\mathfrak{x}}\right)$$

und mit [Lit. 282]

$$\mathfrak{C} + i\frac{v_0\beta}{\pi\tau}\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}}d\mathfrak{x} = i\frac{v_0\beta}{\pi\tau}Ei(-i\tau\mathfrak{x})$$

wird

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = -\frac{i v_0\beta}{\pi\tau}\ln\mathfrak{x} + \frac{i v_0\beta}{\pi\tau}e^{i\tau\mathfrak{x}}Ei(-i\tau\mathfrak{x}) + \frac{v_0\beta}{2\tau}. \qquad (46, 15)$$

Dafür kann auch geschrieben werden

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = -\frac{i v_0\beta}{\pi\tau}[\ln\mathfrak{x} - e^{i\tau\mathfrak{x}}(Ci\,\tau\mathfrak{x} - i\,si\,\tau\mathfrak{x})] + \frac{v_0\beta}{2\tau}.$$

Die damit verbundene Zirkulationsverteilung lautet [Lit. 294]

$$\Gamma = 4\Re\{\chi_i\}_+ = v_0\beta t_{\text{red}}\left[\pm\frac{\pi}{2}\mp(\sin|\tau y|Ci|\tau y| - \cos|\tau y|si|\tau y|)\right]. \qquad (46, 16)$$

δ) Unstetige hyperbolische Verwindung. Wir wollen nunmehr eine Verwindung der Form

$$\alpha_0 = \frac{a}{y}$$

untersuchen. Dieser Ansatz entspricht offenbar dem Fall einer durch einen Wirbel der Zirkulation $\Gamma_0 = 2\pi a v_0$ in $\mathfrak{x} = 0$ hervorgerufenen Störungsströmmung $\chi_0 = i a v_0 \ln\mathfrak{x}$. Dabei möge a so gewählt sein, daß α_0 klein ist, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung von $y \to 0$. Nun ist

$$\chi_0' = a v_0 \cdot \frac{i}{\mathfrak{x}} \qquad (46, 17)$$

oder für $\mathfrak{x} = y$

$$\chi_{0+}' = a v_0 \frac{i}{y}.$$

Die Integration ergibt

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} - i a v_0\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}}d\mathfrak{x}\right.$$

und mit

$$\mathfrak{C} - i a v_0\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}}d\mathfrak{x} = -i a v_0\,Ei(-i\tau\mathfrak{x})$$

wird

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = -i\frac{\Gamma_0}{2\pi}e^{i\tau\mathfrak{x}}Ei(-i\tau\mathfrak{x}). \qquad (46, 18)$$

Damit gilt (Abb. 345)

$$\Gamma = \pm \frac{2\Gamma_0}{\pi}(\sin|\tau y|\, C_i|\tau y| - \cos|\tau y|\, si|\tau y|). \qquad (46,19)$$

Diese Zirkulationsverteilung ist bis auf Konstanten dieselbe wie die durch (46, 16) bei unstetiger Verwindung um einen konstanten Winkel gegebene.

Abb. 345. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei unstetiger hyperbolischer Anstellwinkelverteilung; diese ist gleichwertig mit einer Strömung, die durch einen die tragende Linie senkrecht schneidenden Wirbel hervorgerufen wird.

ε) Unstetige Verwindung, wie sie einer Annäherung eines Doppelwirbels an die tragende Linie entspricht. Die soeben behandelte Verwindung entsprach einer Störungsströmung, wie sie durch Annäherung eines freien Wirbels an die tragende Linie entsteht. Wir wollen jetzt noch den Fall einer Störungsströmung betrachten, wie er durch Annäherung eines Doppelwirbels an die tragende Linie entsteht. Es sei

$$\chi_0 = -\frac{i\lambda}{\mathfrak{x}},$$

also

$$\chi_0' = \frac{i\lambda}{\mathfrak{x}^2} \qquad (46,20)$$

und damit (Abb. 346)

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{v_0}\cdot\frac{1}{y^2} \qquad (y \neq 0),$$

wobei sich α_0, wie aus den Untersuchungen des noch folgenden Abschnitts η) zu ersehen ist, in der Umgebung von $y = 0$ so verhält, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0\, dy = 0$$

wird. Die Integration liefert für die induzierte Strömung

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} - i\lambda\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}^2}\,dy\right),$$

woraus sich durch partielle Integration ergibt

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} + i\lambda\,\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}} - \tau\lambda\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x}\right.$$

Mit

$$\mathfrak{C} - \tau\lambda \int \frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}} d\mathfrak{x} = -\tau\lambda\, Ei(-i\tau\mathfrak{x})$$

finden wir

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = \frac{i\lambda}{\mathfrak{x}} - \tau\lambda e^{i\tau\mathfrak{x}}\, Ei(-i\tau\mathfrak{x}) \qquad (46,21)$$

und (Abb. 346)

$$\Gamma = 4\tau\lambda(\cos|\tau y|\, Ci\,|\tau y| + \sin|\tau y|\, si\,|\tau y|) \qquad (46,22)$$

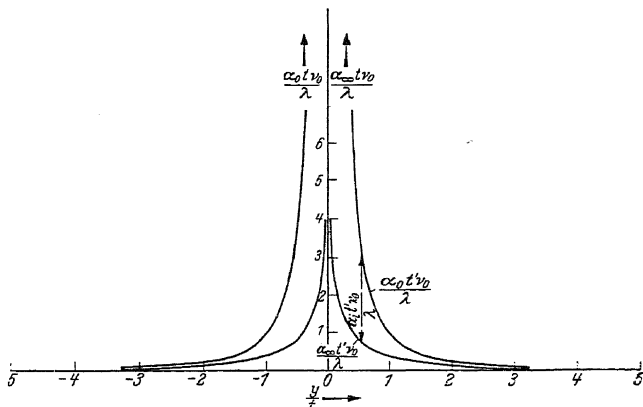



Abb. 346. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei einer unstetigen Anstellwinkelverteilung, wie sie der Annäherung eines Doppelwirbels an die tragende Linie entspricht.

ζ) Tragflügel in einer durch einen Wirbel hervorgerufenen Störungsströmung. Es möge nun der Fall untersucht werden, wo die Störungsströmung durch einen Wirbel in $\mathfrak{x}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}}_0$ hervorgerufen wird. Die in der oberen Halbebene induzierte Strömung ergibt sich, wenn $\mathfrak{x}_0$ in der unteren bzw. $\bar{\mathfrak{x}}_0$ in der oberen Halbebene liegt, aus

$$\chi_0 = \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \ln(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0),$$

$$\chi_0' = \frac{i\Gamma_0}{2\pi}\,\frac{1}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} \qquad (46,23)$$

zu

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left(\mathfrak{C} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi}\int \frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} d\mathfrak{x}\right)$$

$$= e^{i\tau(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)}\left[\mathfrak{C}\, e^{i\tau\mathfrak{x}_0} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi}\int \frac{e^{-i\tau(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} \cdot d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\right].$$

Mit

$$\mathfrak{C}\, e^{i\tau\mathfrak{x}_0} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi}\int \frac{e^{-i\tau(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = -\frac{i\Gamma_0}{2\pi} Ei[-i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]$$

erhält man

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = -\frac{i\Gamma_0}{2\pi} e^{i\tau(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)}\, Ei[-i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]. \qquad (46,24)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert dann wieder (Abb. 347)

$$\Gamma = 4\Re\{\chi_i\}_+ \,. \tag{46, 25}$$

Die Funktion $\frac{-i\Gamma_0}{2\pi} e^{i\tau\mathfrak{x}}\, Ei(-i\tau\mathfrak{x})$ ist in Abb. 348 für $\Gamma_0 = 1$ wiedergegeben. Mit Hilfe der dort dargestellten Werte wurde das Ergebnis der Abb. 347 erhalten.

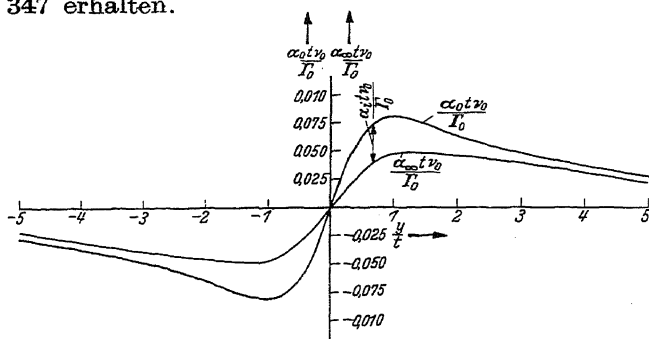



Abb. 347. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei einer Anstellwinkelverteilung, wie sie der Störung durch einen Wirbel in der Entfernung $\mathfrak{x} = it$ entspricht.

η) **Tragflügel in einer durch einen Doppelwirbel hervorgerufenen Störungsströmung.** Entsprechend möge jetzt

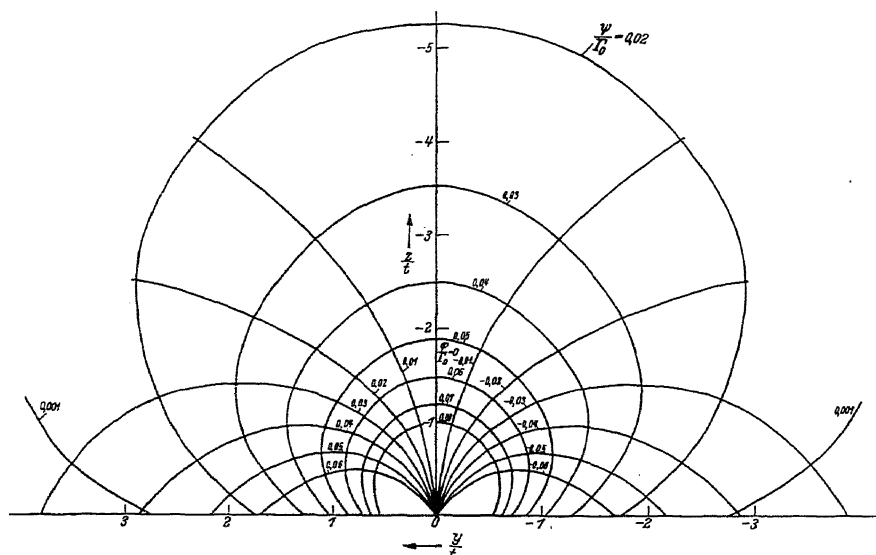



Abb. 348. Die Funktion $-i\frac{\Gamma_0}{2\pi} e^{i\tau\mathfrak{x}}\, Ei(-i\tau\mathfrak{x}) = \varphi + i\psi$ in der oberen Halbebene.

auch der Fall untersucht werden, wo die Störungsströmung durch einen Doppelwirbel in $\mathfrak{x}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}}_0$ hervorgerufen wird. Die in der oberen

Halbebene induzierte Strömung ergibt sich, wenn $\mathfrak{x}_0$ in der unteren bzw. $\bar{\mathfrak{x}}_0$ in der oberen Halbebene liegt, aus

$$\chi_0 = -\frac{i\lambda}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0}$$
$$\chi_0' = \frac{i\lambda}{(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)^2} \qquad (46, 26)$$

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}}\left[\mathfrak{C} - i\lambda\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)^2}\,d\mathfrak{x}\right.$$
$$= e^{i\tau\mathfrak{x}}\left[\mathfrak{C} + i\lambda\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} - \tau\lambda\int\frac{e^{-i\tau\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0}\,d\mathfrak{x}\right]$$
$$= \frac{i\lambda}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} + e^{i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)}\left[\mathfrak{C}\,e^{i\tau\mathfrak{x}_0} - \tau\lambda\int\frac{e^{-i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0}\,d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\right].$$

Mit

$$\mathfrak{C}\,e^{i\tau\mathfrak{x}_0} - \tau\lambda\int\frac{e^{-i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0}\,d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) = -\tau\lambda\,Ei[-i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]$$

erhält man also

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = \frac{i\lambda}{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0} - \tau\lambda\,e^{i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)}\,Ei[-i\tau(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]. \qquad (46, 27)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert dann (Abb. 349)

$$\Gamma = 4\,\Re\{\chi_i\}_+. \qquad (46, 28)$$

Abb. 349. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei einer Anstellwinkelverteilung, wie sie der Störung durch einen Doppelwirbel in der Entfernung $\mathfrak{x} = it$ entspricht.

d) Die Zirkulationsverteilung bei allgemeiner Verwindung. Das Problem des durch den Schraubenstrahl hindurchgehenden Tragflügels führt bei rein axialem Strahl, konstanter Flügeltiefe, unendlicher Spannweite und konstanter Anstellung auf den Fall eines Tragflügels im Felde zweier die tragende Linie senkrecht schneidenden freien Wirbel als Störungsströmung. Dieser Fall ist durch Überlagerung zweier Lösungen entsprechend Gl. (46, 19) zu erledigen. Das gleiche Problem führt bei Strahldrehung, soweit es das Verhalten der Strahlmitte betrifft, in erster Näherung auf die Gl. (46, 19), soweit es das Verhalten an den Strahlrändern betrifft, in erster Näherung auf die Gl. (46, 16). Bei Schräganblasung ist das Verhalten an den Strahlrändern und im Strahlinneren ebenfalls entsprechend Gl. (46, 16), in großer Entfernung aber entsprechend Gl. (46, 22).

Will man das Verhalten in den letzteren oder auch in beliebigen Fällen genau kennen, so ist es nötig, die allgemeine Verwindung $\alpha_0(y)$ zu behandeln. Für sie gilt (46, 4)

$$\chi_0'(\mathfrak{x}) = \frac{v_0}{\pi} \int\limits_{y=-\infty} \alpha_0(y_1)\, d\ln(\mathfrak{x} - y_1) \qquad (46,\,29)$$

und

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}} \left\{\mathfrak{C} - \frac{v_0}{\pi} \int \left[\int\limits^{+\infty} \alpha_0(y_1)\, d\ln(\mathfrak{x} - y_1)\right] e^{-i\tau\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}\right\}.$$

Wäre $\alpha_0(y_1)$ nur in einem Spannweitenelement dy_1 von Null verschieden, so würde diese Elementarverwindung liefern

$$d\chi_i(\mathfrak{x}) = e^{i\tau\mathfrak{x}} \left\{\mathfrak{C}_1 + \frac{v_0}{\pi} \int \frac{\alpha_0(y_1)\, dy_1}{\mathfrak{x} - y_1} \cdot e^{-i\tau\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}\right\}$$

$$= e^{i\tau(\mathfrak{x} - y_1)} \left\{\mathfrak{C}_1 e^{i\tau y_1} + \frac{v_0\alpha_0(y_1)\, dy_1}{\pi} \int \frac{e^{-i\tau(\mathfrak{x} - y_1)}}{\mathfrak{x} - y_1}\, d\mathfrak{x}\right\}.$$

Mit

$$\mathfrak{C}_1 e^{i\tau y_1} \quad \frac{v_0\alpha_0(y_1)\, dy_1}{} \int \frac{e^{-i\tau(\mathfrak{x} - y_1)}}{\mathfrak{x} - y_1}\, d(\mathfrak{x} - y_1) = \frac{v_0\alpha_0(y_1)\, dy_1}{\pi}\, Ei\,[-i\tau(\mathfrak{x} - y_1)]$$

folgt dann

$$d\chi_i(\mathfrak{x}) = \frac{v_0\alpha_0(y_1)\, dy_1}{\pi}\, e^{i\tau(\mathfrak{x} - y_1)}\, Ei\,[-i\tau(\mathfrak{x} - y_1)]$$

und damit für die gesamte Verwindung

$$\chi_i(\mathfrak{x}) = \frac{v_0}{\pi} \int\limits_{y_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_0(y_1)\, e^{i\tau(\mathfrak{x} - y_1)}\, Ei[-i\tau(\mathfrak{x} - y_1)]\, dy_1\,. \qquad (46,\,30)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert

$$\Gamma(y) = \frac{4\,v_0}{\pi} \int\limits_{y_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_0(y_1)\, \Re\{e^{i\tau(y - y_1)}\, Ei[-i\tau(y - y_1)]\}\, dy_1\,. \qquad (46,\,31)$$

Zur Abkürzung setzen wir noch

$$\tau y = \eta, \quad \tau y_1 = \eta_1, \quad \Re\{e^{i(\eta - \eta_1)}\, Ei[-i(\eta - \eta_1)]\}$$

$$= -[\cos|\eta - \eta_1|\, Ci|\eta - \eta_1| + \sin|\eta - \eta_1|\, si|\eta - \eta_1|] = -\pi K(\eta - \eta_1)$$

und erhalten mit $\Gamma^* = \Gamma$, $\alpha^* = \alpha$

$$\Gamma^*(\eta) = \pi v_0 t_{\text{red}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha^*(\eta_1)\, K(\eta - \eta_1)\, d(\eta - \eta_1) \qquad (\eta \text{ fest}, \quad \eta_1 \text{ variabel})$$

oder mit

$$K(\eta - \eta_1)\, d(\eta - \eta_1) = dU(\eta - \eta_1) \qquad U(\eta - \eta_1) = \int\limits_0^{\eta - \eta_1} K(\eta - \eta_1)\, d(\eta - \eta_1)\,,$$

$$\Gamma^*(\eta) = \pi v_0\, t_{\text{red}} \int\limits^{+\infty} \alpha^*(\eta_1)\, dU(\eta - \eta_1)\,. \qquad \mathbf{(46,\,32)}$$

Für beliebige $\alpha(y)$ läßt sich die Integration leicht graphisch durchführen. Der Wert des Integrals ist gleich dem wirksamen Anstellwinkel α_∞. Der Verlauf der Funktion K kann der Abbildung 346, der der Funktion U der Abbildung 344 entnommen werden.

e) **Rechnerische Ergebnisse.** Mit dem nunmehr Gewonnenen kann die Untersuchung des Schraubenstrahleinflusses auf einen Tragflügel unendlicher Spannweite leicht durchgeführt werden. Die im Abschnitt 45 angegebene Beziehung (45, 17) für den Anstellwinkel zur Bestimmung der zusätzlichen Zirkulation Γ_1 geht für den unendlich langen Tragflügel konstanter Tiefe in die Form

$$\alpha_1 = \alpha\,\psi_x - \frac{v_{i_1}(\Gamma_0)}{v_0} - \nu\,\psi_\nu - \frac{\Re}{r}\,\psi_u \qquad (46,\,33)$$

über. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich der Tragflügel weit hinter der Schraube befindet und durch die Mitte des Schraubenstrahls geht. Das erste Glied stammt von der axialen Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl, das zweite dient zur Erfüllung der Randbedingungen, das dritte wird durch die Schräganblasung und das vierte durch die Strahldrehung bedingt. Der konstante Anstellwinkel des gesamten Tragflügels ist $\alpha = \dfrac{\Gamma_0}{\pi\,v_0\,t_{\text{red}}}$. ν bedeutet den Winkel, unter dem der Schraubenstrahl schräg angeblasen wird. Für die Größen ψ_x, ψ_ν und ψ_u gelten folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\psi_x &= 0\\ \psi_\nu &= -\frac{R^2}{r^2}\\ \psi_u &= 0\end{aligned}\right\}\quad \text{außerhalb des Schraubenstrahls,}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_x &= 1\\ \psi_\nu &= 1\\ \psi_u &= \frac{\lambda}{\eta}\,\frac{y}{r}\end{aligned}\right\}\quad \text{innerhalb des Schraubenstrahls.}$$

α) Der Einfluß der axialen Zusatzgeschwindigkeit des Schraubenstrahls. Zur Erfüllung der am Strahlrande gegebenen Bedingungen muß man sich an den Durchdringungsstellen des Tragflügels (unendlicher Spannweite, konstanter Tiefe) mit dem Schraubenstrahl zwei entgegengesetzt drehende und nach hinten abgehende Wirbel der Zirkulation $s\,\Gamma_0$ angebracht denken. Ihr Wirken kommt der in Abb. 350 dargestellten Anstellwinkelverteilung α_0 gleich, wobei aber nur die Hälfte der dort angegebenen Werte zu nehmen ist, da die beiden Wirbel nicht von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ verlaufen, sondern erst an der tragenden Linie ($x = 0$) beginnen. Durch Überlagerung von Lösungen für den Einzelwirbel gemäß Gl. (46, 19) erhält man

die zusätzliche Zirkulationsverteilung (Abb. 351a). Zu dieser tritt aber noch wegen der im Strahl um $s v_0$ erhöhten Axialgeschwindigkeit eine weitere Zusatzzirkulation hinzu, die einer im Inneren des Strahles um $s \alpha$ vermehrten Anstellung entspricht und durch Überlagerung von Lösungen für konstante bzw. sprunghaft veränderliche Anstellung (Abb. 351b) nach Gl. (46,16) gewonnen werden kann. Die sich danach endgültig ergebende zu-

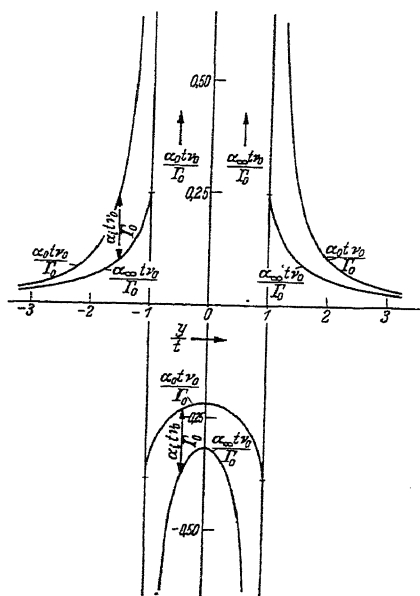



Abb. 350. Verteilung des wirksamen und induzierten Anstellwinkels bei einer Anstellwinkelverteilung, wie sie durch zwei Wirbel im gegenseitigen Abstande $2R$, welche die tragende Linie senkrecht schneiden, hervorgerufen wird.

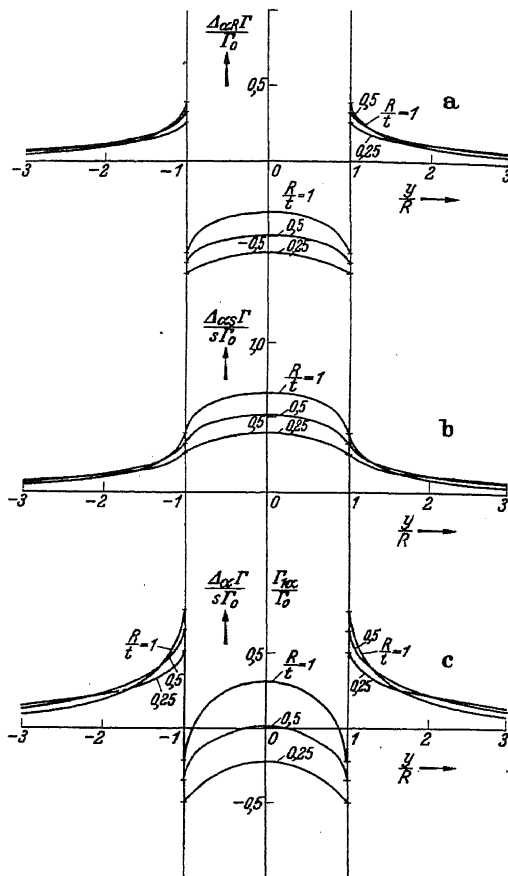



Abb. 351. Zusätzliche Zirkulationsverteilung bzw. Änderung des wirksamen Anstellwinkels infolge axialer Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl für verschiedene Verhältnisse R/t_{red}.

sätzliche Zirkulationsverteilung $\Delta_a \Gamma = s \Gamma_{1a}$ ist in Abb. 351c für einige Verhältnisse von Schraubenstrahldurchmesser zu Flügeltiefe dargestellt.

β) Der Einfluß der Strahldrehung. Die Strahldrehung kann praktisch als Drehung mit konstantem Drall $\Gamma_m = 2\pi r v_u =$ konst. behandelt werden. Innerhalb des Schraubenstrahls ist als Verteilung der Geschwindigkeit somit die gleiche zu nehmen, wie die bei einem auf der

Schraubenachse liegenden Wirbel. Außerhalb des Strahls verschwindet die Störungsgeschwindigkeit (Abb. 352). Bei der praktischen Durchführung der Integration wurde zunächst der Unterschied zwischen dem Anteil des gesamten Wirbels und dem der vom Strahlrand ins Unendliche verlaufenden Hyperbeläste bestimmt. Die Ergebnisse $\Delta_d \Gamma = s\Gamma_{1d}$ sind in Abb. 353 für einige Verhältnisse von Strahldurchmesser zu Flügeltiefe dargestellt, und zwar auf die mittlere Zirkulation Γ_s der Schraube bezogen. Hierbei ist wegen

$$N = \dot{m}\frac{\omega}{2\pi}\Gamma_s, \quad S = \dot{m}v_a = \frac{\eta N}{v_0},$$

$$\frac{v_a}{v_0} = s,$$

$$\Gamma_s = s \cdot \frac{2\pi}{\eta\omega} v_0^2. \qquad (46, 34)$$

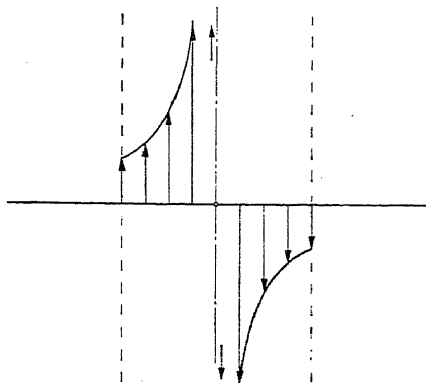



Abb. 352. Die der Schraubenstrahldrehung entsprechende Anstellwinkelverteilung des Tragflügels.

γ) Einfluß der Schräganblasung des Strahls. Die Schräganblasung des Strahls unter dem Anstellwinkel ν ruft in seinem Inneren eine konstante Abwärtsgeschwindigkeit und in seinem Äußeren eine

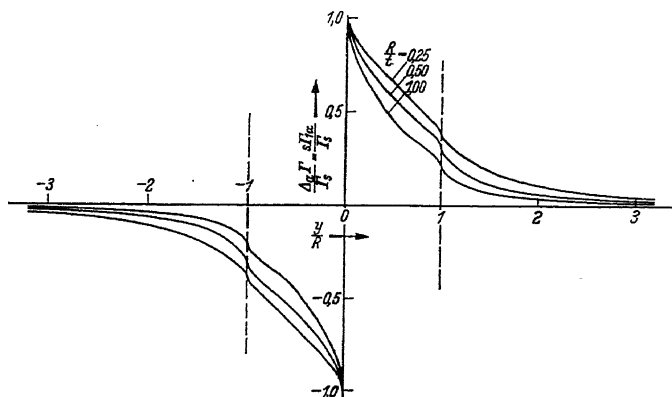



Abb. 353. Änderung der Zirkulationsverteilung bzw. der Verteilung des wirksamen Anstellwinkels und des Auftriebs infolge Schraubenstrahldrehung für verschiedene Verhältnisse R/t.

Aufwärtsgeschwindigkeit hervor, die am äußeren Strahlrande der Abwärtsgeschwindigkeit im Inneren entgegengesetzt gleich ist und quadratisch mit der Entfernung von der Strahlachse abnimmt.

Die entsprechende zusätzliche Anstellwinkelverteilung des Flügels ist in Abb. 354 wiedergegeben. Die Integration liefert die in Abb. 355

dargestellten und auf $\Gamma_\nu = \pi t_{\text{red}} v_0 \nu$ bezogenen Ergebnisse $\Delta_\nu \Gamma = s \Gamma_{1\nu}$ für verschiedene Verhältnisse von Strahldurchmesser zu Flügeltiefe.

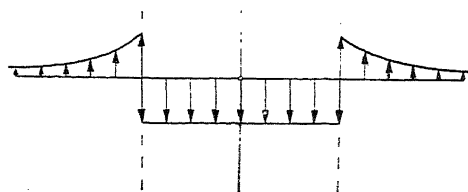



Abb. 354. Die der Schräganblasung der Luftschraube entsprechende Anstellwinkelverteilung des Tragflügels.

δ) Die gesamte zusätzliche Zirkulation und der durch sie bedingte Zuwachs des Auftriebes. Die gesamte sich ergebende zusätzliche Zirkulation ist

$$\Delta \Gamma = s \cdot \Gamma_1 = \Delta_a \Gamma + \Delta_d \Gamma + \Delta_\nu \Gamma = s(\Gamma_{1a} + \Gamma_{1d} + \Gamma_{1\nu}), \quad (46, 35)$$

wobei wie erinnerlich

$$s \sim \sqrt{1 + c_s} - 1$$

aus dem Schubbelastungsgrade c_s zu bestimmen ist. Für den Gesamtauftrieb finden wir

$$A = \varrho v_\infty \int^{+\infty} \Gamma dy = \varrho (v_0 + s v_0 \psi_x) \int^{+\infty} (\Gamma_0 + \Delta \Gamma) dy .$$

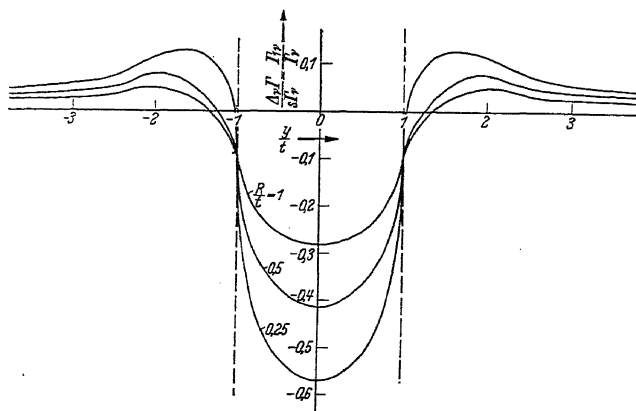



Abb. 355. Änderung der Auftriebsverteilung infolge Schräganblasung der Schraube.

Wie man sich leicht überzeugt, verschwinden die Integrale über $\Delta_\nu \Gamma$ und $\Delta_d \Gamma$, ferner ist außerhalb des Strahles $\psi_{x_u} = 0$, innerhalb aber $\psi_{x_i} = 1$ und es bleibt

$$A = \varrho v_0 (1 + s\psi_x) \int^{+\infty} (\Gamma_0 + \Delta_a \Gamma) dy ,$$

$$= \varrho v_0 \int_{-\infty} (\Gamma_0 + \Delta_a \Gamma) dy + \varrho s v_0 \int_{-R} (\Gamma_0 + \Delta_a \Gamma) dy ,$$

$$= \varrho v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0 dy + \varrho v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_a \Gamma dy + \varrho s v_0 \int_{-R}^{+R} \Gamma_0 dy + \varrho v_0 s^2 \int_{-R}^{+R} \Gamma_{1a} dy .$$

Da die Glieder mit s^2 vernachlässigt werden können, haben wir dann

$$A = A_0 + \varrho v_0 \int\limits^{+\infty} \Delta_a \Gamma \, dy + \varrho s v_0 \cdot 2 R \Gamma_0 .$$

Die zusätzliche Zirkulation $\Delta_a \Gamma$ setzt sich aus dem zur Befriedigung der Randbedingungen herrührenden Teil $\Delta_{a_R} \Gamma$ und dem durch die axiale Zusatzgeschwindigkeit bedingten Anteil $\Delta_{a_S} \Gamma$ zusammen (Abb. 351). Das Integral über $\Delta_{a_R} \Gamma$ verschwindet, da die $\Delta_{a_R} \Gamma$-Verteilung von den beiden Wirbeln herrührt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{a_R} \Gamma \, dy = 2 \int\limits_{-R}^{-\infty} \Delta_{a_R} \Gamma \, dy + \int\limits_{-R}^{+R} \Delta_{a_R} \Gamma \, dy = 0 .$$

Nun gilt aber gemäß (46, 16) und (46, 19) außerhalb des Strahles $\frac{\Delta_{a_R} \Gamma}{s \Gamma_0} = \frac{\Delta_{a_S} \Gamma}{s \Gamma_0}$ und innerhalb des Strahles $\frac{\Delta_{a_S} \Gamma}{s \Gamma_0} = \frac{\Delta_{a_R} \Gamma}{s \Gamma_0} + 1$, so daß wir haben

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_a \Gamma \, dy = 2 \int\limits_{-\infty}^{-R} \Delta_{a_R} \Gamma \, dy + \int\limits_{-R}^{+R} (\Delta_{a_R} + s \Gamma_0) \, dy = \int\limits_{-R}^{+R} s \Gamma_0 \, dy = s \cdot 2 R \Gamma_0$$

und damit für den Auftrieb

$$A = A_0 + s \varrho v_0 4 R \Gamma_0 .$$

Die gesamte Auftriebserhöhung ist also

$$\Delta A = s \cdot c_{a_0} \frac{\varrho}{2} v_0^2 \cdot 2 D t . \qquad (46, 36)$$

Sie ist nicht vom Verhältnis des Schraubendurchmessers D zur Flügeltiefe abhängig, sondern nur die Auftriebsverteilung. Doch gilt dies streng nur für den Flügel unendlicher Spannweite, konstanter Tiefe und nur bei Zugrundelegung der Theorie der tragenden Linie, wie dies hier geschehen ist. Hierauf soll später noch eingegangen werden. Der von einem Flügelelement $t \, dy$ zum Auftrieb gelieferte Anteil ist

$$\begin{aligned} dA &= \varrho (v_0 + s v_0 \psi_x)(\Gamma_0 + s \Gamma_1) \, dy , \\ &= \varrho v_0 \Gamma_0 dy + s \varrho v_0 dy (\psi_x \Gamma_0 + \Gamma_1) \end{aligned}$$

oder

$$dA = dA_0 + s \, dA_1 .$$

Für den Auftriebszuwachs des Elements infolge der Zirkulationsänderung schreiben wir

$$s \, dA_1 = \Delta c_a(y) \frac{\varrho}{2} v_0^2 t \, dy = s \frac{\varrho}{2} v_0^2 t \, dy (\psi_x \Gamma_0 + \Gamma_1) \frac{2}{v_0 t}$$

und haben

$$\Delta c_a(y) = s \cdot \frac{2}{v_0 t} (\psi_x \Gamma_0 + \Gamma_1) .$$

Mit $c_{a_0} = \frac{2\,\Gamma_0}{v_0\, t}$ wird dann

$$\frac{\Delta c_a(y)}{s\, c_{a_0}} = \left(\psi_x + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\right). \tag{46, 37}$$

Beschränkt man sich wieder auf den Fall der nicht angestellten Luftschraube ohne Strahldrehung, so ist der Verlauf von $\Delta c_{a_0}/s c_{a_0}$ durch die Abb. 351 sofort gegeben, wenn die im Schraubenstrahl liegenden Ordinaten noch um $\psi_x = 1$ vermehrt werden, wodurch das in Abb. 356 wiedergegebene Ergebnis erhalten wird.

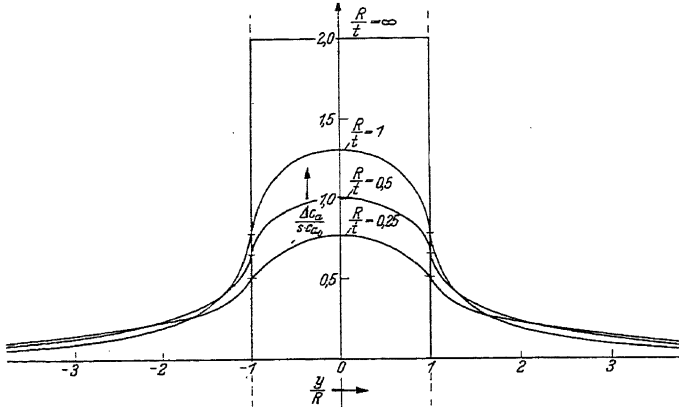



Abb. 356. Auftriebserhöhung infolge der axialen Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl für verschiedene Verhältnisse R/t unter Zugrundelegung der Theorie der tragenden Wirbellinie.

f) Vergleich mit Modellversuchen. α) Axiale Zusatzgeschwindigkeit. Zum Vergleich heranziehbare Versuchsergebnisse liegen leider nur wenige vor. Am besten geeignet erscheinen hierzu die Ergebnisse von Stüper [Lit. 172]. Er erzeugte durch ein zusätzliches Gebläse einen dem Windkanalstrahl eingelagerten axialen Strahl. Der Durchmesser dieses zusätzlichen Strahles, dessen Achse mit der Blasrichtung des Windkanals zusammenfiel, war das 0,6-fache der Flügeltiefe. Die Versuchsergebnisse sind in Abb. 357 und 358 dargestellt. Zum Vergleich dürfen aber in erster Linie nur die bei kleinen Anstellwinkeln gewonnenen Ergebnisse herangezogen werden. Dabei fällt sofort auf, daß der Einfluß der axialen Zusatzgeschwindigkeit des Schraubenstrahls insbesondere im Strahlinneren wesentlich kleiner ist, als die Theorie zunächst erwarten läßt.

In erster Linie läßt sich dies daraus erklären, daß bei der oben geschilderten Berechnung nur die Theorie der tragenden Linie herangezogen wurde. Da aber Strahldurchmesser und Flügeltiefe von gleicher Größenordnung sind, muß deren Verhältnis berücksichtigt werden. Könnte man in jedem Flügelschnitt die Vorgänge als eben ansehen,

so hätte man das ebene Problem des Tragflügelprofils in einem parallelen Strahl zu behandeln. Die entsprechenden Spiegelungen der

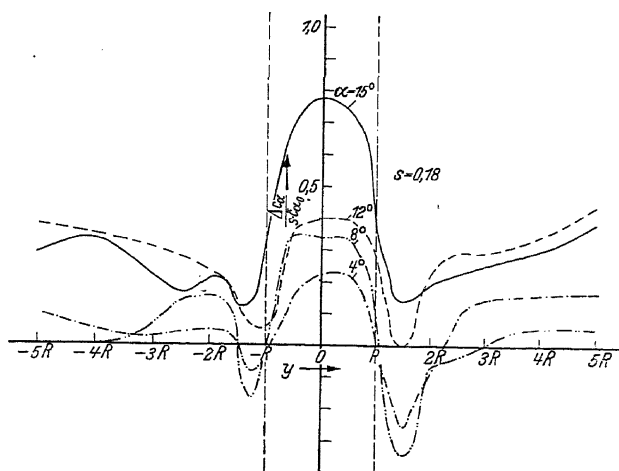



Abb. 357. $s = \frac{v_a}{v_0} = 0{,}18$.

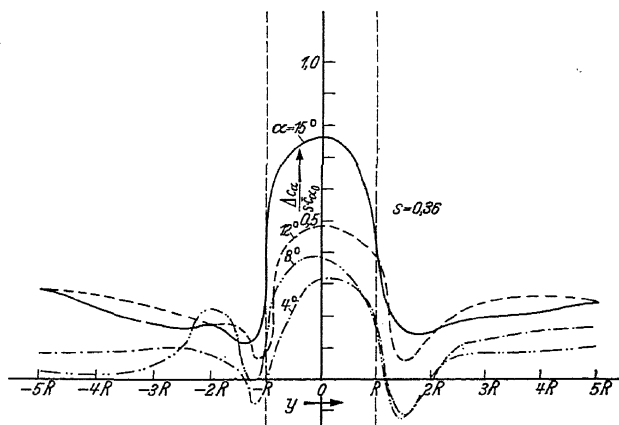



Abb. 358. $s = \frac{v_a}{v_0} = 0{,}36$.

Abb. 357 u. 358. Versuchsergebnisse bezüglich der Auftriebsänderung infolge axialer Zusatzgeschwindigkeit $R/t = 0{,}3$.

tragenden Wirbelfläche an beiden Strahlrändern würde auf das in Abb. 359a dargestellte Problem führen. Das Verhältnis des Zusatzauftriebes zu dem sich nach der Theorie der tragenden Linie (Abb. 359b) ergebenden ist, wenn a den gegenseitigen Abstand der Strahlgrenzen

bedeutet, schätzungsweise

$$\zeta_F = \frac{c_a(\text{tragende Wirbelfläche})}{c_a(\text{tragende Wirbellinie})} = \frac{\Delta A\,(\text{tragende Wirbelfläche})}{\Delta A\,(\text{tragende Wirbellinie})} \approx \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2a}{\pi t}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi t}{2a}. \tag{46, 38}$$

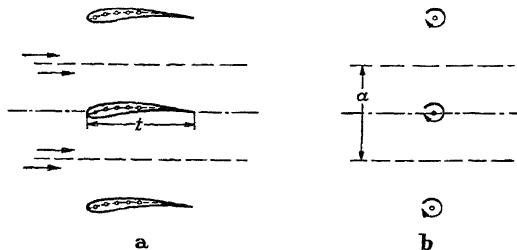



Abb. 359. Ebenes Analogon zum Schraubenstrahl zur Erläuterung des Einflusses der endlichen Flügeltiefe. a) Ersatz des Tragflügels durch tragende Wirbelfläche. b) Ersatz des Tragflügels durch tragende Wirbellinie.

Um das räumliche Problem dabei zu berücksichtigen, nimmt man am besten den Verminderungsfaktor $\bar{\zeta}_F = \zeta_F$ über den ganzen Tragflügel konstant und $a = \frac{\pi}{4} D$ an. Eine exakte Lösung des räumlichen Problems steht noch aus, doch erscheint sie sehr wünschenswert. Die Verminderung betrifft in unserem Falle nur den infolge der axialen Zusatzgeschwindigkeit hervorgerufenen Zusatzauftrieb bzw. dessen Beiwert. Der Einfluß von Strahldrehung und Schräganblasung wird hiervon nicht berührt. Der durch Zuhilfenahme dieser ebenen Analogie erhaltene Zusatzauftriebsbeiwert $\Delta_a c_a = s\, c_{a_1}$ ist in Abb. 360 dargestellt. Für den Flügel unendlicher Spannweite und konstanter Tiefe wird damit auch die Zunahme des Gesamtauftriebs kleiner, als sich unter Zugrundelegen der tragenden Linie ergibt, und zwar ist bei unseren Abschätzungen mit $\bar{\zeta}_F = \zeta_F$

$$\Delta A = \bar{\zeta}_F \cdot 2s\,\frac{e}{2}\,v_0^2\,D\,t\,c_{a_0}. \tag{46, 39}$$

Abb. 360. Auftriebserhöhung infolge axialer Zusatzgeschwindigkeit bei überschlägiger Berücksichtigung der Tiefenverteilung der tragenden Wirbel für $R/t = 0{,}3$.

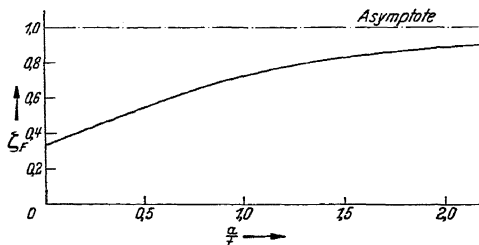



Abb. 361. Der Verminderungsfaktor ζ_F.

Der Verminderungsfaktor $\zeta_F = \bar{\zeta}_F$ ist in Abb. 361 wiedergegeben. Er dürfte auch in anderen Fällen zur Abschätzung brauchbar sein. Der Vergleich von Abb. 357 und 358 mit Abb. 360 zeigt, daß bei kleinen Anstellwinkeln des Tragflügels die Übereinstimmung recht gut ist. Der Unter-

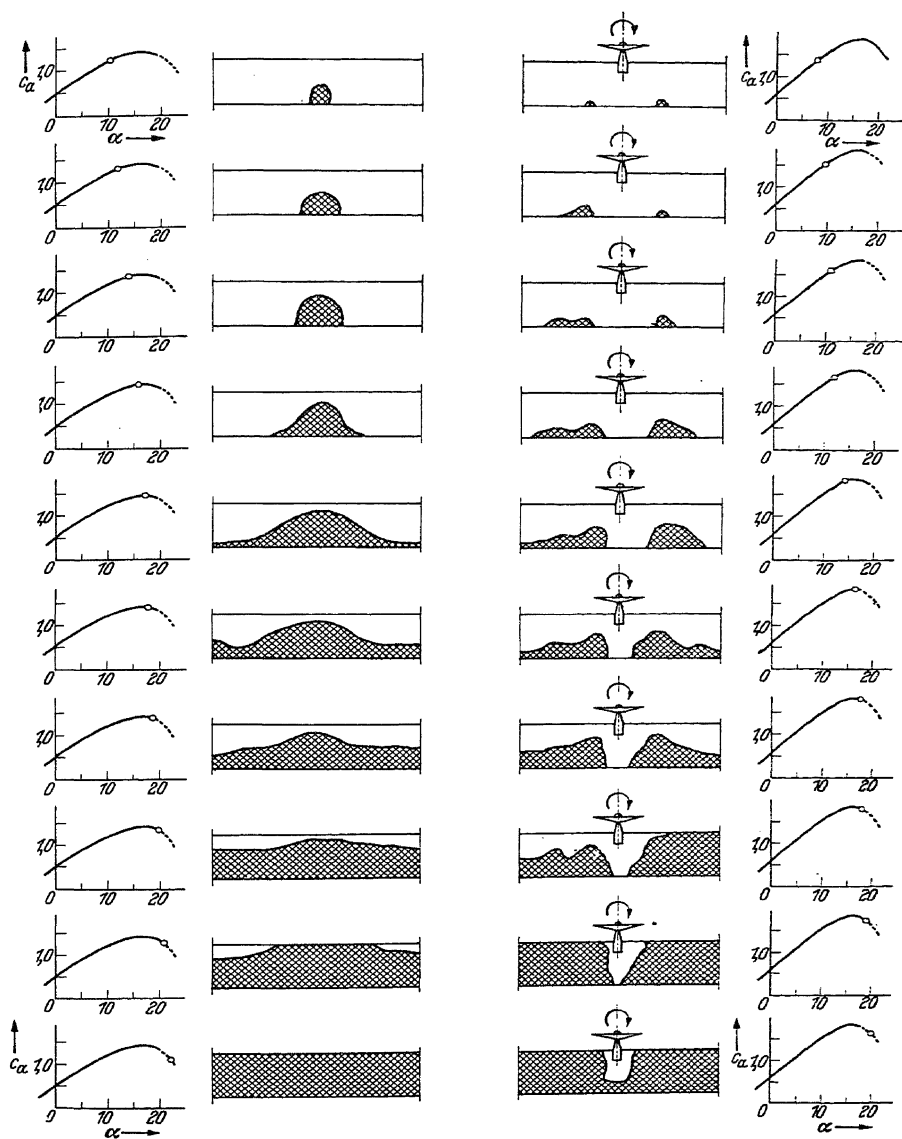



Abb. 362. Einfluß der Schräganblasung auf das Abreißverhalten.

schied am Strahlrande bei den Versuchsergebnissen ist auf eine Verminderung der Anströmgeschwindigkeit in dieser Gegend durch die Versuchseinrichtung zurückzuführen.

Bei größeren Anstellwinkeln ist die Auftriebszunahme größer. Dies kommt daher, daß infolge der axialen Zusatzgeschwindigkeit wenigstens im Strahlinneren der wirksame Anstellwinkel verkleinert ist und damit der Abfall des Auftriebanstieges erst bei größeren geometrischen Anstellwinkeln bemerkbar wird und das Abreißen zu größeren geometrischen Anstellwinkeln hinausgeschoben wird. Die Versuche bestätigen also auch in dieser Hinsicht die theoretischen Ergebnisse.

β) Schräganblasung. Eine bedeutungsvolle Übereinstimmung besteht aber noch in einem anderen Verhalten. Bei weiteren Versuchen

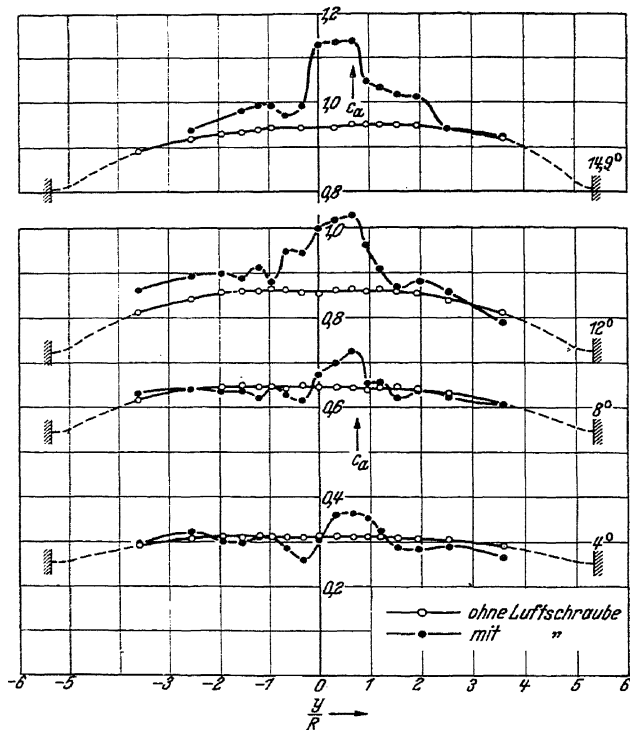



Abb. 363. Auftriebsverteilung unter Einfluß von Strahldrehung und Anstellung.

benutzte Stüper eine Modelluftschraube. Diese wurde gleichzeitig mit dem Flügel angestellt. Zur Wirkung der axialen Zusatzgeschwindigkeit trat dann noch die der Schräganblasung. Auch die letztere wirkt in einer Verminderung des wirksamen Anstellwinkels im Inneren des Schraubenstrahls und in einer Vermehrung desselben im Äußeren. Daher wird das Abreißen im Strahlinneren sowohl infolge der axialen Zusatzgeschwindigkeit als auch infolge der Schräganblasung der Luftschraube zu größeren Anstellwinkeln hinausgeschoben. Im Äußeren in

Nähe des Strahlrandes aber tritt das Abreißen schon bei kleineren Anstellwinkeln ein. Hierin ist eine Erklärung der Ergebnisse der Versuche STÜPERS zu erblicken, welche bezüglich des Abreißens an einem Flügel ohne und mit Schraube mit Hilfe von Fädchen vorgenommen wurden. Die Auswertung dieser Versuche ist in Abb. 362 wiedergegeben. An der schraffierten Stelle war die Strömung abgerissen. Die linke Bildhälfte zeigt, wie das Abreißen beim Flügel allein an der Hinterkante der Flügelmitte beginnt und sich von dort über den ganzen Flügel ausbreitet. Beim Flügel mit Luftschraube auf der rechten Bildseite beginnt das Abreißen an der Hinterkante an den Stellen, an denen der Strahlrand liegt. Von hier pflanzt sich das Abreißen nach den Flügelenden zu fort, während im Strahl selbst die Strömung weit über das Auftriebsmaximum hinaus anliegt.

γ) Strahldrehung. Ein unsymmetrischer Einfluß des Schraubenstrahls auf den Abreißvorgang ließ sich nicht eindeutig feststellen. Dies ist erklärlich, da die durch den Drall hervorgerufene Änderung des wirksamen Anstellwinkels bei großen Anstellwinkeln den anderen Einflüssen gegenüber von nur geringer Bedeutung ist. Bei der Auftriebsverteilung selbst ist der unsymmetrische Einfluß des Schraubenstrahls aber bemerklich und bei kleinen Anstellwinkeln von Ausschlag, wie Abb. 363 zeigt.

g) Bemerkungen bezüglich des Verhaltens beim wirklichen Flugzeug. Während beim Modellversuch im Windkanal die Turbulenz im Strahl des Kanals und im Strahl der Modellschraube im allgemeinen vermutlich nicht bedeutend voneinander verschieden sind, dürfte im Vergleich zu der sehr geringen Turbulenz der freien Atmosphäre die Turbulenz im Schraubenstrahl des fliegenden Flugzeugs erheblich sein.

Die in Abschnitt 43 gefundenen Ergebnisse über das Aufrollen der freien Wirbelbänder hinter der Schraube können selbstverständlich die wirklichen Verhältnisse nur ganz roh erfassen. Tatsächlich ist das ganze Strömungsgebilde labil und wegen der Reibung der allmählichen Vermischung unterworfen. Die Zusatzgeschwindigkeit verflacht sich immer mehr und ihr Gebiet breitet sich entsprechend aus. Im Längsschnitt durch den Schraubenstrahl kann man daher drei Gebiete unterscheiden:

a) das Gebiet der unverminderten Zusatzgeschwindigkeit,
b) das Gebiet der ungeänderten Strömung,
c) das Mischgebiet.

Die Begrenzungen dieser Gebiete sind durch Abb. 364 roh gekennzeichnet. In jedem Querschnitt muß natürlich der Impulssatz befriedigt werden. Für die Drallströmung gilt ähnliches.

Der Mischvorgang und die auch ursprünglich sehr ungleiche Wirbelverteilung im Schraubenstrahl bedingen offenbar eine außerordentlich

starke Turbulenz innerhalb des Schraubenstrahls. Man darf ohne weiteres annehmen, daß sie wesentlich stärker ist, als die verhältnismäßig geringe Turbulenz der freien Atmosphäre und vergleichbar mit der Turbulenz nicht besonders turbulenzarmer Windkanäle.

Hieraus ist wiederum ein erheblicher Einfluß auf die Eigenschaften der im Schraubenstrahl liegenden Tragflügelprofile zu erwarten. Die Austauschbewegung im turbulenten Gebiete bedingt ja eine Energiezufuhr in die Grenzschicht. Energiereichtum der Grenzschicht bedingt aber deren Fähigkeit, bei Druckanstieg am Profil länger anliegen zu bleiben, als dies bei Energiearmut der Fall ist. Dies ist eine aus Versuchen mit Grenzschichtabsaugung, mit Spaltflügeln und mit Zublasen wohlbekannte Erscheinung, so daß auch dieser Umstand bei großem Anstellwinkel zu einer weiteren Vermehrung des Zusatzauftriebes führen kann.

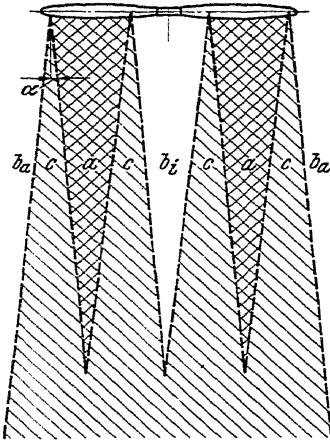



Abb. 364. Skizze der Strahlenausbreitung und Mischung. Im Gebiete b_a ist die Turbulenz die der freien Atmosphäre. In den Gebieten a, b_i, c ist sie wesentlich vergrößert. Der Ausbreitungswinkel α ist der Größenordnung nach $0{,}1 \cdot \bar{v}_a/\bar{v}_m$ im Bogenmaß.

Über das Maß der Turbulenz im Schraubenstrahl wurden zwar bisher keine Versuche durchgeführt. Die Analyse von Motorflugpolaren und Gleitflugpolaren zeigt aber, daß die Auftriebsvermehrung durch den Einfluß des Schraubenstrahls im allgemeinen wesentlich über das Maß hinausgeht, das aus der Vermehrung der axialen Zusatzgeschwindigkeiten und der Veränderung der wirksamen Anstellung der Profile zu erwarten ist, und zwar auch dann, wenn man die Verhältnisse bei dem oben betrachteten Einrollen der Wirbelbänder und die Vermehrung der axialen Zusatzgeschwindigkeiten infolge des Unterdrucks durch die Schraubenstrahldrehung berücksichtigt.

Zur weiteren Erforschung des tatsächlichen Verhaltens müssen zwei Wege eingeschlagen werden:

1. Die Feststellung und unter Umständen die Analyse der Turbulenz im Schraubenstrahl, und zwar in der Abhängigkeit vom Belastungsgrad und Fortschrittsgrad und von der Entfernung hinter der Schraube.

2. Die Untersuchung des Verhaltens von Profilen im Windstrom in Abhängigkeit von der Turbulenz.

Allerdings besitzen die bisher gebauten Windkanäle verschiedenen Turbulenzgrad, wie sich durch Bestimmung der kritischen Kennzahl $\mathfrak{R}_{kr}$ von Kugeln zeigen ließ. Durch ähnliche Versuche wurde auch der Turbulenzgrad der freien Atmosphäre bestimmt, und zwar ergab

sich erfreulicherweise, daß dieser klein ist und nahezu gleich dem des großen Windkanals der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL), so daß die Meßergebnisse in diesem Kanal die Verhältnisse außerhalb des Schraubenstrahls und im Fluge vermutlich recht gut wiedergeben. Für systematische Versuche ist es aber wünschenswert, in einer geeigneten Weise die Turbulenz des gleichen Kanals weitgehend und beliebig ändern zu können.

Abb. 365. Einfluß der Turbulenz auf $dc_a/d\alpha_\infty$, erläutert an Meßergebnissen im V. D. K. des NACA und im G. W. K. der DVL, welche verschiedene Turbulenz besitzen.

Welcher Einfluß durch die Turbulenzänderung aber zu erwarten ist, läßt sich schon an den Meßreihen an den Profilen NACA 2409 bis 2424 beurteilen, welche sowohl im Veränderliche-Dichte-Kanal des NACA wie im großen Windkanal der DVL durchgeführt wurden. Die Ergebnisse der Untersuchung sind nach Umrechnung auf die Verhältnisse bei ebener Profilströmung in Abb. 365 und 366 dargestellt. Die Turbulenz des NACA-Kanals ist erheblich anders ($\mathfrak{R}_{k_r} = 1{,}2 \cdot 10^5$) als die des DVL-Kanals ($\mathfrak{R}_{k_r} = 3{,}7 \cdot 10^5$). Bei gleichen Anstellwinkeln ist im NACA-Kanal der Auftrieb größer und der Neutralpunkt weiter hinten gelegen als im DVL-Kanal. Insbesondere wird der Einfluß auf den Auftrieb mit zunehmender Dicke des Profils immer größer, womit sich, da im allgemeinen gerade die dicksten Flügelteile im Schraubenstrahl liegen, die große Auftriebserhöhung im Schraubenstrahl zwanglos erklärt.

Abb. 366. Einfluß der Turbulenz auf dc_m/dc_a, erläutert an Meßergebnissen im V.D.K. des NACA und im G.W.K. der DVL, welche verschiedene Turbulenz besitzen.

Sowohl Widerstandsänderung wie Druckpunktverlagerung dürften neben der Auftriebsverteilung und der Erhöhung von $c_{a\max}$ noch Beachtung verdienen. Es sei bemerkt, daß die Druckpunktverlagerung unmittelbar durch eine einfache Beziehung mit der Auftriebsveränderung zusammenhängt [Lit. 297].

Kennt man aber einmal die Änderung von $dc_a/d\alpha$ infolge der Schraubenstrahlturbulenz, so kann man diese dadurch berücksichtigen, daß man zunächst den zu untersuchenden Tragflügel schon in ungestörter Strömung so durchrechnet, als wäre sein $dc_a/d\alpha$ das erst unter Einfluß des Schraubenstrahls zustande kommende.

47. Der Abwind unter Einfluß von Tragflügel und Luftschraube.

a) Der Beitrag des Höhenleitwerkes zur statischen Längsstabilität. Die Wirksamkeit des Höhenleitwerkes ist durch die Strömungsverhältnisse in Nähe dieses Leitwerkes bedingt. Es arbeitet zumeist im Abwindfelde des Tragflügels und liegt häufig ganz oder zu seinem größten Teil im Schraubenstrahl. Die Vorausberechnung dieser Strömungsverhältnisse ist daher äußerst verwickelt und das Folgende muß mehr als Beschreibung der Vorgänge denn als genaue Rechnung gewertet werden. Diese Berechnung darf höchstens als erste, aber immerhin brauchbare Grundlage zur Beurteilung eines Neuentwurfes dienen, welche durch den Flugversuch noch bestätigt bzw. verbessert werden muß.

Um die Längsstabilität im Motorfluge beurteilen zu können, muß der Beitrag des Höhenleitwerkes zur statischen Längsstabilität bekannt sein. Der Beitrag des Höhenleitwerkes ΔH_{cm} zum Längsmoment ergibt sich aus

$$\zeta_H \cdot c'_{a\,H} \cdot \alpha_H \cdot q_H \cdot F_H \cdot l_H = \Delta H_{\text{cm}} \cdot q_0 \cdot F \cdot t\,.$$

Hierbei ist

l_H = steuernde Länge des Höhenleitwerkes,

$c'_{a\,H}$ = Anstieg des Auftriebsbeiwertes des in homogener Strömung allein gemessenen Höhenleitwerks,

ζ_H = Einbaugütegrad, der unter Umständen die durch den Rumpf hervorgerufene Strömungsunsymmetrie und die Inhomogenität zu berücksichtigen hat.

Damit erhält man

$$\Delta H_{\text{cm}} = \zeta_H \cdot \frac{q_H}{q_0} \cdot c'_{a\,H} \cdot \alpha_H \cdot \frac{F_H \cdot l_H}{F \cdot t}\,. \tag{47, 1}$$

Der Anstellwinkel α_H des Höhenleitwerkes mit der Fläche F_H ergibt sich bei festem Ruder aus dem Anstellwinkel des Flugzeugs, dem Einstellwinkel γ_H des Höhenleitwerkes und dem durch Tragflügel und Schraube bedingten Abwindwinkel α_w am Orte des Leitwerks, also

$$\alpha_H = \alpha + \gamma_H - \alpha_w\,.$$

$\zeta_H \cdot \frac{q_H}{q_0}$ faßt man als Wirkungsfaktor η_H zusammen.

Der Stabilitätsbeitrag des Höhenleitwerkes ist somit allgemein bei festem Ruder

$$\frac{d}{d\alpha}(\Delta H_{\text{cm}}) = c'_{a\,H} \cdot \frac{F_H \cdot l_H}{F \cdot t} \cdot \left(\eta_H \cdot \frac{d\,\alpha_H}{d\alpha} + \alpha_H \frac{d\,\eta_H}{d\alpha}\right)$$

oder mit

$$\alpha_H = \alpha + \gamma_H - \alpha_w$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\Delta H_{\rm cm}) = c'_{\alpha H} \cdot \frac{F_H \cdot l_H}{F \cdot t} \cdot \left\{\eta_H \left(1 - \frac{d\alpha_w}{d\alpha}\right) + \frac{d\eta_H}{d\alpha} \cdot (\alpha - \alpha_w + \gamma_H)\right\}. \quad (47,2)$$

Wir wollen uns hier auf die sich hierbei ergebende strömungstechnische Aufgabe beschränken. Sie besteht in der Bestimmung von

$$\alpha_w = f_1(\alpha, \lambda),$$
$$\eta_H = f_2(\alpha, \lambda),$$

woraus sich dann

$$\frac{d\alpha_w}{d\alpha} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\alpha} \quad (47,3)$$

und

$$\frac{d\eta_H}{d\alpha} = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\alpha} \quad (47,4)$$

berechnen lassen. α_w und η_H hängen nämlich selbstverständlich im allgemeinen sowohl von α wie von λ ab.

Die Verhältnisse bei losem Ruder sind ähnlich zu erfassen, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll, da sie auf die gleichen strömungstechnischen Aufgaben führen. Die flugmechanische Aufgabe besteht in der Ermittlung des Zusammenhanges zwischen α und λ und in der Durchführung der eigentlichen Stabilitätsuntersuchung [Lit. 179].

Zunächst wollen wir uns mit den Zusammenhängen beschäftigen, durch welche der Anstellwinkel α_w bedingt ist und im Anschluß daran noch kurz auf den Wirkungsfaktor η_H eingehen.

b) Der Anteil des vom Schraubenstrahl unbeeinflußten Tragflügels am Abwind. Solange der Abwind hinter einem Tragflügel allein und ohne Schraubenstrahl betrachtet wird, sind die Verhältnisse noch ziemlich einfach zu übersehen. Die Größe des Abwindwinkels α_w hinter einem Tragflügel kann mit Hilfe der Tragflügeltheorie berechnet werden. Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt nur in der Unsicherheit bezüglich des Verhaltens der freien Wirbel hinter dem Tragflügel. Wenn der Ort der Wirbel festliegt, ist es eine an sich einfache Integrationsaufgabe, den durch den Tragflügel erzeugten Abwind an jeder Stelle zu bestimmen, vorausgesetzt, daß die Zirkulationsverteilung bekannt ist bzw. abgeschätzt werden kann. Es genügt meist, zwei Grenzfälle zu betrachten, nämlich den der ebenen freien Wirbelfläche und den der zu zwei Einzelwirbeln aufgerollten Wirbelfläche. Ist im ersteren Fall der Abwindwinkel α_{w_1} und im zweiten α_{w_2}, so liegt der wirkliche praktisch dazwischen. Der Vergleich mit Versuchsergebnissen ist befriedigend. Es soll hier aber darauf verzichtet werden, darauf näher einzugehen [Lit. 178, 281, 284, 286].

Wichtig ist für uns aber, daß am Orte der Schraube durch den Tragflügel ebenfalls die Anströmrichtung gestört ist. Dort ist im allgemeinen ein negativer Abwind, d. h. also ein Aufwind, vorhanden. Genügt eine überschlägige Abschätzung nicht, wie sie auf Grund der

ebenen Profilumströmung für den Ort der Schraube möglich ist (vgl. Abschnitt 40c), so muß man nach der Theorie der tragenden Linie auf Grund der Zirkulationsverteilung rechnen. Man kann den Abwind des von der Schraube nicht beeinflußten Tragflügels in zwei Anteile zerlegen. Der eine Anteil $\alpha_{w_{00}}$ entspricht der Verwindung $\alpha_0(y)$ des Tragflügels, gemessen von der Schraubenachse aus, und ist von der Anstellung unabhängig, der andere Anteil $\alpha_{w_{10}}$ ist dann verhältig der Anstellung α der Schraubenachse. Wir können also schreiben

H) am Orte des Leitwerks ($x = x_H$)

$$\alpha_{w_0/H} = \alpha \cdot C_{10/H} + C_{00/H}, \tag{47,5}$$

S) am Orte der Schraube ($x = x_S$)

$$\alpha_{w_0/S} = \alpha \cdot C_{10/S} + C_{00/S}. \tag{47,6}$$

c) Der Anteil der vom Tragflügel unbeeinflußten Schraube am Abwind. Würde der Tragflügel die Strömung nicht beeinflussen und würde die Schraubenachse in die Flugrichtung fallen, wäre also der Anstellwinkel der Schraube $\alpha = 0$, so würde, abgesehen von der Schraubenstrahldrehung, die Richtung der Anströmung des Leitwerks ungestört sein. Nur die Größe der Anströmgeschwindigkeit wäre infolge des erzeugten Schubs $S = c_s \frac{\varrho}{2} v_0^2 \cdot F_s$ mit $s = \left(\sqrt{1 + c_s} - 1\right)$ das $(1 + s)$fache der Fluggeschwindigkeit v_0, soweit das Leitwerk im Innern des Schraubenstrahls liegt.

Hat dagegen die Luftschraube eine Anstellung α (vgl. Abb. 367), so wirkt auf sie nicht nur ein Schub, sondern auch noch eine Querkraft. Die von der Schraube der Luft erteilte Zusatzgeschwindigkeit hat somit nicht die Richtung der Schraubenachse, sondern ist gegen sie um einen im allgemeinen kleinen Winkel $\Delta\alpha$ geneigt. Die Neigung der Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl gegen die Anströmrichtung ist also $\alpha + \Delta\alpha$. Hierbei ist

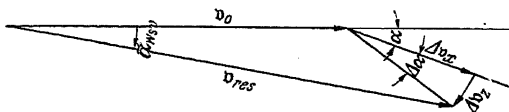



Abb. 367. Abwindwinkel des vom Tragflügel unbeeinflußten Schraubenstrahls.

$$\Delta\alpha = \frac{k_z}{k_x}; \qquad \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\varkappa_z}{k_x} \qquad (k_z = \varkappa_z \cdot \alpha).$$

Ist $\Delta v_x = s \cdot v_0$ die in Richtung der Schraubenachse erteilte Zusatzgeschwindigkeit, so ergibt sich für die endgültige Neigung des Schraubenstrahls gegen die Flugrichtung der in Abb. 367 dargestellte Winkel $\tilde{\alpha}_{w_s v}$. Entsprechend dieser Abbildung ist

$$\tilde{\alpha}_{w_s v} = \left(\alpha + \frac{k_z}{k_x}\right) \frac{\Delta v}{v + \Delta v} \approx \alpha \cdot \frac{c_s}{2} \cdot \left(1 + \frac{\varkappa_z}{c_s \cdot \lambda^2}\right). \tag{47,7}$$

Dies gilt im Innern des Schraubenstrahls. Im Äußern gilt für diesen schrägangeblasenen Schraubenstrahl entsprechend den bei der Untersuchung der Schräganblasung gefundenen Erkenntnissen

$$\tilde{\alpha}_{w_s v} = -\left(\alpha + \frac{k_z}{k_x}\right)\frac{\Delta v}{v + \Delta v}\cdot\left(\frac{R}{y}\right)^2 \approx -\alpha\cdot\frac{c_s}{2}\left(1 + \frac{\varkappa_z}{c_s\cdot\lambda^2}\right)\left(\frac{R}{y}\right)^2. \qquad (47,8)$$

Hierbei ist $\varkappa_z = k_z/\alpha$ der bei kleiner Anstellung die Querkraft kennzeichnende Koeffizient. Wäre die Schraube nicht nur angestellt, sondern würde sie auch noch eine Drehung mit der Drehschnelle ω_z um die Querachse ausführen, so müßte an Stelle von $\varkappa_z$ die Größe

$$\varkappa_z + \frac{\frac{\omega_z}{\omega_p}}{\alpha}$$

treten. Diese Richtung hat der Schraubenstrahl aber erst in einiger Entfernung hinter der Schraube. Im allgemeinen darf man mit ihr aber in Nähe des Leitwerks und vielfach auch schon in Nähe des Tragflügels rechnen. Interessant ist, daß

$$\frac{\varkappa_z + \frac{\frac{\omega_z}{\omega_p}}{\alpha}\cdot\dot{\varkappa}_z}{c_s\cdot\lambda^2}$$

von der Größenordnung 1 ist, woraus sich ergibt, daß Anstellung und Drehung um die Hochachse von erheblichem Einfluß auf den Schraubenabwind sind. Zu diesem symmetrischen Abwind kommt noch der unsymmetrische Einfluß des Dralls. Im Innern des Schraubenstrahls ist dieser

$$\tilde{\alpha}_{w_s d} = \frac{\Gamma_s}{2\pi\cdot y\cdot v_0}$$

oder mit $\Gamma_s = s\cdot\frac{2\pi}{\eta\cdot\omega}\cdot v_0^2$

$$\tilde{\alpha}_{w_s d} = s\cdot\frac{v_0}{y\cdot\eta\cdot\omega}. \qquad (47,9)$$

Im Äußern des Schraubenstrahls ist $\tilde{\alpha}_{w_s d} = 0$. Schreiben wir nun im Innern

$$C_{s v/H} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varkappa_z + \frac{\frac{\omega_z}{\omega_p}}{\alpha}\cdot\dot{\varkappa}_z}{c_s\cdot\lambda^2}\right), \qquad (47,10)$$

$$C_{s d/H} = \frac{v_0}{y\cdot\eta\cdot\omega}, \qquad (47,11)$$

bzw. im Äußeren

$$C_{s v/H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{R}\right)^2\left(1 + \frac{\varkappa_z + \frac{\frac{\omega_z}{\omega_p}}{\alpha}\cdot\dot{\varkappa}_z}{c_s\cdot\lambda^2}\right), \qquad (47,12)$$

$$C_{s d/H} = 0, \qquad (47,13)$$

wenn die Schraubenstrahlachse das Leitwerk trifft, so ist

$$\tilde{\alpha}_{w_s/H} = \tilde{\alpha}_{w_s\nu/H} + \tilde{\alpha}_{w_s d/H} = \alpha \cdot s \cdot C_{s\nu/H} + s \cdot C_{s d/H}. \qquad (47,14)$$

d) Die Veränderungen des Abwindes infolge der gegenseitigen Beeinflussung von Schraube und Tragflügel. Unter dem Einfluß des Schraubenstrahls wird die Zirkulationsverteilung des Tragflügels geändert. Dies hat zur Folge, daß der Abwind am Orte des Leitwerks bzw. der Aufwind am Orte der Schraube ebenfalls geändert werden. Die Schraube werde dabei infolge des Zusammenwirkens unter dem Winkel α_s angeströmt. Den Abwind $\alpha_{w\,\text{zus}} = \alpha_{wa} + \alpha_{w\nu} + \alpha_{wd}$ infolge der geänderten Zirkulationsverteilung dürfen wir dann in folgende drei Anteile zerlegen, welche alle $s = (\sqrt{1 + c_s} - 1)$ verhältig sind:

H) am Orte des Leitwerks

1. Zur Berücksichtigung der axialen Zusatzgeschwindigkeit

$$\alpha_{wa/H} = \alpha \cdot s \cdot C_{1\,a/H} + s \cdot C_{0\,a/H}. \qquad (47,15)$$

2. Zur Berücksichtigung der Schräganblasung der Schraube

$$\alpha_{w\nu/H} = \alpha_s \cdot s \cdot C_{\nu/H}. \qquad (47,16)$$

3. Zur Berücksichtigung des Dralls der Schraube

$$\alpha_{wd/H} = s \cdot C_{d/H}. \qquad (47,17)$$

S) am Orte der Schraube

1. Zur Berücksichtigung der axialen Zusatzgeschwindigkeit

$$\alpha_{wa/S} = \alpha \cdot s \cdot C_{1\,a/S} + s \cdot C_{0\,a/S}. \qquad (47,18)$$

2. Zur Berücksichtigung der Schräganblasung der Schraube

$$\alpha_{w\nu/S} = \alpha_s \cdot s \cdot C_{\nu/S}. \qquad (47,19)$$

3. Zur Berücksichtigung des Dralls

$$\alpha_{wd/S} = s \cdot C_{d/S}. \qquad (47,20)$$

Nun ist

$$\alpha_s = \alpha + \alpha_{w_{10}/S} + \alpha_{w_{00}/S} + \alpha_{wa/S} + \alpha_{w\nu/S} + \alpha_{wd/S},$$

$$\alpha_s(1 - s \cdot C_{\nu/S}) = \alpha(1 + C_{10/S}) + \alpha \cdot s \cdot C_{1\,a/S} + s(C_{0\,a/S} + C_{d/S}) + C_{00/S},$$

also

$$\alpha_s = \frac{\alpha(1 + C_{10/S}) + \alpha \cdot s \cdot C_{1\,a/S} + s(C_{0\,a/S} + C_{d/S}) + C_{00/S}}{1 - s \cdot C_{\nu/S}}. \qquad (47,21)$$

oder unter Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung s^2 usw. mit $\frac{1}{1 - s \cdot C_\nu} = 1 + s \cdot C_\nu$,

$$\alpha_s = \alpha(1 + C_{10/S}) + \alpha \cdot s \cdot \{C_{1\,a/S} + C_{\nu/S} \cdot (1 + C_{10/S})\}$$
$$+ s(C_{0\,a/S} + C_{d/S} + C_{\nu/S} \cdot C_{00/S}) + C_{00/S}. \qquad (47,22)$$

e) Der Abwind am Orte des Leitwerks. Beachtet man nun noch, daß der Anstellwinkel der Schraube infolge der Rückwirkung des

Zahlentafel 18. Übersicht über die für den Abwind am Leitwerk maßgeblichen Koeffizienten.

		Index S: Abwind am Orte der Schraube	Index H: Abwind am Orte des Leitwerkes	
Tragflügel allein	α Anstellung der Schraubenachse gegen Flugrichtung	$\alpha_{w_{10}/S} = \alpha \cdot C_{10/S}$	$\alpha_{w_{10}/H} = \alpha \cdot C_{10/H}$	
	α_0 Verwindung gegen Schraubenachse	$\alpha_{w_{00}/S} = C_{00/S}$	$\alpha_{w_{00}/H} = C_{00/H}$	
Schraube allein	$v_a/v_0 = s = \sqrt{1 + c_s} - 1$ axiale Geschwindigkeitsvermehrung innerhalb des Strahls	—	—	Erhöhung des Staudruckes im Schraubenstrahl
	$v_u/v_0 = s \cdot \frac{v_0}{\eta \cdot \omega \cdot y}$ Drallwinkel innerhalb des Strahles	—	$\alpha_{w_{sd}} = s \cdot C_{sd/H}$	
	α Anstellung der Schraubenachse gegen Flugrichtung		$\alpha \cdot s \cdot \frac{1}{2}(1 + \varkappa/c_s \cdot \lambda^2) = \alpha_{w_{s\nu}} = \alpha \cdot s \cdot C_{s\nu/H}$	
Änderung durch Zusammenwirken von Schraube u. Tragflügel	wegen axialer Zusatzgeschwindigkeit für α	$\alpha \cdot s \cdot C_{1a/S}$	$\alpha \cdot s \cdot C_{1a/H}$	Verringerung des Staudruckes wegen Reibungsverluste am Rumpf und Tragflügel
	wegen axialer Zusatzgeschwindigkeit für α_0	$s \cdot C_{0a/S}$	$s \cdot C_{0a/H}$	
	wegen Drall	$s \cdot C_{d/S}$	$s \cdot C_{d/H}$	
	wegen Schräganblasung	$\alpha_S \cdot s \cdot C_{\nu/S}$	$\alpha_1 \cdot s \cdot C_{\nu/H}$	
Schraube und Tragflügel zusammen		Σ_1	Σ_2	
Schraube im Felde des Tragflügels	α_S Anstellung der Schraubenachse gegen die Strömung	$\alpha_S = \alpha + \Sigma_1$	$\alpha_w + \Sigma_2$	

$$\alpha_S = \alpha\{1 + C_{10/S}\} + \alpha \cdot s \cdot \{C_{1a/S} + C_{\nu/S} \cdot (1 + C_{10/S})\} + s\{C_{0a/S} + C_{d/S} + C_{\nu/S} \cdot C_{00/S}\} + C_{00/S},$$
$$\alpha_w = \alpha C_{10/H} + \alpha \cdot s\{(1 + C_{10/S})(C_{s\nu/H} + C_{\nu/H}) + C_{1a/H}\} + s\{C_{00/S}(C_{s\nu/H} + C_{\nu/H}) + C_{sd/H} + C_{0a/H} + C_{d/H}\} + C_{00\nu/H}.$$

Innerhalb des Strahles	Außerhalb des Strahles
$C_{s\nu} = \frac{1}{2}(1 + \varkappa/c_s \cdot \lambda^2)$	$-\frac{1}{2}(1 + \varkappa/c_s \cdot \lambda^2) \cdot (R/y)^2$
$C_{sd} = v_0/\eta \cdot \omega \cdot y$	0

s, $C_{s\nu/H}$ und $C_{sd/H}$ sind von λ und damit von α abhängig, die übrigen Koeffizienten C sind durch die Tragflügeltheorie zu erfassen und für das betreffende Flugzeug nicht von α abhängig.

Tragflügels statt α nunmehr α_s ist, so ist der von der Anstellung α_s der Schraube am Orte des Leitwerks hervorgerufene Abwind

$$\alpha_{w_s/H} = \alpha_s \cdot s \cdot C_{s\nu/H} + s \cdot C_{s\,d/H}\,. \tag{47,23}$$

Damit ist der gesamte Abwind am Orte des Leitwerks

$$\alpha_w = \alpha \cdot C_{10/H} + C_{00/H} + \alpha_s \cdot s \cdot C_{s\nu/H} + s \cdot C_{s\,d/H} + \alpha \cdot s \cdot C_{10/H} + s \cdot C_{00/H} + \alpha_s \cdot s \cdot C_{\nu/H} + s \cdot C_{d/H}\,, \tag{47,24}$$

oder mit Benutzung der für α_s gefundenen Beziehung unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung s^2 usw.

$$\alpha_w = \alpha \cdot C_{10/H} + \alpha \cdot s \cdot \{(1 + C_{10/S}) \cdot (C_{s\nu/H} + C_{\nu/H}) + C_{1a/H}\} + s\{C_{00/S} \cdot (C_{s\nu/H} + C_{\nu/H}) + C_{s\,d/H} + C_{0a/H} + C_{d/H}\}. \tag{47,25}$$

Somit ist die Aufgabe erfüllt und α_w als Funktion von α und λ bestimmt, wenn s bzw. c_s in Abhängigkeit von λ bekannt ist.

s, $C_{s\nu}$, $C_{s\,d}$ sind von λ und damit von α abhängig. Die übrigen Koeffizienten C sind durch die Tragflügeltheorie zu erfassen und für ein bestimmtes Flugzeug von α nicht abhängig.

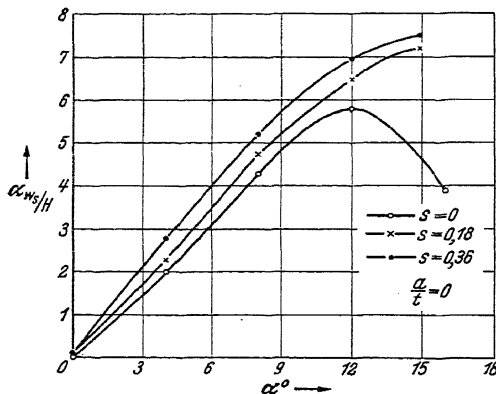



Abb. 368. Der Abwindwinkel am Höhenleitwerk für verschiedene axiale Zusatzgeschwindigkeiten im Schraubenstrahl [Lit. 172].

Zur besseren Übersicht wurden die für den Abwind maßgeblichen Koeffizienten in der Zahlentafel 18 nochmals zusammengestellt. Zu ihrer Berechnung hat man zunächst die Zirkulationsverteilung am Tragflügel auch unter Einfluß des Schraubenstrahls zu bestimmen, wie dies für den Sonderfall des Tragflügels konstanter Tiefe und unendlicher Spannweite schon im Abschnitt 46 geschehen ist.

Daß die Änderung des Abwindwinkels infolge der axialen Zusatzgeschwindigkeit im gesunden Strömungsbereich praktisch linear mit der Zusatzgeschwindigkeit s und der Anstellung α erfolgt, ist an einem von STÜPER im Windkanal erhaltenen Versuchsergebnis, das in Abb. 368 dargestellt ist, leicht zu erkennen. Sobald durch den Schraubenstrahl bei genügend großem s bewirkt ist, daß die Strömung am Tragflügel nicht mehr abreißt, gilt dies auch für recht große Anstellungen.

f) Die Änderung des Abwindwinkels mit der Anstellung. Die Koeffizienten $C_{s\nu}$ und $C_{s\,d}$ sind vom Fortschrittsgrad λ der Schraube abhängig, ebenso $s = v_a/v_0 = \left(\sqrt{1 + c_s} - 1\right)$. Da aber λ selbst wieder vom

Anstellwinkel abhängig ist, so muß hierauf bei der Differentation von α_w geachtet werden.

Die Koeffizienten $C_{/H}$ bzw. $C_{/S}$ sind über die Spannweite des Leitwerks bzw. über den Durchmesser der Schraube im allgemeinen veränderlich. Bezüglich der Koeffizienten $C_{/S}$ dürfte es genügen, mit ihrem Wert in Schraubenkreismitte zu rechnen. Bezüglich der Koeffizienten $C_{/H}$ dürfte jedoch unter Umständen nicht immer eine Mittelwertbildung ausreichen, so daß das Leitwerk in einzelne Streifen zerlegt gedacht werden müßte, deren Wirkung einzeln durchzurechnen wären. Doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

Die Änderung des Abwindwinkels mit der Anstellung ist somit:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_w}{d\alpha} &= C_{10/H} + s\{(C_{\nu/H} + C_{s\nu/H})\cdot(1 + C_{10/S}) + C_{1a/H}\} \\ &+ \frac{ds}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{d\alpha}[\alpha\{(C_{\nu/H} + C_{s\nu/H})(1 + C_{10/S}) + C_{1a/H}\} \\ &+ (C_{\nu/H} + C_{s\nu/H})\cdot C_{00/S} + C_{sd/H} + C_{0a/H} + C_{d/H}] \\ &+ \frac{dC_{w/H}}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{d\alpha}[s\cdot\{\alpha(1 + C'_{10/S}) + C_{00/S}\}] + \frac{dC_{sd}}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{d\alpha}\cdot s. \qquad (47,26)\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist solange richtig, wie $ds/d\alpha$ sehr klein und von der Größenordnung s ist, so daß $s\cdot ds/d\alpha$ vernachlässigt werden darf.

g) Der Staudruck im Schraubenstrahl unter Einfluß der im Schraubenstrahl liegenden Teile des Flugzeugs. Nachdem nun im Prinzip beschrieben wurde, wie der Abwindwinkel in Nähe des Leitwerks unter dem Einfluß von Tragflügel und Schraube berechnet werden kann, soll noch einiges gesagt werden über die Größe des Staudrucks q_H der Strömung in der Umgebung des Leitwerks.

Würden sich im Schraubenstrahl keine Widerstand hervorrufenden Teile des Flugzeugs befinden, dann wäre der Staudruck im Innern des Schraubenstrahls bei gleichmäßiger Verteilung der Zusatzgeschwindigkeit gegeben durch

$$q_{Hi} = \frac{\varrho}{2}\cdot(v_0 + v_a)^2 = q_0\left(1 + \frac{v_a}{v_0}\right)^2 = q_0(1 + c_s).$$

Somit wäre

$$\frac{q_{Hi}}{q_0} = 1 + c_s.$$

Der schädliche Widerstand der im Schraubenstrahl liegenden Teile sei bei Fehlen des Schraubenstrahls W_{Str}. $c_{w_{Str}} = \dfrac{W_{St}}{\frac{\varrho}{2}v^2\cdot F}$ ist abhängig vom Anstellwinkel. Wenn der dem Widerstandsanteil W_{Str} entsprechende Impulsverlust sich gleichmäßig über den Schraubenstrahl

verteilen würde, so wäre mit Berücksichtigung des Widerstandsanteils W_{Str}

$$\frac{q_{Hi}}{q_0} = (1 + c_s) \cdot \left(1 - \frac{F}{F_s} c_{w_{\text{Str}}}(\alpha)\right). \qquad (47, 27)$$

Ist weder der Schraubenschub noch der Impulsverlust gleichmäßig verteilt, so ist entsprechend allgemein örtlich

$$\frac{q_{Hi}}{q_0} = \left(1 + \frac{\Delta q_s}{q_0}\right) \cdot \left(1 - \zeta \frac{\Delta q_{w_{\text{Str}}}}{q_0}\right),$$

wobei ζ eine Hilfsgröße von der Größenordnung 1 bedeutet. Gelingt es $c_{w_{\text{Str}}}(\alpha)$ abzuschätzen, so ist damit auch eine Abschätzung für q_{Hi}/q_0 gefunden.

Würde ein Höhenleitwerk der Fläche F_H mit einem Flächenanteil F_{Ha} außerhalb in der ungestörten Strömung liegen, so wäre das mittlere auf das Leitwerk wirkende Staudruckverhältnis

$$\frac{q_H}{q_0} = \frac{F_{Ha} + \frac{q_{Hi}}{q} \cdot F_{Hi}}{F_H} = 1 + \left(\frac{q_{Hi}}{q} - 1\right) \cdot \frac{F_{Hi}}{F_H},$$

die relative Staudruckerhöhung also

$$\frac{\Delta q_H}{q_0} = \frac{q_H}{q_0} - 1 = \left(\frac{q_{Hi}}{q_0} - 1\right) \cdot \frac{F_{Hi}}{F_H} = \left\{c_s - \frac{F}{F_s}(1 + c_s) \cdot c_{w_{\text{Str}}}(\alpha)\right\} \cdot \frac{F_{Hi}}{F_H}. \qquad (47, 28)$$

Diese Abschätzung kann jedoch nur einen Mittelwert darstellen für die möglichen Lagen, welche das Leitwerk gegenüber dem Schraubenstrahl einnehmen kann. Besondere Ungleichförmigkeiten, wie sie z. B. durch den Nachlauf hinter dem Flügel gegeben sind, werden dabei keinesfalls berücksichtigt. Hierzu müßte der obige Ansatz für ungleichförmige Verteilung auch für das Äußere angewandt werden. Wir begnügen uns im folgenden aber mit der obigen Abschätzung.

h) Einbaugütegrad des Leitwerks. Der oben eingeführte Einbaugütegrad ζ_H müßte für $q_H/q = 1$ und gleichförmige Strömung $\zeta_H = 1$ sein. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, erscheint es zweckmäßig, bei den q_H/q beeinflussenden Größen c_s und $c_{w_{\text{Str}}}$ selbst entsprechende Einbaufaktoren ζ_{H_1} bzw. ζ_{H_0} anzubringen. Während ζ_H von dem durch α und λ gekennzeichneten Flugzustand immer stark abhängen dürfte, ist anzunehmen, daß für ein bestimmtes Flugzeug ζ_{H_0} und ζ_{H_1} praktisch als Konstante angesetzt werden dürfen. Wir schreiben daher für den im Innern des Schraubenstrahls gelegenen Teil des Leitwerks in sinngemäßer Erweiterung der Gleichung (47, 27) für den Wirkungsfaktor

$$\eta_{Hi} = \zeta_H \cdot \frac{q_H}{q} = (1 + \zeta_{H_1} \cdot c_s(\alpha, \lambda)) \cdot \left(1 - \zeta_{H_0} \cdot \frac{F}{F_s} \cdot c_{w_{\text{Str}}}(\alpha)\right), \qquad (47, 29)$$

wobei ζ_{H_0} die Ungleichförmigkeiten bei fehlender Schraube und ζ_{H_1} die Veränderungen infolge der Schraube berücksichtigen sollen. Im allgemeinen dürfte $\zeta_H < 1$ und damit $\zeta_{H_1} < 1$ und $\zeta_{H_0} > 1$ sein.

Diese Einbaufaktoren erscheinen in mancher Beziehung zum Verständnis der Vorgänge am Leitwerk geeigneter als ζ_H. Für übliche Leitwerksanordnungen dürfte unter Berücksichtigung üblicher Unsymmetrie und Inhomogenität

$$\zeta_{H_0} \approx 1{,}1 \text{ bis } 1{,}3\,, \qquad \zeta_{H_1} \approx 0{,}60 \text{ bis } 0{,}70$$

sein.

Eine genauere und möglichst auch theoretische Festlegung von ζ_{H_0} und ζ_{H_1} ist aber wünschenswert.

Bei einem von HELMBOLD beschriebenen Versuch hatte $c_{w_{\mathrm{Str}}}$ ungefähr den in Abb. 369 dargestellten Verlauf. F/F_s war dabei $\approx 4{,}30$.

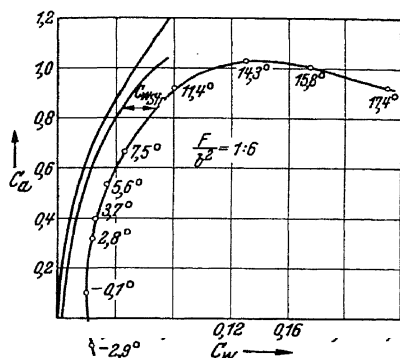



Abb. 369. Darstellung des Zusatzwiderstandes der im Schraubenstrahl liegenden Flugwerkteile durch die Polare.

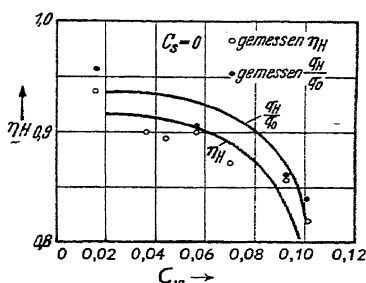



Abb. 370. Staudruckverhältnis $\frac{q_H}{q_0}$ am Leitwerk und Wirkungsfaktor $\eta_{H\beta}$ des Leitwerks ohne Schraubenstrahl.

Die von HELMBOLD bei Änderung der Nullanstellung des Leitwerks mit Hilfe der Änderung des Höhenruderausschlages angegebenen Versuchswerte $\eta_{H\beta}$ ohne Schraubenstrahleinfluß sind in Abb. 370 wieder-

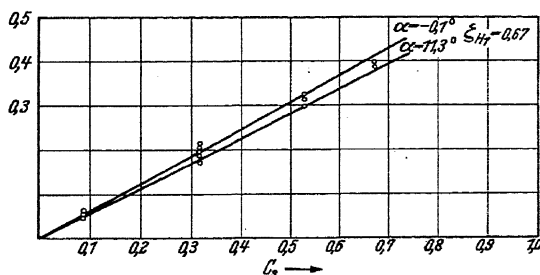



Abb. 371. Einfluß des Schraubenstrahls auf den Wirkungsfaktor $\eta_{H\beta}$ des Leitwerks.

gegeben. Das mit $\zeta_{H_0} = 1{,}3$ ermittelte $\eta_{H\beta}$ ergibt eine befriedigende Übereinstimmung. Die Änderung $\Delta\eta_{H\beta}$ des Wirkungsfaktors unter Einfluß des Schraubenstrahls wird mit diesem $\zeta_{H_0} = 1{,}3$ und mit

$\zeta_{H'} = 0{,}67$ ebenfalls befriedigend für die Gesamtheit der Versuche interpoliert, wie Abb. 371 zeigt. In Abb. 371 sind nur die errechneten Geraden für $\alpha = -0{,}1^\circ$ und $\alpha = 11{,}3^\circ$ angegeben, die Meßpunkte lagen innerhalb dieses Bereiches [Lit. 179].

i) Bemerkungen bezüglich der Deformation und des seitlichen Abwanderns des Schraubenstrahls. Die rechnerische Erfassung des Abwindes ist nur dann möglich, wenn der Ort der vom Tragflügel abgehenden Wirbelfläche und des Schraubenstrahls in bezug auf das Leitwerk bekannt ist. Die Absenkung der Wirbelfläche ist nicht allzu schwer zu erfassen. Der Schraubenstrahl wird aber ebenfalls abgesenkt und zudem noch seitlich verschoben. Die Absenkung, die der Schrauben-

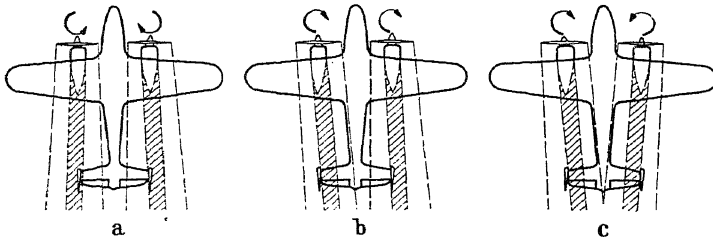



Abb. 372. Einfluß des Drehsinnes der Luftschrauben eines zweischraubigen Tiefdeckers auf die seitliche Auswanderung des Schraubenstrahls.

strahl bei alleinigem Vorhandensein erfahren würde, wird aber zum größten Teil durch den Einfluß des Tragflügels wieder aufgehoben, so daß man bezüglich der Absenkung praktisch so rechnen darf, als würde diese durch den Tragflügel allein hervorgerufen. Anders ist dieses mit der seitlichen Ablenkung. Diese hat hauptsächlich zwei Ursachen. Wird der Schraubenstrahl durch den Tragflügel geschnitten, so wird bei einer rechtsdrehenden Schraube infolge der Tangentialgeschwindigkeiten im Schraubenstrahl die obere Hälfte nach rechts, die untere nach links verschoben.

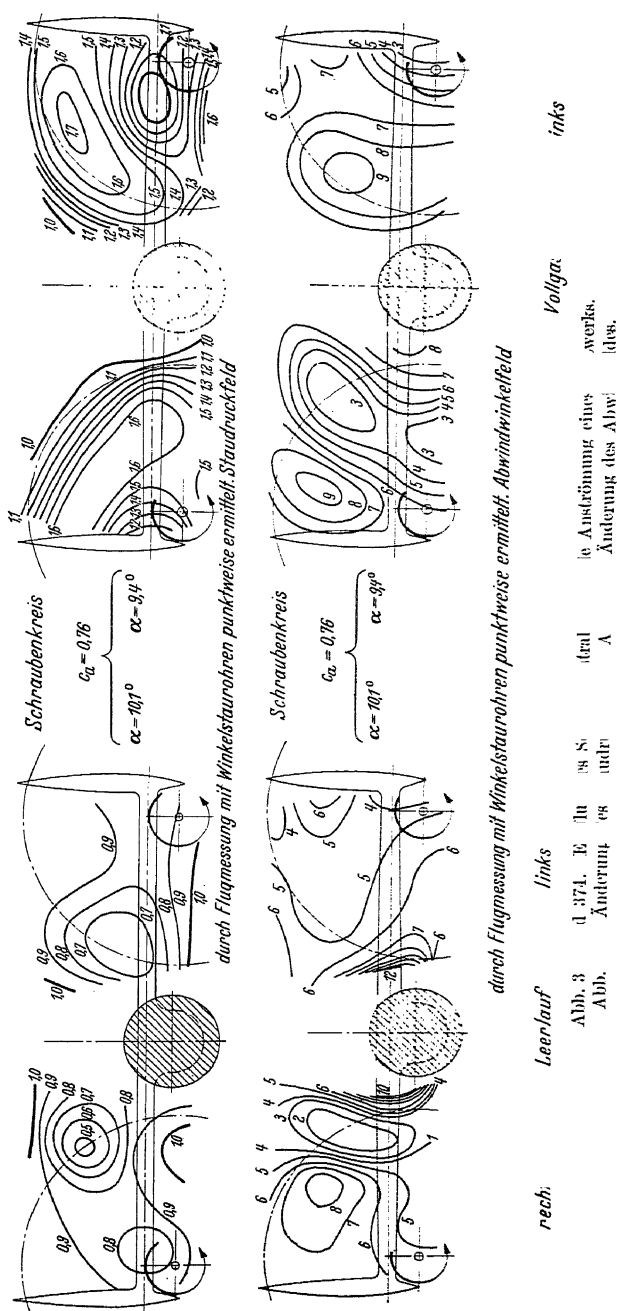
Der gesamte Schraubenstrahl wird aber noch infolge eines anderen Einflusses seitlich abgelenkt. Durch die Zirkulation um den Tragflügel wird, wenn die Schraube vor dem Tragflügel angebracht ist, die Durchflußgeschwindigkeit in der unteren Schraubenkreishälfte vermindert, in der oberen vermehrt. Die Strömungsverhältnisse in der Schraubenkreisebene werden somit so abgeändert, wie das bei einer freifliegenden Schraube geschieht, wenn sie sich um eine horizontale Querachse dreht, und zwar im Sinne einer Anstellungsverminderung. Dabei entsteht eine Seitenkraft, welche bei rechtsdrehender Schraube nach rechts, bei linksdrehender nach links gerichtet ist. Nach dem Impulssatz wird somit der Schraubenstrahl bei rechtsdrehender nach

links, bei linksdrehender Schraube nach rechts abgelenkt. Wie ersichtlich, wirken die beiden genannten Einflüsse in der oberen Hälfte des Schraubenstrahls in entgegengesetzter, in der unteren Hälfte in gleicher Richtung; dabei wird der erste Einfluß gegenüber dem zweiten bei den üblichen Abständen von Schraube und Tragflügel vorherrschend sein, wie es auch bei dem Beispiel (Abb. 372) eines zweischraubigen Tiefdeckers, wo der obere Teil des Schraubenstrahls ausgemessen wurde, versuchsmäßig für die Fälle

a) beide Schrauben innen abwärts schlagend,

b) beide Schrauben rechtsläufig,

c) beide Schrauben innen aufwärts schlagend,

festgestellt wurde. In Abb. 373 und 374 sind die Strömungsverhältnisse kurz vor dem Leitwerk, wie sie durch Messungen für den gleichen Tiefdecker ermittelt wurden, wiedergegeben, und zwar für den Fall der leerlaufenden Schrauben und für den Fall der gleichlaufenden Schrauben.

Anhang.

I. Übersicht über durchgeführte Luftschraubenversuche.

1. Berichte über Versuche, die den Einfluß der Schraubenabmessungen (Steigung, Blattbreite, Blattdicke usw.) behandeln.

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
	NACA Tech. Rep.:										
1	Nr. 14 (1917)	Experimental research on Air propellers. Part I	Durand	51	2	0,914	0,5 bis 0,9	0,075 bis 0,100	0,075 bis 0,120	0,10 bis 0,15	Nr. 1–5: Auswertung siehe NACA Tech. Rep. Nr. 175, Nr. 186, ZAHJ Nr. 45
2	Nr. 30 (1919)	Experimental research on Air propellers. Part II	Durand u. Lesley	99	2	0,914	0,5 bis 1,9	0,071 bis 0,100	0,071 bis 0,120	0,10 bis 0,15	
3	Nr. 64 (1920)	Experimental research on Air propellers. Part III	Durand u. Lesley	28	2	0,914	0,5 bis 1,3	0,075 bis 0,100	0,075 bis 0,120	0,15 bis 0,17	
4	Nr. 109 (1921)	Experimental research on Air propellers. Part IV	Durand u. Lesley	10	2	0,914	0,3 bis 1,3	0,075 bis 0,100	0,075 bis 0,120	0,10 bis 0,15	
5	Nr. 141 (1922)	Experimental research on Air propellers. Part V	Durand u. Lesley	88	2	0,914	0,3 bis 1,3	0,072 bis 0,100	0,072 bis 0,120	0,10 bis 0,15	
6	Nr. 237 (1926)	Tests on thirteen navy type model propellers	W. F. Durand	13	2	0,914	0,5 bis 1,1	0,057 bis 0,085	0,070 bis 0,100	0,113 bis 0,145	Nr. 6–7: NACA Tech. Not. Nr. 235 bis 236
7	Nr. 326 (1929)	Tests of five metal model propellers with various pitch distributions in a free wind stream and in combination with a model Ve-7 fuselage	Lesley u. Elliot G. Reid	5	2	0,914	0,69 bis 0,79	0,058	0,067	0,076	
8	Nr. 339 (1929)	Full scale windtunnel tests with a series of propellers of different diameters on a single fuselage	E. Weick	4	2	2,718 bis 3,175	0,65	0,057	0,067	0,10	
9	Nr. 340 (1929)	Full scale windtunnel tests on several metal propellers, having different blade forms	E. Weick	5	2	2,718 bis 2,921	0,64 bis 0,65	0,056 bis 0,064	0,067 bis 0,074	0,064 bis 0,086	

10	Nr. 351 (1929)	Full scale windtunnel tests of a propeller with the diameter changed by cutting of the blade tips	H. WOOD	5	2	3,05 bis 2,44	0,5 bis 1,2	0,055 bis 0,082	—	0,065 bis 0,078
11	Nr. 378 (1930)	Comparison of full-scale propellers having R.A.F.-6 and Clark Y airfoil sections	HUGH B. FREEMAN	6	2	2,896	0,45 bis 1,15	0,057	0,067	0,06 bis 0,10
12	Nr. 292 (1928)	Characteristics of five propellers in flight	CROWLEY u. MIXSON	5	2	2,489	0,53 bis 0,66	0,071	0,083	0,093 bis 0,16
13	Nr. 594 (1937)	Characteristics of six propellers including the high-speed range	THEODORSEN STICKLE, BREVOORT	6	2, 3	3,050	0,8 bis 2,6 (geschränkt)	0,06	0,07	0,07 bis 0,09
14	Nr. 640 (1938)	The aerodynamic characteristics of full-scale propellers having 2, 3, and 4 blades of Clark Y and R.A.F. 6 airfoil sections	HARTMANN u. BIERMANN	7	2, 3 4	3,050	0,8 bis 2,6 (geschränkt)	0,06 bis 0,09	0,07 bis 0,11	0,10
15	Nr. 643 (1938)	The aerodynamic characteristics of four full-scale propellers having different plan forms	HARTMANN u. BIERMANN	4	2	3,050	0,8 bis 1,8 (geschränkt)	0,06 bis 0,07	0,075 bis 0,105	0,07 bis 0,10
16	Nr. 650 (1939)	The aerodynamic characteristics of six full scale propellers having different airfoil sections	BIERMANN u. HARTMANN	6	3	3,050	0,6 bis 2,1 (geschränkt)	0,065	0,075	0,09
17	Nr. 658 (1939)	Tests of two fullscale propellers with different pitchdistributionsat blade angles up to 60°	BIERMANN u. HARTMANN	2	3	3,050	0,4 bis 4,4	0,07	0,08	0,09
18	NACA Tech. Not.: Nr. 246 (1926)	Tests on a model propeller with symmetrical blade sections	E. P. LESLEY	1	2	0,914	0,89	0,076	0,089	0,13
19	Nr. 333 (1930)	Tests of an adjustable pitch model propeller ad four blade settings	E. P. LESLEY	1	2	0,914	0,48 bis 1,14 (geschränkt)	0,058	0,067	0,076

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
20	ARC Rep. Mem.: Nr. 442 (1918)	Dependence of the efficiency of an airscrew on the speed of rotation and the diameter with a direct reference to the question of engine gearing	FAGE u. COLLINS	8	2, 4	2,743 bis 3,048	0,71 bis 1,66	0,074 bis 0,089	0,079 bis 0,089	0,089 bis 0,130	
21	Nr. 829 (1922)	Experiments with a family of airscrews mounted in front of a small body Part I	FAGE	26	2, 3 4, 6	0,914	0,3 bis 1,5 (konst.) 0,29 bis 1,72 (geschränkt)	0,038 bis 0,110	0,041 bis 0,123	0,11	Auswertung s. ARC Rep. Mem. Nr. 892 u. ZAHJ Nr. 45; Teil II, III, IV siehe unter 2
22	Nr. 870 (1923)	Full scale determination of the characteristics of a variable pitch airscrew	F. W. MEREDITH	1	2	2,388	0,60 bis 0,76	0,089	0,089	0,14	
23	Nr. 1153 (1928)	Experiments with the family of airscrews in free air at zero advance	TOWNEND, WALKER u. WARSAP	12	2, 4	0,914	0,3 bis 1,5	0,038 bis 0,110	0,041 bis 0,123	0,11	
24	Nr. 1673 (1935)	Windtunnel tests of high pitch airscrews. Part I	LOCK, BATEMAN u. NIXON	10	2, 4	0,914	0,3 bis 2,5	0,076	0,082	0,11	Erweiterung zu Rep. Mem. Nr. 829
25	Nr. 1729 (1936)	Windtunnel tests of high pitch airscrews. II. Variations of blade width and blade section	LOCK u. BATEMAN	26	2, 3 4, 6	0,914	0,5 bis 2,2	0,056 bis 0,150	0,062 bis 0,160	0,11 bis 0,13	(Erweiterung zu Rep. Mem. Nr. 829)
26	ZAHJ Nr. 129 (1932)	Effect of profile shape and blade thickness on airscrew performance	KOUZMIN u. CHALEZOW	8	2	2,50	0,8 bis 1,04 (geschränkt)	0,064	0,080	0,12 bis 0,16	Vgl. auch ZAHJ Nr. 79 und 85 Blattzahl 2, 3, 4
27	Mitt. Versuchsanst. f. Wasserbau u. Schiffbau Heft 2 (1923)	Systematische Luftpropellerversuche.	SCHAFFRAN	15	2, 3 4	0,12	0,4 bis 1,2	0,068 bis 0,112	0,075 bis 0,125	—	

28	Service des Recherches de l'aéronautique (1933)	Catalogue d'essais d'hélices. Fascicule Nr. 1	MICHEAU	18	2, 3 4	1,50	0,52 bis 3,13	0,095	0,100	0,12	
29	Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Teil I, S. 404	Standschubmessungen an großen Schrauben	F. WEINIG	37	2, 3	1,6 bis 3,8	0,5 bis 1,4	0,04 bis 0,10	—	—	
30	Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Teil I, S. 341	Systematische Windkanalmessungen an Modelluftschrauben (DVL-Serie)	DIRKSEN	13	2, 3 4	0,80	0,31 bis 4,24	0,035 bis 0,070	0,040 bis 0,093	0,08 bis 0,15	

2. Berichte über Versuche, die den Einfluß von Widerstandskörpern hinter der Schraube behandeln.

31	NACA Tech. Rep.: Nr. 220 (1926)	Comparison of tests on airplane propeller in flight with windtunnel model tests on similar forms	DURAND u. LESLEY	5	2	2,388 bis 2,591	0,6 bis 0,8	0,057 bis 0,085	0,066 bis 0,100	0,15	Auswertung s. NACA Tech. Not. Nr. 225
32	Nr. 235 (1926)	Interaction between air propellers and airplane structures	DURAND	2	2	0,610	0,7 bis 0,9	0,076	0,089	0,10	
33	Nr. 301 (1929)	Full scale tests of wood propellers on a Ve-7 airplane in the propeller research tunnel	E. WEICK	3	2	2,388 bis 2,591	0,6 bis 0,8	0,072	0,082	0,15	
34	Nr. 306 (1929)	Full scale windtunnel tests of a series of metal propellers on a Ve-7 airplane	E. WEICK	1	2	2,72	0,49 bis 1,20	0,059	0,068	0,085	
35	Nr. 326 (1929)	Tests of five metal model propellers with various pitch distributions in a free windstream and in combination with a model Ve-7 fuselage	LESLEY u. ELLIOT G. REID	5	2	—	—	—	—	—	Näheres siehe unter 1.

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
36	NACA Tech. Rep.: Nr. 338 (1930)	The effect of reduction gearing on propeller body interference as shown by full scale windtunnel tests	F. E. Weick	2	2	2,718 bis 3,175	0,65 bis 1,0	0,058	0,068	0,082	
37	Nr. 415 (1931)	Tests of nacelle-propeller combinations in various positions with reference to wings. Part I	D. H. Wood	1	2	1,219	0,68 bis 0,90	0,057	0,067	0,082	
38	Nr. 436 (1932)	Tests of nacelle-propeller combinations in various positions with reference to wings. Part II	D. H. Wood	1	2	1,219	0,68	0,057	0,067	0,082	
39	Nr. 462 (1933)	Tests of nacelle-propeller combinations in various positions. Part III Clark-Y, various radial engine cowlings, tractor propeller	D. H. Wood	1	2	1,219	0,68	0,057	0,067	0,082	
40	Nr. 505 (1934)	Wie vor. Part IV	James G. Mc Hugh	1	2	1,219	0,68	0,057	0,067	0,082	
41	Nr. 506 (1934)	Wie vor. Part V	E. Floyd Valantine	1	2	1,219	0,68	0,057	0,067	0,082	
42	Nr. 507 (1934)	Wie vor. Part VI	D. H. Wood u. Bioletti	1	2	1,219	0,68	0,057	0,067	0,082	
43	Nr. 564 (1936)	Tests of a wing-nacelle-propeller combination at several pitch settings up to 42°	Ray Windler	1	2	1,219	0,68 bis 1,99	0,057	0,067	0,082	
44	Nr. 569 (1936)	Wing-nacelle-propeller interference for wings of various spans. Force and pressure distribution tests	Robinson u. Herrnstein	1	2	1,219	0,68	0,057	0,067	0,082	

45	Nr. 592 (1937)	Full-scale tests of NACA cowlings	THEODORSEN BREVOORT u. STICKLE	1	3	—	1,2	—	—	—	
46	Nr. 593 (1937)	Cooling of airplane engines at low air speeds	THEODORSEN BREVOORT u. STICKLE	6	2, 3	3,050	0,42 bis 2,36 (geschränkt)	0,06	0,07	0,10	
47	Nr. 596 (1937)	Cooling tests of a single-Row radial engine with Several NACA cowlings	BREVOORT, STICKLE u. ELLERBROCK	2	3	—	—	—	—	—	
48	Nr. 642 (1938)	Tests of five full-scale propellers in the presence of a radial and a liquid-cooled engine nacelle, including tests of two spinners	BIERMANN u. HARTMAN	5	3	3,050	0,8 bis 2,6 (geschränkt)	0,06	0,07	0,07	
49	NACA Tech. Not.: Nr. 245 (1926)	Reports on tests of metal model propellers in combination with a Ve-7 airplane	E. P. LESLEY	3	2, 3	0,914	—	—	—	—	
50	Nr. 322 (1929)	The effect of the wings of single engine airplanes on propulsive efficiency as shown by full scale windtunnel tests	WEICK u. WOOD	1	2	2,743	0,65 bis 1,00	0,058	0,068	0,082	
51	Nr. 453 (1933)	Experiments with a counter propeller	E. P. LESLEY	1	2	0,914	1,0	0,071	0,090	0,11	Untersuchung einer 2 fl. Schraube mit einer 4 fl. Schraube als Leitapparat
52	ARC Rep. Mem.: Nr. 264 (1916)	Tests on five model airscrews and an experimental investigation of the interferences between these airscrews and a model of the end of the whirling arm at the Royal Aircraft Factory	FAGE u. COLLINS	5	2, 4	0,610 bis 0,700	0,64 bis 1,03	0,074 bis 0,095	0,078 bis 0,100	0,075 bis 0,15	Auswertung s. ARC Rep. Mem. Nr. 458

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
53	ARC Rep. Mem.: Nr. 572 (1919)	An investigation of the mutual interference of two model airscrews and a model of the Sopwith Dophin aeroplane	FAGE u. HANKINS	2	2	0,838 bis 0,860	0,86 bis 1,15	0,084 bis 0,088	0,087 bis 0,089	0,135 bis 0,139	
54	Nr. 591 (1919)	Some experiments with models of an airscrew, a Rotary BR 2 engine, two different types of engine cowling and a body of the Snipe Aeroplane	FAGE u. COLLINS	1	2	0,927	0,91	0,083	0,086	0,12	
55	Nr. 682 (1920)	On the modification of the performance of an airscrew due to the propinquity of a plane surface, also experiments *with the same airscrew* when mounted behind a model of a power car of airship R 32	A. FAGE	1	2	5,182	0,66	0,086	0,087	0,12	
56	Nr. 829 (1922)	Experiments with a family of airscrews mounted in front of a small body. Part I	A. FAGE	26	2, 3 4, 6	—	—	—	—	—	Näheres unter l. Auswertung s. ARC Rep. Mem. Nr. 892
57	Nr. 830 (1922)	Experiments of airscrews with tractor and pusher bodies. Part II	A. FAGE	3	2, 4	0,914	0,7 bis 1,5 (konst.)	0,076	0,082	0,11	Auswertung s. ARC Rep. Mem. Nr. 1046
58	Nr. 1030 (1926)	On the effect of placing an airscrew in various positions within the nose of a streamline body. Part IV	BATEMAN, TOWNEND u. KIRKUP	1	4	0,914	0,7	0,076	0,082	0,11	Auswertung s. ARC Rep. Mem. Nr. 1046 u. 1120 ZAHJ Nr. 213
59	Nr. 919	The effect of wind tunnel	LOCK u.	1	4	0,489	0,7	0,076	0,082	0,11	Erweiterung s.

	(1924)	interference on a combination of airscrew and tractor body	Bateman								ARC Rep. Mem. Nr. 921
60	Nr. 1230 (1929)	Pressure plotting a streamline body with tractor airscrew running. Part I	Lock, Johansen u. Mech	1	4	0,489	0,7	0,076	0,082	0,11	
61	Nr. 1284 (1929)	Pressure plotting a streamline body with airscrew running. Part II. Airscrew on the rear position	Lock, Johansen u. Mech	1	4	0,914	0,7	0,076	0,082	0,11	
62	Nr. 1380 (1930)	Pressure and force measurements on airscrew body combinations	Bateman u. Johansen	1	4	0,489	0,7	0,076	0,082	0,11	Auswertung s. ZAHJ Nr. 213
63	Nr. 1495 (1932)	Improvement of airscrew — body performance by radial vanes	Johansen	1	4	0,489	0,7	0,076	0,082	0 11	Untersuchung über die Wirkung von Leitapparaten auf die Kennlinien von Luftschrauben
64	Nr. 1512 (1932)	Effekt of tractor airscrew on body-wing interference	Ower, Warden u. Jones	1	4	0,489	0,7	0,076	0,082	0,11	
65	Nr. 1736 (1936)	Wind tunnel tests to determine the efficiency of an airscrew working in front of a thick section wing	Bottee u. Callen	1	2	0,500	0,81 auf 0,75 R	—	—	—	
66	ZAHJ Nr. 134 (1932)	Influence of a thick wing on airscrew performance	Egorow	4	2	0,40 bis 0,70	1,0	0,076	0,082	0,11	Holzschrauben vor einem dicken Tragflügel

3. Berichte über Versuche, die den Einfluß der Blattspitzengeschwindigkeit auf die Kennlinien behandeln.

67	NACA Tech. Rep.: Nr. 302 (1929)	Full scale tests on a thin metal propeller at various tip speeds	E. Weick	1	2	2,870	0,28	0,058	0,068	0,083	

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
68	NACA Tech. Rep.: Nr. 375 (1931)	Full scale tests of metal propellers at high tip speed	D. H. Wood	10	2	2,743 bis 2,896	0,29 bis 0,40	0,056 bis 0,058	0,067	0,060 bis 0,100	Auswertung s. ZAHJ Nr. 132
69	Nr. 639 (1938)	The effect of compressibility on eight full-scale propellers operating in the take off and climbing range	Biermann u. Hartman	8			2,93 bis 3,35	0,6 bis 1,0 (geschränkt)	0,05 bis 0,09	0,06 bis 0,10	
70	ARC Rep. Mem.: Nr. 596 (1919)	Preliminary report of experiments on a high tip speed airscrew at zero advance	Lynam	1	2	2,743	0,39	0,074	0,078	0,20	
71	Nr. 884 (1922/23)	The effect of tip speed on airscrew performance. An experimental investigation of the performance of an airscrew over a range of speed of revolution from "Model" speeds up to tip speeds in excess of the velocity of sound	O. P. Douglas u. R. Mck Wood	1	2	0,610	0,53	0,083	0,084	0,098	
72	Nr. 1086 (1927)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. The characteristics of the aerofoil section R. A. F. 31, 9 at high speeds	Douglas u. Perring	2	2	0,610	0,49 bis 0,70	0,050	0,089 (an d. Nabe)	0,13	
73	Nr. 1091 (1927)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. The characteristics of a biconvex aerofoil at high speeds	Douglas u. Perring	2	2	0,610	0,33 bis 0,53	0,050	0,089 (an d. Nabe)	0,13	
74	Nr. 11[illegible]	Wind tunnel tests with	Douglas	2	2	0,610	0,34	0,050	0,054	0,10	

[illegible]	[illegible] (1927)	[illegible] high tip speed airscrews. The characteristics of biconvex Nr. 2 aerofoil section at high speeds	[illegible] u. Perring				bis 0,56			
75	Nr. 1124 (1928)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. The characteristics of a conventional airscrew section, aerofoil R & M 322 Nr. 2 at high speeds	Douglas u. Perring	1	2	0,610	0,33 bis 0,56	0,050	0,054	0,10
76	Nr. 1134 (1928)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. The characteristics of airscrew section R & M 322 No. 4 and R. A. F. 32	Perring	2	2	0,610	0,26 bis 0,58	0,050	0,054	0,13
77	Nr. 1173 (1929)	Full scale determination of the effect of high tip speeds on the performance of an airscrew.	W. C. Jennings	1	2	2,591	—	0,052	—	0,088
78	Nr. 1174 (1928)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. Some experiments upon an airscrew of conventional blade section aerofoil R&M 322 No. 3 at high speeds	Douglas u. Perring	1	2	0,610	0,27 bis 0,34 (geschränkt)	0,083	0,083	0,10
79	Nr. 1198 (1928)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. The characteristics of a conventional airscrew section; 0,082c thick and of R.A.F. 27 and R.A.F. 28	Douglas u. Perring	3	2	0,610	0,35 bis 0,72 (geschränkt)	0,049 bis 0,050	0,053 bis 0,054	0,082 bis 0,098
80	Nr. 1272 (1929)	Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. Experimental investigation of blade twist under load	Douglas u. Perring	5	2	0,610	0,32 bis 0,72	0,049 bis 0,083	0,053 bis 0,083	0,082 bis 0,100

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
81	ARC Rep. Mem.: Nr. 1282 (1929)	Full scale experiments on high tip speed airscrews. Comparative performance trials of three airscrews of different sections	W. G. JENNINGS	3	2	2,591	0,56 bis 0,69	0,060 bis 0,075	0,086 bis 0,110	0,10 bis 0,12	
82	Nr. 1339 (1930)	Full scale experiments on high tip speed airscrews. The effect of section on airscrew performance	JENNINGS u. ORMEROD	3	2	2,667	0,56 bis 1,01	0,052 bis 0,056	0,083 bis 0,087	0,06 bis 0,10	
83	Nr. 1417 (1932)	Scale effect on high tip speed airscrews	HARTSHORN u. DOUGLAS	2	2	0,610 bis 0,914	0,33 bis 0,56	0,049	0,054	0,10	
84	Nr. 1438 (1931)	Wind tunnel experiments on high tip speed airscrews	HARTSHORN u. DOUGLAS	3	2	0,610	0,41 bis 0,69	0,050	0,0536 bis 0,0541	0,06 bis 0,10	
85	ZAHJ Nr. 158 (1933)	Prüfung von Luftschrauben bei großer Umfangsgeschwindigkeit	B. W. EGOROW	9	2.	2,20	0,16	0,072	0,093	0,12 bis 0,17	
86	Nr. 177 (1935)	Investigation of airscrew series CDB 2	G. J. KOUSMIN	10	2	2,50	0,5 bis 1,4	0,083	0,103	0,17	

4. Berichte über Versuche mit gegenläufigen und Tandem-Luftschrauben.

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
87	NACA Tech. Rep.: Nr. 505 (1934)	Tests of nacelle-propeller combinations in various positions with reference to wings. IV	JAMES G. MCK. HUGH	2	2	—	—	—	—	—	Dicke Tragflügel, verschiedene Motoren und hintereinanderliegende gegenläufige Schrauben. Näheres unter 2.
88	NACA Tech. Not.: Nr. 677 (1938)	Tests of a contra-propeller for aircraft	W. M. BENSON			—	—	—	—	—	
	ARC Rep. Mem.:										

89	Nr. 605 (1918)	Some further experiments on tandem airscrews	FAGE u. COLLINS	5	2, 4	2,972 bis 3,962	0,65 bis 1,05	0,071 bis 0,083	0,089 bis 0,110	0,11	5 Schrauben in 4 verschiedenen Kombinationen. hintereinander angeordnet, untersucht
90	Nr. 887 (1923)	Experiments with a close tandem airscrew pair	LYNAM	1	2	3,30	0,85	0,077	0,084	0,11	
91	Nr. 919 (1924)	The effect of wind tunnel interference on a combination of airscrew and tractor body	LOCK u. BATEMAN	1	4	—	—	—	—	—	Tandemschrauben! Näheres unter 2.
92	Mitt. Versuchsanst. Wasserb. Schiffb. (1923)	Systematische Luftpropellerversuche. II. Teil	SCHAFFRAN	15	2, 3 4	—	—	—	—	—	Als Tandem- und als gegenläufige Schrauben untersucht. Näheres unter I. Auswertung s. NACA Tech. Not. Nr. 158

5. Berichte über Versuche mit schräg angeblasenen Luftschrauben.

93	NACA Tech. Rep.: Nr. 113 (1921)	Tests on air propellers in yaw	DURAND u. LESLEY	12	2	0,914	0,3 bis 0,7	0,075 bis 0,100	0,075 bis 0,120	0,10 bis 0,15	
94	Nr. 389 (1931)	The effect of small angles of yaw and pitch on the characteristics of airplane propellers	HUGH B. FREEMAN	2	2	1,219 bis 2,743	0,65 bis 1,00	0,058	0,067	0,082	
95	Nr. 597 (1937)	Air propellers in yaw	LESLEY, WORLEY u. STANLEY MOY	1	2	0,914	0,69 bis 1,24	0,058	0,067	0,076	
96	ARC Rep. Mem.: Nr. 123 (1914)	Experiments on model propellers at the National Physical Laborat.	BRAMWELL u. FAGE	1	4	0,610	0,7	0,064	0,069	0,090	
97	Z. Flugtechn. Bd. 20 (1929) S. 370	Experimentelle Untersuchungen an schräg angeblasenen Schraubenpropellern	FLACHSBARTH u. KRÖBER	2	2	0,320	0,2 bis 0,5	0,074	0,086	0,15	

Lfd. Nr.	Veröffent-licht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durch-messer m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
		6. Berichte über sonstige Versuche.									
98	NACA Tech. Rep.: Nr. 220 (1926)	Comparison of tests on airplane propellers in flight with wind tunnel model tests on similar forms	DURAND u. LESLEY	5	2	—	—	—	—	—	Vergl. v. Flug- mit Windkanalversuchen. Näheres unter 2.
99	Nr. 301 (1929)	Full scale tests of wood propellers on a Ve-7 airplane in the Propeller Research Tunnel	E. WEICK	3	2	—	—	—	—	—	Näheres unter 2.
100	Nr. 421 (1932)	Measurements of the differential and total thrust and torque of six full scale adjustable-pitch propellers	GEORGE W. STICKLE	6	2	2,896	0,28 bis 1,15	0,057	0,067	0,06 bis 0,10	
101	Nr. 464 (1933).	Negative thrust and torque characteristics of an adjustable-pitch metal propeller	EDWIN P. HARTMAN	1	2	1,219	0,28 bis 0,09	0.057	0,067	0,082	
102	Nr. 526 (1935)	Noise from two blade propellers	STOWELL u. DEMING	1	2	2,591	0,29	0,057	0,067	0,066	
103	Nr. 641 (1938)	The negative thrust and torque of several full-scale propellers and their application to various flight problems	HARTMAN u. BIERMANN	6	2, 3 4	3,050	0,1 bis 1,2 (geschränkt)	0,06	0,07	0,10	
104	Nr. 644 (1938)	The torsional and bending deflection of full-scale aluminum-alloy propeller blades under normal operating conditions	HARTMAN u. BIERMANN	3	2, 3	3,050	0,63 bis 0,46	0,06	0,07	0,06 bis 0,09	

NACA

105	Tech. Not.: Nr. 275 (1928)	Determination of propeller deflection by means of stativ load tests on models	E. WEICK	1	2	0,610	—	—	—	—	
106	ARC Rep. Mem.: Nr. 279 (1916)	An investigation of the strength of two airscrews for F. E. 2B	A. FAGE	2	4	2,667 bis 2,743	0,49 bis 0,76	0,075 bis 0,080	0,083	0,091 bis 0,102	
107	Nr. 704 (1920)	Comparative performance of various airscrews for S. E. 5a with Wolseley viper engine	STEVENS u. LYNAM	10	2	2,210 bis 2,438	0,74 bis 0,98	0,058 bis 0,100	0,068 bis 0,108	0,11 bis 0,18	Auswertung s. NACA Tech. Rep. Nr. 183
108	Nr. 719 (1921)	The veneering of airscrew blades for transverse strength	LYNAM	12	2	2,438	0,96	0,079	0,083	0,082	Schleuderversuche!
109	Nr. 871 (1923)	The effect of a large boss on airscrew performance	A. FAGE	3	2, 4	—	0,3 bis 1,5	—	—	—	
110	Nr. 885 (1923)	Some experiments on airscrews at zero torque with applications to a helicopter descending with engine "off" and to the design of windmills	LOCK u. BATEMAN	a) 2 b) 1	2, 4 2	0,914	0,3 —	0,076 0,069 (über r konst.)	0,082 0,069	0,11 0,0609	Schraube a) 2- und 4 flügl. bei $k_d = 0$; Schraube b) (Steigungswinkel über R konst.) bei Winkeln von $-2°$ bis $+7°$ gegen die Schraubenkreisfläche unters.
111	Nr. 953 (1924)	Experiments to verify the independence of the elements of an airscrew blade	LOCK, BATEMAN u. TOWNEND								
112	Nr. 967 (1925)	An experimental study of the vibrations in the blades and shaft of an airscrew	A. FAGE	4	4, 6	0,914	0,3 bis 0,7	0,038 bis 0,076	0,041 bis 0,082	0,11	
113	Nr. 992 (1925)	The measurement of torque grading along an airscrew blade	DOUGLAS u. COOMBES	2	2, 4	0,610 0,538	0,6 bis 1,2	0,083 —	0,084 —	0,098 —	
114	Nr. 1014 (1925)	An extension of the vortex theory of airscrews with applications to airscrews of small pitch, including experimental results	LOCK, BATEMAN u. TOWNEND	2	2, 4	0,914	0,3	0,069 0,076	0,069 0,082	0,061 0,11	Die 2 flügl. Schraube ist im Umriß rechteckig und unverwundeter Anstellwinkel zur Schraubenkreisfläche $-4°, 0°, +4°$

Lfd. Nr.	Veröffentlicht	Titel	Verfasser	Anzahl der untersuchten Schrauben	Blattzahl	Durchmesser m	H/D auf 0,7 R	t/D auf 0,7 R	t_{max}/D	d/t auf 0,7 R	Bemerkungen
115	ARC Rep. Mem.: Nr. 1137 (1927)	Tests of a metal airscrew in a closed tunnel for comparison with american tests in an open jet tunnel	Townend u. Warsap	1	2	0,914	0,69	0,081	0,123	0,11	
116	Nr. 1397 (1931)	Airscrews at negative torque	Lock u. Bateman	1	4	0,489	0,7	0,076	0,082	0,11	
117	Nr. 1417 (1932)	Scale effect on high tip speed airscrews	Hartshorn u. Douglas	2	2	—	—	—	—	—	Untersuchung des Maßstabeffektes bei Luftschrauben. Näheres unter 3.
118	ZAHI Nr. 47 (1930)	Experimental investigation on the performance of airscrews in autorotation	A. M. Isarkson	3	3	0,606	1,06 bis 0,07 für Schraube 1; −0,5 bis +0,07 für Schraube 3; bei Schraube 2 Anstellwinkel zur Schraubenkreisfläche über R konst., geschränkt von +6° bis −15°	0,080	0,086	0,053	Schrauben im Autorotationszustand untersucht. Besprechung ähnlicher Versuche anderer Länder. Ähnliche Versuche siehe: 1. NACA TN 221. 2. Baumhauer: Some Notes on Helicopters. (Proceedings of the first international congress for applied mechanics.) Delft 1924. S. 449—454. 3. Vorträge aus dem Gebiet der Aero- und Hydrodynamik. Innsbruck 1922, Berlin 1924 4. Ferrari: Esperience con elica autorotanta. Laboratoria di Aeronautica della R. Scuola de Jngegniera di Torino. Pisa 1927.
119	Nr. 175 (1934)	An investigation of the work of an airscrew with pitch variable in flight	D. V. Khalezov	4	2	2,5	0,51 bis 1,27	—	0,082	—	
120	California Institute of Technology. J. Aeron. Sci. Vol. 3 Nr. 7 (1936)	Characteristics of braked, locked and free wheeling two- and three- bladed propellers	Malina u. Jenney	1	2, 3	0,914	0,5 bis 2,7	0,056	0,067	0,067	

121	Rep. aeron. Res. Inst. Tokio Nr. 80 (1932)	Studies on the sounds emitted by revolving airscrews. Part II	OBATA, YOSIDA u. MORITA	6	2	0,75 bis 1,08	0,60 bis 0,94 (konst.) 0,31 bis 1,16 (geschränkt)	0,10 bis 0,16	0,11 bis 0,17	0,08 bis 0,19	
122	Nr. 99 (1933)	Investigations on the origin of the sounds emitted by revolving airscrews. Part I	OBATA, YOSIDA u. MORITA	2	2	0,750 bis 0,983	0,6 (konst.) 0,31 bis 1,16 (geschränkt)	0,10 bis 0,12	0,11 bis 0,15	0,08 bis 0,10	
123	Nr. 132 (1935)	Investigations on the origin of the sound emitted by revolving airscrews. Part II	OBATA, Y. YOSIDA u. U. YOSIDA	2	2	0,75 bis 0,98	0,85 (konst.) 0,72 bis 1,72 (geschränkt)	0,10 bis 0,12	0,11 bis 0,15	0,08 bis 0,10	
124	Nr. 134 (1936)	On the directional properties of airscrews sound	OBATA, Y. YOSIDA u. U. YOSIDA	5	2, 4	0,75 bis 0,98	—	0,10 bis 0,14	0,11 bis 0,17	0,08 bis 0,19	
125	Nr. 141 (1936)	On the relation between the performance and the loudness of sound of an airscrew	OBATA, KAWADA, Y. YOSIDA u. U. YOSIDA	2	2	0,98 bis 1,00	0,85 (konst.) 0,72 bis 1,72	0,10 bis 0,12	0,11 bis 0,15	0,08 bis 0,10	
126	Publ. sci. techn. Ministère de l'Air Nr. 73 (1935)	Etude de l'écoulement de l'air autour d'une hélice	JACQUES VALENSI	7	1, 2 3, 4	0,45	0,25 bis 1,35	0,078 bis 0,089	0,082 bis 0,100	0,11 bis 0,16	Untersuchung d. Luftströmungen um eine Schraube

II. Schrifttum über Luftschrauben und verwandte Gebiete.

Im folgenden ist Schrifttum über Luftschrauben und verwandte Gebiete zusammengestellt, und zwar nach sachlichen Gesichtspunkten angeordnet. Dabei wurde aber jede Arbeit nur einmal aufgeführt, und zwar unter jenem Sachgebiet, für das sie besonders wichtig erschien. Wenn dieses Schrifttumsverzeichnis auch ausführlich ist, so erhebt es doch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Weitere Schrifttumsangaben finden sich in den angeführten Arbeiten häufig selbst noch. Neben dem für den Flugzeugbau bestimmten Schrifttum, welches hier selbstverständlich zumeist berücksichtigt wurde, bietet insbesondere auch das Schrifttum des Schiffbaus noch eine Fülle von Arbeiten auf dem Gebiete der Schraube. Für Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Schraube kommen insbesondere in Betracht:

Abkürzung	
Abh. Aerodyn. Inst. Aachen	Abhandlungen aus d. Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen
Aero Dig.	Aero Digest, New York
Aeronaut. Engng.	Aeronautical Engineering, New York
Aéronautique	Aéronautique, Paris
Aerotecnica	Aerotecnica, Rom
Aeroplane	Aeroplane, London
Aircr. Engng.	Aircraft Engineering, London
Akust. Z.	Akustische Zeitschrift
Ala d'Ital.	Ala d'Italia, Mailand
Aviation, N. Y.	Aviation, New York
A. R. C. Rep. Mem.	Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda
Ber. Abh. wiss. Ges. Luftfahrt	Berichte und Abhandlungen der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, Berlin
C. R. Acad. Sci., Paris	Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris
Engineer, Lond.	Engineer, London
Engineering	Engineering, London
Ergebn. Aerodyn. Vers.-Anst. Göttingen	Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen
Flight	Flight, London
Flugsport	Flugsport, Frankfurt a. M.

Abkürzung	
Génie civ.	Génie civil, Paris
Ing. Arch.	Ingenieur-Archiv, Berlin
J. aeron. Sci.	Journal of Aeronautical Sciences, London
J. appl. Mech.	Journal of Applied Mechanics
Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf.	Jahrbuch der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin
Jb. Luftf.-Forschg.	Jahrbuch 1935 der Vereinigung für Luftfahrtforschung; Jahrbuch 1936 der Lilienthalgesellschaft für Luftfahrtforschung; Jahrbuch 1937 der Deutschen Luftfahrtforschung
Jb. schiffbautechn. Ges.	Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Berlin
Jb. wiss. Ges. Luftfahrt	Jahrbuch der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, Berlin
J. roy. aeron. Soc.	Journal of the Royal Aeronautical Society, London
Luftf.-Forschg.	Luftfahrtforschung, München
Luftwissen	Luftwissen, Berlin
Mech. Engng.	Mechanical Engineering, New York
Mitt. Versuchsanst. Wasserb. Schiffb.	Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau u. Schiffbau, Berlin

Abkürzung	
NACA Tech Not.	National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Notes
NACA Tech. Rep.	National Advisory Committee for Aeronautics, Report
Phil. Mag.	Philosophical Magazine and Journal of Science, London
Phys. Rev.	Physical Review, Lancaster, Pa.
Phys. Z. Sowjet.	Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Charkow
Publ. sci. techn. Ministère de l'Air	Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air
Proc. Cambridge Phil. Soc.	Proceedings of the Cambridge Philosophical Society
Proc. phys. Soc., London	Proceedings of the Physical Society, London
Proc. roy. Soc., London	Proceedings of the Royal Society, London
Rep. aeron. Res. Inst. Tokio	Report of the Aeronautical Research Institute Tokio
S. A. E. J.	S. A. E. Journal (Society of Automotive Engineers), New York
Schiffbau	Schiffbau, Schiffahrt und Hafenbau, Berlin
Schweiz. Bauztg.	Schweizerische Bauzeitung, Zürich

Abkürzung	
Techn. aéron.	Technique Aéronautique, Paris
Techn. d. Luftflotte, Mosk.	Technik der Luftflotte, Moskau
Trans. Amer. Soc. mech. Engrs.	Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, New York
Trans. Instn. naval. Archit.	Transactions of the Institution of Naval Architects, London
Werft, Reed., Hafen	Werft, Reederei, Hafen, Berlin
ZAHI.	Abhandlungen des Zentralen Aero-Hydrodynamischen Instituts, Moskau
Z. angew. Math. Mech.	Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik, Berlin
Z. Flugtechn.	Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, München
Z. ges. Turbinenw.	Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen
Z. öst. Ing.- u. Archit.-Ver.	Zeitschrift des österreichischen Ingenieur und Architekten-Vereins, Wien
Z. techn. Phys.	Zeitschrift für technische Physik. Leipzig
Z. VDI.	Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin

Von den aufgeführten Abkürzungen wurde auch in folgender Zusammenstellung Gebrauch gemacht. Versuchsberichte, welche in der hierfür besonders zusammengestellten Übersicht [Vers. 1—125] enthalten sind, wurden in das folgende [Lit. 1—296] nicht aufgenommen.

1. Zusammenfassende Arbeiten.

1. BORCK, H.: Die Luftschraube. Berlin 1939.
2. DRZEWIECKI, S.: Théorie Générale de l'Hélice Propulsive. Paris 1920.
3. EBERHARDT, C.: Theorie und Berechnung der Luftschraube. Berlin 1910.
4. FLACHSBART, O.: Luftschrauben. In W. WIEN u. F. HARMS: Handb. der Experimentalphysik Bd. 4 Tl. 3 S. 323. Leipzig 1930.
5. GLAUERT, H.: Airplane Propellers. In W. F. DURAND: Aerodynamic Theory Bd. IV/Tl. L S. 169. Berlin 1935.
6. HORN, F.: Schiffsschleppversuche. In W. WIEN u. F. HARMS: Handb. der Experimentalphysik Bd. 4 Tl. 3 S. 3. Leipzig 1930.

7. HORN, F.: Theorie des Schiffes. In F. AUERBACH u. W. HORT: Handb. der physik. u. techn. Mechanik Bd. 5 S. 552. Leipzig 1931.

8. MADELUNG, G.: Beitrag zur Theorie der Treibschraube. Luftf.-Forschg. Bd. 2 (1928) S. 111 — Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1928 S. 27.

9. WEICK, F. E.: Aircraft Propeller Designe. New York 1930.

2. Allgemeine strömungstechnische Grundlagen.

10. BETZ, A.: Tragflügel und Flügelräder. In Hütte, 26. Aufl. Bd. 1 S. 399. Berlin 1931.

11. BETZ, A.: Tragflügel und hydraulische Maschinen. In H. GEIGER u. K. SCHEEL: Handb. d. Physik Bd. 7 S. 256. Berlin 1927.

12. CHRISTIANI, K.: Experimentelle Untersuchung eines Tragflügelprofils bei Gitteranordnung. Luftf.-Forschg. Bd. 2 (1928) S. 91.

13. FUCHS, R.: Theorie der Luftkräfte. In R. FUCHS, L. HOPF, F. SEEWALD: Aerodynamik Bd. 1. Berlin 1935.

14. GECKELER, J.: Über Auftrieb und statische Längsstabilität von Flugzeugtragflügeln in ihrer Abhängigkeit von der Profilform. Z. Flugtechn. Bd. 13 (1922) S. 137.

15. GUTSCHE, F.: Einfluß der Gitterstellung auf die Eigenschaften der im Schiffsschraubenentwurf benutzten Blattschnitte. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 39 (1938) S. 125 — Mitt. Versuchsanst. Wasserb. Schiffb. 1938 Heft 14.

16. GLAUERT, H.: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Deutsch von H. HOLL. Berlin 1929.

17. GRAMMEL, R.: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917.

18. JAKOBS, E. N., K. E. WARD u. R. M. PINKERTON: The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-Density Wind Tunnel. NACA Tech. Rep. Nr. 460 (1935).

19. KUCHARSKI, W.: Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München 1918.

20. MÜLLER, W.: Die Ermittlung der Auftriebsinvarianten vorgegebener Profile. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) S. 397.

21. MÜLLER, W.: Über die Form- und Auftriebsinvarianten für eine besondere Klasse von Tragflügelprofilen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1934) S. 389.

22. PRANDTL, L., u. A. BETZ: Ergebn. Aerodyn. Vers.-Anst. Göttingen Lfg. I bis IV. München 1921—1932.

23. PRANDTL, L., u. O. TIETJENS: Hydro- und Aerodynamik. Berlin 1931.

24. WEINIG, F.: Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig 1935.

25. WEINIG, F.: Verwendung der Ergebnisse von Tragflügelmodellmessungen bei der Berechnung von Tragflügeln und Turbomaschinen. Z. VDI Bd. 80 (1936) S. 299.

3. Grundlagen des Modellversuchs.

26. BATEMAN, H., u. F. G. JOHANSEN: Pressure and Force Measurements on Airscrew-Body Combinations. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1380 (1931).

27. BENDEMANN, F.: Versuchsanlage für Luftschraubenuntersuchungen. Z. Flugtechn. Bd. 1 (1910) S. 177.

28. BENDEMANN, F.: Luftschraubenuntersuchungen. München 1911/1912/1918.

29. BRIGGS, L. J., u. H. L. DRYDEN: Aerodynamic Characteristics of Twenty Four Airfoils on High Speeds. NACA Tech. Rep. Nr. 319 (1929).

30. BUCKINGHAM, E.: On Physically Similar Systems. Phys. Rev. (2) Bd. 4 (1914) S. 345.

31. Dryden, H. L., u. A. M. Kuethe: Effect of Turbulence in Wind-Tunnel Measurements. NACA Tech. Rep. Nr. 342 (1929).

32. Douglas, G. P., u. L. P. Coombes: The Measurement of Torque Grading Along an Airscrew Blade. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 992 (1925).

33. Durand, W. F., u. E. P. Lesley: Comparision of Tests of Air Propellers in Flight with Wind Tunnel Tests on Similar Forms. NACA Tech. Rep. Nr. 220 (1925).

34. Gibson, A. H.: The Principle of Dynamical Similarity, with Special Reference to Model Experiments. Engineering Bd. 117 (1924) S. 325.

35. Glauert, H.: The effect of the Static Pressure Gradient on the Drag of Body Tested in a Wind Tunnel. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1158 (1928).

36. Glauert, H., u. C. N. H. Lock: On the Advantage of an Open Jet Type of Wind Tunnel for Airscrew Tests. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1033 (1926).

37. Gutsche, F.: Der Kennwerteinfluß auf Schraubenversuche. In G. Kempf-E. Förster: Hydromechan. Probleme des Schiffsantriebs, S. 185 u. 392. Hamburg 1932 — Werft, Reed., Hafen Bd. 13 (1932) S. 237 — Z. VDI Bd. 77 (1933) S. 1255.

38. Gutsche, F.: Kennwerteinflüsse bei Schiffsschrauben-Modellversuchen. Mitt. Versuchsanst. Wasserb. Schiffb. Heft 21. Berlin 1936 — Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 37 (1936) S. 277.

39. Gutsche, F.: Versuche über die Profileigenschaften der Blattschnitte von Schiffsschrauben und ihr Einfluß auf den Entwurf und Auswertung. Schiffbau Bd. 34 (1933) S. 267 — Mitt. Versuchsanst. Wasserb. Schiffb. Heft 10. Berlin 1933.

40. Herrmann, W.: Anwendung des Ähnlichkeitsprinzips der Mechanik auf zeitlich beliebig veränderliche Vorgänge mit besonderer Berücksichtigung schiffbaulicher und aerodynamischer Probleme. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 31 (1930) S. 355.

41. Karman, Th. v., u. C. B. Millikan: A Theoretical Investigation of the Maximum Lift Coefficient. J. appl. Mech. Bd. 2/A (1935) S. 21.

42. Lock, C. N. H., u. H. Bateman: The effect of Wind Tunnel Interference on a Combination of Airscrew and Tractor Body. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 919 (1924).

43. Millikan, C. B.: Further Experiments on the Variation of the Maximum Lift Coefficient with Turbulence and Reynolds Number. Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. Bd. 56 (1934) S. 816.

44. Millikan, C. B., u. A. L. Klein: The Effect of Turbulence. An Investigation of Maximum Lift Coefficient and Turbulence in Wind-Tunnels and in Flight. Aircr. Engng. Bd. 5 (1933) S. 169.

45. Seewald, F.: Die neue Luftschraubenprüfanlage der DVL. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1933 Tl. II S. 5.

46. Stack, J.: High-Speed Wind Tunnel and Tests of Sixe Propeller Sections. NACA Tech. Rep. Nr. 463 (1933).

47. Stack, J., u. A. E. von Doenhoff: Tests of 16 Related Airfoils at High Speeds. NACA Tech. Rep. Nr. 492 (1934).

48. Tolman, R. C.: Principle of Similitude. Phys. Rev. (2) Bd. 3 (1914) S. 244; Bd. 6 (1915) S. 219; Bd. 8 (1916) S. 8.

49. Townend, H. C. H., u. J. H. Warsap: Tests of a Metal Airscrew in a Closed Tunnel for Comparison with American Tests in a Open Jet Tunnel. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1137 (1927).

50. Weber, M.: Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und der Modellwissenschaft. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 31 (1930) S. 273.

51. Weber, M.: Die spezifischen Drehzahlen und die anderen Kenngrößen der Wasserturbinen, Kreiselpumpen, Windräder und Propeller als dimensionsfreie Kenngrößen der Ähnlichkeitsphysik. Schiffbau Bd. 31 (1930) S. 73.

52. WEICK, F. E., u. D. H. WOOD: The Twenty Foot Propeller Research Tunnel of the National Advisory Committee for Aeronautics. NACA Tech. Rep. Nr. 300 (1928).

53. WOOD, R. MCK., u. R. G. HARRIS: Some Notes on the Theory of an Airscrew Working in a Wind Channel. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 662 (1920).

4. Schraubentheorie ohne Berücksichtigung der Flügelzahl.

54. BENDEMANN, F.: Wirkungsgrad und Gütegrad von Treibschrauben. Z. Flugtechn. Bd. 9 (1918) S. 33.

55. BETZ, A.: Physikalische Grenzen des erreichbaren Standschubs. Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 348.

56. BETZ, A.: Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie. Z. Flugtechn. Bd. 11 (1920) S. 105.

57. BETZ, A., u. H. B. HELMBOLD: Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932) S. 1.

58. BIENEN, TH.: Die günstigste Schubverteilung für die Luftschraube bei Berücksichtigung des Profilwiderstandes. Z. Flugtechn. Bd. 16 (1925) S. 209; Bd. 17 (1926) S. 4.

59. BIENEN, TH., u. TH. v. KARMAN: Zur Theorie der Luftschrauben. Z. VDI Bd. 68 (1924) S. 1237.

60. BOTHEZAT, G. DE: The General Theory of Blade Screws. NACA Tech. Rep. Nr. 29 (1919).

61. FÖTTINGER, H.: Über die physikalischen Grundlagen der Turbinen und Propellerwirkung. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1912) S. 233.

62. GLAUERT, H.: Aerodynamic Theory of the Airscrew. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 786 (1922) u. Nr. 869 (1922).

63. HELMBOLD, H. B.: Über den Einfluß der Strahlkontraktion auf die Wirkungsweise breitflügeliger Schraubenpropeller. Werft, Reed., Hafen Bd. 14 (1933) S. 319.

64. HELMBOLD, H. B.: Eine Näherungslösung des Problems der wirtschaftlichen Luftschraube. Z. Flugtechn. Bd. 18 (1927) S. 13.

65. HELMBOLD, H. B.: Zur Theorie der Treibschraube. Z. Flugtechn. Bd. 15 (1924) S. 150.

66. JOUKOWSKI, N. E.: Théorie Tourbillonaire de l'Hélice Propulsive. Soc. Math. Moscou 1912 und Paris 1929.

67. KAWADA, S.: Theory of Airscrews. Rep. aeron. Res. Inst., Tokio 1926 Nr. 14.

68. LÖSCH, F.: Über die Berechnung des induzierten Wirkungsgrades stark belasteter Luftschrauben unendlicher Blattzahl. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 321 — Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 352.

69. PISTOLESI, E.: Neue Ansätze und Ausführungen zur Theorie der Luftschrauben. In TH. v. KARMAN u. T. LEVI-CIVITA: Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik Innsbruck 1922, S. 67. Berlin 1924.

70. WEINIG, F.: Der Schraubenwirkungsgrad nach der Strahltheorie unter Berücksichtigung der axialen und tangentialen Austrittsverluste. Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931) S. 159.

71. WEINIG, F.: Strömung durch Profilgitter und einige Anwendungen auf die Strömung im Propeller. In G. KEMPF — E. FÖRSTER: Hydromechan. Probleme des Schiffsantriebs, S. 171. Hamburg 1932.

5. Schraubentheorie unter Berücksichtigung der endlichen Flügelzahl.

72. BETZ, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Mit einem Zusatz von L. PRANDTL. Göttinger Nachr. 1919. Abgedruckt in L. PRANDTL u.

A. Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, S. 68. Göttingen 1927.

73. Goldstein, S.: On the Vortex Theory of Screw Propellers. Proc. roy. Soc. Lond. (A) Bd. 123 (1929) S. 440.

74. Helmbold, H. B.: Ansätze zur Berechnung von Verstelluftschrauben. Z. Flugtechn. Bd. 23 (1932) S. 413.

75. Helmbold, H. B.: Über die Goldsteinsche Lösung des Problems der Luftschraube mit endlicher Flügelzahl. Z. Flugtechn. Bd. 22 (1931) S. 429.

76. Kramer, K. N.: Induzierte Wirkungsgrade von Best-Luftschrauben endlicher Blattzahl. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 326 — Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 357.

77. Lock, C. N. H.: Airscrew Theory. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1746 (1936).

78. Lock, C. N. H., u. D. Yeatman: Tables for Use in a Improved Method of Airscrew Strip Theory Calculation. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1674 (1935).

79. Trefftz, E.: Prandtlsche Tragflächen- und Propellertheorie. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921) S. 206.

80. Troller, Th.: Zur Wirbeltheorie der Luftschrauben. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928) S. 426.

81. Westwater, F. L.: Some Applications of Conformal Transformation to Airscrew Theory. Proc. Cambridge Phil. Soc. Bd. 32 (1936) S. 676.

6. Vergleich zwischen Theorie und Versuch und Anwendung auf Entwurf.

82. Betz, A.: Die wichtigsten Grundlagen für den Entwurf von Luftschrauben. Z. Flugtechn. Bd. 6 (1915) S. 97.

83. Caldwell, F. W.: Variable Pitch Propellers. S. A. E. J. Bd. 2 (1929) S. 656.

84. Doepp, Ph. v.: Luftschraubenberechnungen nach dem Verfahren der gleichwertigen Tragflügelpolare. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 46.

85. Fage, A., u. H. E. Collins: An investigation of the Mutual Interference of Airscrew Blades. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 316 (1917).

86. Fage, A., u. H. E. Collins: An investigation of the Magnitude of the Inflow Velocity of the Air in the Immediate Vicinity of an Airscrew with a View to an Improvement in the Accuracy of Prediction from Airfoil Data of the Performance of an Airscrew. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 328 (1917).

87. Fage, A., u. R. G. Howard: A Consideration of Airscrew Theory in the Light of Data Derived from a Experimental Investigation of the Distribution of Pressure over the Entire Surface of an Airscrew Blade and also over Aerofoils of Appropriate Shape. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 681 (1921).

88. Glauert, H., u. C. N. H. Lock: The Accuracy of the Vortex Theory of Airscrews in the Light of Recent Experimental Work and its Application to Airscrew Design. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1040 (1926).

89. Helmbold, H. B.: Die Betz-Prandtlsche Wirbeltheorie der Treibschraube und ihre Ausgestaltung zum technischen Berechnungsverfahren. Werft, Reed., Hafen Bd. 7 (1926) S. 565.

90. Helmbold, H. B.: Systematische Versuche an Verstelluftschrauben. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935) S. 4.

91. Hoff, W.: Die Strahltheorie in ihrer praktischen Anwendung. Z. Flugtechn. Bd. 11 (1920) S. 105.

92. Horn, F.: Auswertung von Schraubenversuchen. Schiffbau Bd. 36 (1935) S. 305.

93. Horn, F.: Versuche mit Tragflügel-Schiffsschrauben. Jb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 28 (1927) S. 342.

94. JONES, E. T.: The Distribution of Pressure over a Section of an Airscrew Blade in Flight and the Variation of Lift Coefficient with the Speed of the Section. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1256 (1929).

95. KAWADA, S.: Berechnung der induzierten Geschwindigkeit nach der Wirbeltheorie und Anwendung auf Luftschraubenberechnung. Rep. aeron. Res. Inst., Tokio 1939 Nr. 172.

96. LESLEY, E. P.: Propeller tests to Determine the Effect of Number of Blades at 2 Typical Solidities. NACA Tech. Not. Nr. 698 (1939).

97. LOCK, C. N. H.: The Application of GOLDSTEINS Airscrew Theory to Design. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1377 (1930).

98. LOCK, C. N. H.: Graphical Method of Calculating Performance of Airscrews. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1675 (1934).

99. LOCK, C. N. H., u. H. BATEMAN: Experiments with a Family of Airscrews. Analysis of the Family of Airscrews by Means of the Vortex Theory and Measurements of Total Head. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 892 (1923).

100. LOCK, C. N. H., H. BATEMAN u. H. C. H. TOWNEND: An Extension of the Vortex Theory of Airscrews with Application to Airscrews of Small Pitch. Including Experimental Results. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1014 (1925).

101. LOCK, C. N. H., H. BATEMAN u. H. C. H. TOWNEND: Experiments to Verify the Independence of the Elements of an Airscrew Blade. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 953 (1924).

102. MILLNER, H. L.: Facters Controlling Airscrew Design. Aircr. Engng. Bd. 11 (1939) S. 87.

103. MOELLER, E.: Im offenen Flüssigkeitsstrom arbeitende Flügelräder. Z. VDI Bd. 68 (1924) S. 675.

104. STANTON, T. E., u. D. MARSHALL: On the Method of Estimating, from Observations on the Slipstream of an Airscrew, the Performance of the Elements of the Blades and the total Thrust of the Screw. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 460 (1918).

105. THOMAS, F. M., F. W. CALDWELL u. T. B. RHINES: Practical Airscrew Performance Calculations. J. roy. aeron. Soc. Bd. 42 (1938) S. 5.

106. WALCHNER, O.: Berechnung von Luftschrauben mit kleinem Schubbeiwert und kleinem Fortschrittsgrad. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 230 — Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 103.

107. WEINIG, F.: Das Verhalten der Kennziffern von Holzluftschrauben bei Umfangsgeschwindigkeiten bis 280 m/sec. Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930) S. 525.

7. Strömungsfeld des Flugzeugs.

108. BRYANT, L. W., u. D. H. WILLIAMS: An Investigation of the Flow of Air around an Aerofoil of Infinite Span. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 989 (1925).

109. KARMAN, TH. v.: Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern. Abh. Aerodyn. Inst. Aachen 1927 Heft 6.

110. LOTZ, J.: Zur Berechnung der Potentialströmung um quergestellte Luftschiffkörper. Ing.-Arch. Bd. 2 (1931) S. 507.

111. PARSENS, J. F.: Full Scale Wind-Tunnel Tests to Determine a Satisfactory Location for a Service Pitot-Static Tube of a Low-Wing Monoplane. NACA Tech. Not. Nr. 561 (1936).

112. RUDEN, P.: Ein graphisch rechnerisches Verfahren zur Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors im Strömungsfeld eines Joukowsky-Profils. Ing.-Arch. Bd. 7 (1936) S. 71.

113. TROLLER, TH.: Eine angenäherte Berechnung der Strömung am Flugzeugrumpfe im Hinblick auf die Propellerebene. Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1931) S. 494.

114. TROLLER, TH.: Zur Berücksichtigung des Rumpfes beim Luftschraubenentwurf. Z. Flugtechn. Bd. 19 (1928) S. 325.

115. WEINIG, F.: Geschwindigkeit und Richtung der Strömung an einem Tragflügelprofil. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935) S. 222.

116. WEINIG, F.: Schnellkonvergierende graphische Lösung von Strömungsproblemen. Z. techn. Phys. Bd. 9 (1928) S. 39.

117. WEINIG, F.: Die Strömungsverhältnisse im Felde dünner schwachgewölbter Tragflügelprofile. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938) S. 107.

8. Strömungsverhältnisse in der Schraube und im Schraubenstrahl.

118. BURGERS, J. M.: On the application of OSEEN's hydrodynamical equations to the problem of slipstream from an ideal/propeller. Proc. Kon. Ak. v. Wet., Amsterdam Bd. 32 (1929) S. 1278.

119. DICKMANN, J.: Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers und Wechselwirkung mit Schiffswellen. Diss. T.H. Berlin 1938 — Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 40 (1939) S. 234 — Ing.-Arch. Bd. 9 (1938) S. 452 — Proc. 5. Intern. Congr. Appl. Mech. Cambridge Mass. USA. 1938. S. 497 (New York 1939).

120. DREHMANN, W.: Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse im Strahl eines Propellers bei Verwendung von Leitvorrichtungen. Werft, Reed., Hafen. Bd. 13 (1932) S. 150.

121. FARNBOROUGH: Exploration of the Airspeed in the Airscrew Slipstream of the Traktor Machine. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 438 (1917/18).

122. FLAMM, O.: Die Schiffsschraube und ihre Wirkung auf das Wasser. Berlin 1909 — Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 9 (1908) S. 427.

123. FÖTTINGER, H.: Neue Grundlagen für die theoretische und experimentelle Behandlung des Propellerproblems. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 19 (1918) S. 472.

124. FÖRTHMANN, E.: Über turbulente Strahlausbreitung. Ing.-Arch. Bd. 5 (1934) S. 42.

125. GLAUERT, H.: The analysis of Experimental Results in the Windmill Brake and Vortex Ring States of an Airscrew. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1026 (1926).

126. HINZ, K.: Axialsymmetrische freie Flüssigkeitsstrahlen mit schwacher Kontraktion. Diss. T.H. Berlin 1935.

127. KIMMEL, H.: Theorie der Luftschrauben auf aerodynamischer Grundlage. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1912) S. 53.

128. KUCHARSKI, W.: Graphische Methode für schraubensymmetrische Potentialströmung. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 19 (1918) S. 460.

129. LAMB, H.: The magnetic field of a helix. Proc. Cambridge Phil. Soc. Bd. 21 (1923) S. 477.

130. LOCK, C. N. H., u. H. BATEMAN: The Measurement of Airflow around an Airscrew. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 955 (1924/25).

131. REISSNER, H.: Axialsymmetrische freie Flüssigkeitsstrahlen mit schwacher Kontraktion. Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1932) S. 25.

132. SIMMONS, L. F. G., u. E. OWEN: Investigation of Downwash in the Slipstream. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 882 (1923).

133. TOLLMIEN, W.: Strahlausbreitung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926) S. 468.

134. TAYLOR, G. J.: The Rotational Inflow Faktor in the Propeller Theory. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 765 (1921/22).

135. TREFFTZ, E.: Über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen. Diss. Straßburg 1913 — Z. Math. Phys. Bd. 64 (1916) S. 34.

136. VALENSI, J.: Ecoulement de l'air auteur d'une hélice. Science Aérienne Bd. 4 (1935) S. 97.

137. VOIGT, H.: Strömungsmessungen an freifahrenden Schrauben. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 34 (1936) S. 277.

138. WEINIG, F.: Die Strömungsverhältnisse im Schraubenstrahl. Jb. Luftf.-Forschg. 1936 S. 29.

139. WIESELSBERGER, C.: Drallfreier Schraubenstrahl in Parallelströmung. Abh. Aerodyn. Inst. Aachen 1933 Heft 13 S. 3.

9. Einfluß des Flugwerks auf die Schraube.

140. EUJEN, E.: Flugmessungen über den Einfluß von Schraubenstrahl und Landeklappenanstellung auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939) S. 38.

141. FAGE, A., u. H. E. COLLINS: An investigation of the Mutual Interference of an Airscrew and Body of the Traktor Airplane. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 344 (1917), Nr. 393 (1918), Nr. 572 (1919).

142. FRESENIUS, R.: Das grundsätzliche Wesen der Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller. Schiffbau Bd. 23 (1921) S. 257.

143. HELMBOLD, H. B: Beitrag zur Theorie der Nachstromschraube. Ing.-Arch. Bd. 2 (1931) S. 275 — vgl. auch Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 32 (1931) S. 147.

144. HELMBOLD, H. B.: Schraubensog und Nachstrom. Werft, Reed., Hafen Bd. 19 (1938) S. 35.

145. HORN, F.: Measurement of wake. Trans. North. East. Coast. Instr. Engnrs Shipb. Bd. 54 (1938) S. 251.

146. HORN, F.: Ungleichförmigkeitseinflüsse bei Schiffsschrauben. In G. KEMPF — E. FÖRSTER: Hydromech. Probl. des Schiffsantriebs, S. 343. Hamburg 1932.

147. KEMPF, G.: Mitstrom und Mitstromschrauben. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 32 (1931) S. 134.

148. KEMPF, G.: Dem Nachstrom angepaßte Propeller. Werft, Reed., Hafen Bd. 5 (1924) S. 93.

149. LAMMEREN, W. P. A. VAN: Analyse der Vorstromkomponenten. Ned. Scheepsb. Proefst. Wageningen 1938 Heft 32.

150. LOCK, C. N. H.: Theory of Airscrew and Body Interference. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1378 (1930).

151. LOCK, C. N. H.: Analysis of Experiments on an Airscrew in Various Positions within the Nose of a Tractor Body. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1120 (1927).

152. LOCK, C. N. H.: The application of the Theoretical Velocity Field around a Spheroid to Calculate the Performance of an Airscrew near the Nose of a Streamline Body. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1239 (1928).

153. LOCK, C. N. H., u. H. BATEMAN: Analysis of Experiments on the Interference Between Bodies and Tractor and Pusher Airscrews. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1445 (1931/32).

154. LOCK, C. N. H., u. H. BATEMAN: Interference between bodies and airscrews. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1522 (1932).

155. LOCK, C. N. H., u. H. JOHANSEN: Pressure Plotting a Streamline Body with Tractor Airscrew Running. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1230 (1928/29); Nr. 1284 (1929/30).

156. MUNK, M.: Some New Aerodymical Relations. NACA Tech. Rep. Nr. 114 (1921).

157. JENNINGS, W. G.: The effect of Body Interference on Airscrew Performance. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1046 (1926).

158. OWER, E., R. WARDEN u. L. J. JONES: The Effect of a Traktor Airscrew on Body-Wing Interference. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1512 (1932/33).

159. THOMA, D.: Grundsätzliches zur einfachen Strahltheorie der Schraube. Z. Flugtechn. Bd. 16 (1925) S. 206.

160. WEICK, F. E.: Full Scale Tests of Wood Propellers on a VEJ Airplane. NACA Tech. Rep. Nr. 301 (1928).

10. Schraubeneinfluß auf Tragflügel.

161. BRADFIELD, V.: Preliminary Tests on the Effect on the Lift of a Wing of the position of the Airscrew Relative to it. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1219 (1928/29).

162. EBERT, H.: Über Flugversuche zur Messung der Flugzeugpolaren und den Einfluß des Schraubenstrahls. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1932.

163. FERRARI, C.: Sulla influenza dell elica sulle caratteristiche aerodinamiche dell alla. Aerotecnica Bd. 13 (1933) S. 989.

164. FRANKE, A., u. F. WEINIG: Tragflügel und Schraubenstrahl. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 303.

165. KONING, C.: Influence of the Propeller on Other Parts of the Airplane Structure. In W. F. DURAND: Aerodynamic Theory Bd. IV Tl. M S. 361.

166. LOTZ, J.: Beeinflussung der Auftriebsverteilung durch den Schraubenstrahl. Jb. Luftf.-Forschg. 1936 S. 57.

167. OSTOSLAVSKY, I., u. D. HALEROFF: Interference between airscrew and aeroplane. ZAHI 1935 Nr. 213.

168. PERRING, W. G. A., and V. CALLEN: The influence of a Stopped Airscrew on the Lift and Drag of an Aerofoil. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1347 (1930/31).

169. PISTOLESI, E.: L'influsso della limitazione delle corrente sulle caratteristiche dei modelli di ali. L'Aerotecnica Bd. 16 (1936) S. 3.

170. RELF, E. F., u. L. J. JONES: Measurements of Lift, Drag, Pitching. Moment on the $^1/_5$ Scale Model of the Bristol Fighter with Airscrew Running. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 937 (1924).

171. SEIFERTH, R.: Die gegenseitige Beeinflussung zwischen Tragflügel und Propeller. Ber. Abh. wiss. Ges. Luftfahrt Bd. 14 (1926) S. 108.

172. STÜPER, J.: Einfluß des Schraubenstrahls auf Flügel und Leitwerk. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 181.

173. WIESELSBERGER, C.: Beitrag zur gegenseitigen Beeinflussung von Flügel und Luftschraube. Abh. Aerodyn. Inst. Aachen Heft 13. Berlin 1933.

174. WIESELSBERGER, C.: Gegenseitige Beeinflussung von Tragflügel und Schraube. In L. PRANDTL—A. BETZ: Ergebn. Aerodyn. Vers.-Anst. Göttingen Bd. 1 (1921) S. 112.

11. Schraubeneinfluß auf Längsstabilität.

175. BLENK, H.: Luftschraubenstrahl und Längsstabilität. Luftf.-Forschg. Bd. 11 (1934) S. 202.

176. BRADFIELD, F. B.: Wind Tunnel Data on the Effect of Slipstream on the Downwash and Velocity at the Tailplane. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1488 (1932).

177. BRYANT, L. W., D. H. WILLIAMS u. A. F. BROWN: Performance and Longitudinal Stability of a Single Engined High Wing Monoplane, Experiments on a Quarter Scale Model with Airscrew Running. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1687 (1935/36).

178. FLÜGGE, J., u. D. KÜCHEMANN: Zusammenfassender Bericht über Abwindmessungen ohne und mit Schraubenstrahl. Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 132.

179. HELMBOLD, H. B.: Untersuchungen über den Einfluß des Luftschraubenstrahls auf den Abwind und die Höhenleitwerkswirkung. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 1.

180. MUTTRAY, H.: Untersuchung über den Abwind hinter einem Trapezflügel mit Rumpf und Schraube. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 101.

181. RUSSELL, J. S., u. H. M. McCOY: Wind Tunnel Tests on a High Wing Monoplane with Running Propeller. J. aeron. Sci. Bd. 3 (1936) S. 73.

182. SCHMIDT, R.: Experimenteller Beitrag zum Problem Abwind und Schraubenstrahl. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 139.

183. SEIFERTH, R.: Windkanaluntersuchungen über den Einfluß des Schraubendrehsinns auf die Längsstabilität eines zweimotorigen Flugzeugs. Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 220.

184. STIESS, W.: Einfluß des Luftschraubendrehsinns auf die Längsstabilität von zweimotorigen Flugzeugen. Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 206.

12. Schrauben bei Schräganblasung und Flugzeugdrehung.

185. GLAUERT, H.: The Stability Derivatives of an Airscrew. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 642 (1911).

186. HARRIS, R. G.: Forces on a Propeller Due to Sideslip. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 427 (1918).

187. KLINGEMANN, G., u. F. WEINIG: Die schräg angeblasene Luftschraube. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 224.

188. KLINGEMANN, G., u. F. WEINIG: Die Kräfte und Momente der Luftschraube bei Schräganblasung und Flugzeugdrehung. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 206.

189. MISZTAL, F.: Zur Frage der schrägangeblasenen Propeller. Abh. Aerodyn. Inst. Aachen 1932 Heft 11 S. 5.

190. PIVKO, S.: Hélice en déplacement lent avec l'axe de rotation incliné par rapport à la direction de déplacement. Techn. aéron. Bd. 29 (1938) S. 108.

191. WEINIG, F.: Die schrägangeblasene Luftschraube. Ges. Vorträge der Hauptvers. 1937 d. Lilienthal-Gesellsch. f. Luftfahrtforschung S. 239.

13. Leitvorrichtungen und gegenläufige Schrauben.

192. BETZ, A.: Zur Theorie der Leitapparate für Propeller. Ing.-Arch. Bd. 9 (1938) S. 435.

193. HORN, F.: Über die Wirkung von Flossen hinter dem Schraubenpropeller. Schiffbau Bd. 29 (1928) S. 538.

194. KUCHARSKI, W.: Wirkungsweise und Theorie der Propellerleitapparate. Werft, Reed., Hafen Bd. 6 (1925) S. 498.

195. WAGNER, R.: Ausblick und Rückblick über die Entwicklung des Contrapropellers. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 13 (1912) S. 420.

196. WEINIG, F.: Gegenläufige Schrauben für Flugzeuge. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 215.

14. Abhängigkeit der Start- und Flugleistung von der Schraube.

197. ALLEN, E. T.: Die technisch wissenschaftliche Überwachung des Luftverkehrs. Luftwissen Bd. 2 (1935) Sonderheft S. 38.

198. BECKER, F.: Der Sturzflug in veränderlicher Luftdichte. Z. Flugtechn. Bd. 23 (1932) S. 659.

199. BETZ, A.: Der Wirkungsgradbegriff beim Propeller. Z. Flugtechn. Bd. 19 (1928) S. 171.

200. BLENK, H.: Startformeln für Landflugzeuge. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1927 S. 1.

201. DIEHL, W. S.: Some Fundamental Considerations in Regard to the Use of Power in Landing an Airplane. NACA Tech. Not. Nr. 612 (1939).

202. GÖTHERT, B.: Der Abflug von Landflugzeugen mit besonderer Berücksichtigung des Übergangsbogens. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 18.

203. HARTMAN, P.: Considerations of the Take-off Problem. NACA Tech. Not. Nr. 557 (1936)

204. Helmbold, H. B.: Bemerkungen zum Problem der Wechselwirkung zwischen Schiffsschraube und Schiffskörper. In G. Kempf—E. Förster: Hydromech. Probleme des Schiffsantriebs, S. 380.

205. Helmbold, H. B.: Über die Wechselwirkung zwischen Luftschraube und Flugzeug. 5. Congr. Intern. de la Nav. Aér. Bd. 1 S. 575. Den Haag 1931.

206. Hopf, L.: Mechanik des Flugzeugs. In R. Fuchs, L. Hopf, F. Seewald: Aerodynamik Bd. 1. Berlin 1934.

207. Schrenk, M.: Abflug und Schraubenschub. Z. Flugtechn. Bd. 23 (1932) S. 629.

208. Schrenk, M.: Das Zusammenwirken von Flugwerk und Triebwerk, besonders im Hinblick auf die Verstellschraube. Jb. Luftf.-Forschg. 1935 S. 243.

209. Weinig, F.: Der Einfluß des Flugwerks auf den Vortriebswirkungsgrad der Luftschraube. Z. Flugtechn. Bd. 21 (1930) S. 116.

15. Schraubenauswahl.

210. Ackeret, J., u. W. Pfenninger: Constant-speed-Luftschrauben. Flugwehr u. Technik Bd. 1 (1939) S. 24.

211. Baumhauer, A. G.: Selecting an airscrew. Aircr. Engng. Bd. 11 (1939) S. 9.

212. Betz, A.: Luftschrauben für große Fluggeschwindigkeit. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 206.

213. Bock, G.: Wege zur Leistungssteigerung im Flugzeugbau. Luftwissen Bd. 4 (1937) S. 104.

214. Bock, G., u. Nikodemus: Die Aussichten des Luftschraubenantriebes für hohe Fluggeschwindigkeiten. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 334 — Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 365.

215. Caldwell, F. W.: Luftschrauben für Flugmotoren großer Leistung. Ges. Vorträge der Hauptvers. 1937 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, S. 128.

216. Helmbold, H. B.: Propellerforschung vom Gesichtspunkt des Flugzeugkonstrukteurs aus. Jb. Luftf.-Forschg. 1936 S. 380.

217. Lippisch, A.: Die Auswahl der Luftschraube auf Grund von Meßergebnissen. Flugsport Bd. 27 (1935) S. 531.

218. Perring, W. G. A.: Neuzeitliche Luftschraubenforschung in Großbritannien, unter besonderer Berücksichtigung des Startproblems. Jb. Luftf. Forschg. 1938 Erg.-Bd. S. 248.

219. Reissner, H., u. M. Schiller: Auswertung experimenteller Untersuchungen über Luftschrauben mit verdrehbaren Flügelblättern. Z. Flugtechn. Bd. 22 (1931) S. 551.

220. Schiller, M.: Auswertung experimenteller Untersuchungen über Luft- und Wasserschrauben mit verdrehbaren Flügelblättern. In G. Kempf—E. Förster: Hydrom. Probleme des Schiffsantriebs, S. 205. Hamburg 1932.

221. Weick, F. E.: Working Charts for the Selection of Aluminium Alloy Propellers of a Standard Form to Operate with Various Aircraft Engines and Bodies. NACA Tech. Rep. Nr. 350 (1929).

222. Weinig, F.: Luftschrauben für schnelle Flugzeuge. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 168.

16. Messung von Schub- und Drehmoment der Schraube im Fluge.

223. McClaim, A. L., u. R. S. Buck: Flight Testing with an Engine Torque Indicator. S. A. E. J. Transactions Bd. 42 (1938) S. 49.

224. McClaim, A. L., u. R. S. Buck: Le mesureur de couple en vol Farman Aéronautique Bd. 17 (1935) S. 155.

225. LÜRENBAUM, K. A.: Geräte zur Messung der Wellenleistung an Luftfahrzeugtriebwerken. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. II S. 274 — Z. VDI Bd. 81 (1937) S. 353.

226. MUIR, N. S.: On the Art of Dynamometry with Particular Reference to the Measurement of Engine Power in Flight. J. roy. aeron. Soc. Bd. 41 (1937) S. 864.

227. SEEWALD, F.: Über die Messung der Kräfte an Luftfahrzeugen. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1929 S. 127.

17. Schraubenschwingungen und Festigkeit.

228. FÖPPL, A., u. L. FÖPPL: Die Drehfestigkeit der Stäbe. In Drang und Zwang Bd. 2 S. 37. München 1928.

229. GECKELER, J. W.: Elastostatik. In H. GEIGER u. K. SCHEEL: Handb. der Physik Bd. 6 S. 141. Berlin 1928.

230. HANSEN, M., u. G. MESMER: Luftschraubenschwingungen. Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933) S. 298.

231. DEN HARTOG, J. P.: Auswuchten. In Mechanische Schwingungen. Deutsch von G. MESMER. Abschnitt 47—49. Berlin 1936.

232. HOFFMANN, L.: Konstruktive Probleme der Luftschraube von großer Blattbreite. Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. I S. 423.

233. HOHENEMSER, K.: Zur Biegefestigkeit von umlaufenden und quer zur Drehebene belasteten Stäben. Ing.-Arch. Bd. 8 (1937) S. 214, 203.

234. LEHR, E.: Der heutige Stand der Auswuchttechnik. Maschinenbau Bd. 16 (1922/23) S. 62.

235. LIEBERS, E.: Zur Berechnung der drei tiefsten Biegefrequenzen der umlaufenden Schraube. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935) S. 155.

236. LIEBERS, E.: Zur Theorie der Luftschraubenschwingungen. Z. techn. Phys. Bd. 10 (1929) S. 361.

237. LIEBERS, E.: Versuche über Luftschraubenschwingungen. Z. Flugtechn. Bd. 23 (1932) S. 251.

238. LÜRENBAUM, K.: Schwingungen des Systems Kurbelwelle-Luftschraube. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 346.

239. MEYER, J.: Die Kopplung der Luftschrauben-Biegeschwingungen mit den Kurbelwellen-Drehschwingungen. Jb. Luftf.-Forschg. 1938 Tl. II S. 141.

240. NEUGEBAUER, E.: Fragen des Fernantriebes. Luftwissen Bd. 1 (1934) S. 308.

241. SCHLIPPE, B. v.: Schwingungen von räumlichen Maschinenfundamenten. Luftf.-Forschg. Bd. 11 (1934) S. 57.

242. SEEWALD, F.: Beitrag zur Ermittlung der Beanspruchungen und der Formänderungen von Luftschrauben. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1927 S. 15.

243. STIEGLITZ, A.: Drehschwingungen in Reihenmotoren. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1929 S. 449.

244. TIMOSHENKO, S.: Auswuchtmaschinen. In Schwingungsprobleme der Technik, S. 50. Deutsch von I. MALKIN u. E. HELLY. Berlin 1932.

245. TIMOSHENKO, S., u. J. M. LESSELS: Festigkeitslehre, S. 31. Deutsch von J. MALKIN. Berlin 1928.

18. Schraubenlärm.

246. ERNSTHAUSEN, W.: Zur Entstehung des Luftschraubengeräusches. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 433 — Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 254.

247. ERNSTHAUSEN, W.: Strahlergruppen mit umlaufender Phase. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 374

248. Ernsthausen, W., u. W. Willms: Über die Berechnung des Schallfeldes einer Luftschraube. Akust. Z. Bd. 4 (1939) S. 20.

19. Hubschrauben, Tragschrauben, Windmühlen, Ventilatoren, Düsenschrauben und Verwandtes.

249. Betz, A.: Grundsätzliches zum Voith-Schneider-Propeller. In G. Kempf u. E. Förster: Hydromech. Probleme des Schiffsantriebs, S. 161. Hamburg 1932.

250. Betz, A.: Die Hubschraube in Bodennähe. Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937) S. 68 — Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 238.

251. Betz, A.: Windenergie und ihre Ausnützung durch Windmühlen. Göttingen 1926.

252. Caygill, L. E., u. A. E. W. Nutt: Wind Tunnel and Dropping Tests of Autogyro Models. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1116 (1926).

253. De la Cierva, J.: The Development of the Autogyro. J. roy. aeron. Soc. Bd. 30 (1926) S. 8.

254. Flachsbarth, O.: Theorie der Hubschraube. Z. Flugtechn. Bd. 19 (1928) S. 177.

255. Glauert, H.: A General Theory of the Autogyro. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1111 (1926).

256. Glauert, H.: Helicopter Airscrews, Windmills and Fans. In W. F. Durand: Aerodynamic Theory Bd. 4 Tl. L S. 310 u. 324. Berlin 1935.

257. Glauert, H.: On the Horizontal Flight of a Helicopter. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1157 (1928).

258. Glauert, H.: On the Vertical Ascent of a Helicopter. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1132 (1927).

259. Glauert, H., u. C. N. H. Lock: A Summary of the Experimental and Theoretical Investigations of the Characteristics of an Autogyro. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1162 (1928).

260. Hohenemser, K.: Flattern von Drehflügeln im Standlauf. Ing.-Arch. Bd. 10 (1939) S. 133.

261. Hohenemser, K.: Zur Frage der Flugleistungen von Drehflüglern. Ing.-Arch. Bd. 8 (1937) S. 433.

262. Hohenemser, K.: Über die dynamische Stabilität des Hubschraubers mit angelenkten Flügeln. Ing.-Arch. Bd. 9 (1938) S. 419.

263. Karman, Th. v.: Theoretische Bemerkungen zur Frage des Schraubenfliegers. Z. Flugtechn. Bd. 12 (1921) S. 345.

264. Karman, Th. v.: Seitenwege der Luftfahrt. Z. Flugtechn. Bd. 22 (1931) S. 481.

265. Keller, C.: Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Zürich 1934.

266. Küssner, H. G.: Probleme des Hubschraubers. Jb. Luftf.-Forschg. 1937 Tl. I S. 241 — Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 1.

267. Lock, C. N. H.: Further Development of Autogyro Theory. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1127 (1927).

268. Ruden, P.: Untersuchungen über einstufige Axialgebläse. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 325.

269. Sachse, H.: Der Kirsten-Boeing-Propeller. Z. Flugtechn. Bd. 17 (1926) S. 1.

270. Schrenk, M.: Die aerodynamischen Grundlagen der Tragschraube. Jb. dtsch. Versuchsanst. Luftf. 1933 Tl. IX S. 17.

271. Sissingh, G.: Beitrag zur Aerodynamik der Drehflügelflugzeuge. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 280.

20. Geschichtliches über Entwicklung der Schraube und ihrer Theorie.

272. GEISSLER, R.: Der Schraubenpropeller. Eine Darstellung seiner Entwicklung nach dem Inhalt der deutschen, amerikanischen und englischen Patentliteratur. Berlin 1928.

273. GLAUERT, H.: The Development of Airscrew Theory. In W. F. DURAND: Aerodynamic Theory Bd. IV Tl. L S. 178. Berlin 1935.

274. GUTSCHE, F.: Die Entwicklung der Schiffsschraube im Licht der neuzeitlichen Strömungslehre. Z. VDI Bd. 81 (1937) S. 745.

275. GUTSCHE, F.: Die Entwicklung der Schiffsschraube. Technikgeschichte Bd. 26 S. 37. Berlin 1937.

276. PRÖLL, A.: Kritische Betrachtungen zu den Theorien des Schraubenpropellers. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 24 (1923) S. 269.

21. Verschiedenes.

277. DOEPP, PH. v.: Strömungstechnische Entwicklung bei Junkers. Der Propeller Bd. 1 (1936) S. 9.

278. EVERLING, E.: Die Änderung der Luftdichte mit der Höhe. Artillerist. Monatsh. Bd. 12 (1918) S. 72.

279. EVERLING, E., u. W. E. LADEMANN: Strahlantrieb von Fahrzeugen. Verkehrstechn. Woche Bd. 23 (1929) S. 604.

280. FÖPPL, A.: Bifilare Aufhängung. In Technische Mechanik 2. Aufl. Bd. 4 S. 283. Berlin 1901.

281. HELMBOLD, H. B.: Eine Näherungsformel für Abwindrechnungen am Eindecker. Z. Flugtechn. Bd. 17 (1927) S. 11; Bd. 16 (1925) S. 291.

282. JAHNKE, E., u. F. EMDE: Funktionentafeln. Leipzig 1938.

283 JOHANSEN, F. C.: Improvement of Airscrew Body Performance by means of Radial Vanes. A. R. C. Rep. Mem. Nr. 1495 (1932/33).

284. KADEN, H.: Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche. Ing.-Arch. Bd. 2 (1932) S. 140.

285. KLOTTER, K.: Mehrfadenpendel. In Einführung in die Techn. Schwingungslehre Bd. 1 S. 18. Berlin 1938.

286. LOTZ, J., u. W. FABRICIUS: Die Berechnung des Abwindes hinter einem Tragflügel bei Berücksichtigung des Aufwickelns der Unstetigkeitsfläche. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 552.

287. MILLIKAN, C. B.: Über aerodynamische Forschungsergebnisse und ihre Auswertung für den Flugzeugbau. Luftwissen Bd. 3 (1936) S. 277.

288. MUNK, M.: Silencing of Propellers by Thrust Relief. Aero Dig. Bd. 33 (1938) S. 67.

289. ROSCHER, E. K.: Ummantelte Schiffsschrauben. Jb. schiffbautechn. Ges. Bd. 40 (1939) S. 150.

290. USA-WPA-Bibliography of Aeronautics, Part 27. Aircraft propellers 1937.

291. WATSON, G. N.: Theorie of Bessel functions. Cambridge 1933.

292. WEINIG, F.: Die Gestalt der Luftschraube und ihre zeichnerische Darstellung. Luftwissen Bd. 4 (1937) S. 201.

293. HOPF, L.: Mechanik des Flugzeuges. In R. FUCHS, L. HOPF, F. SEEWALD: Aerodynamik Bd. 1. Berlin 1935.

294. BETZ, A., und A. PETERSOHN: Zur Theorie der Querruder. Z. angew. Math. Mech. Bd. 8 (1928) S. 253.

295. STÜPER, J.: Der durch den Freistrahl hindurchgesteckte Tragflügel. Ing. Arch. Bd. 3 (1932) S. 338.

296. WEINIG, F.: Tragflügelprofile bei nicht vollkommenem Auftrieb. Luft.Forschg. Bd. 15 (1938) S. 383.

III. Zusammenstellung der Zahlentafeln.

IV. Zusammenstellung wichtiger Begriffe und der dafür benutzten Bezeichnungen.

Im folgenden werden einige wichtige Begriffe und die dafür benutzten Bezeichnungen zusammengestellt. Die Bedeutung hier nicht aufgenommener Bezeichnungen geht aus dem Texte unmittelbar hervor. Indizes sind im Texte teilweise weggelassen, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erschien. Der Index 0 soll im allgemeinen ausdrücken, daß ein Parameter zu Null wird. Welcher Parameter dies ist, geht immer aus dem Zusammenhang hervor. Der Index * soll im Zusammenhang ersichtliche ausgezeichnete Zustände kennzeichnen. Frakturschrift kennzeichnet im allgemeinen Vektoren. Δ ist für größere Differenzen gewählt, d für kleine Differenzen und Differentiale.

1. Geometrische Größen.

a) Koordinaten.

Die jeweils wichtigste Koordinate wurde im allgemeinen als x- bzw. ξ-Achse gewählt. Im besonderen für

Schraube und Flugzeug: flugzeugfest x, y, z,
flugbahnfest x_a, y_a, z_a.

(x positiv nach vorn Schraubenachse, y positiv nach rechts Flugzeugquerachse, z positiv nach unten Flugzeughochachse).

Schraube allein: $x = \frac{r}{R}$ (x zunehmend nach außen).

Profile: x, y bzw. ξ, η (x bzw. ξ in Richtung der Sehne, y bzw. η senkrecht zur Sehne).

b) Flugzeug.

Allgemeine Indizes:

$/S$ an Schraube.
$/H$ am Leitwerk.

F Flügelfläche.
b Spannweite.
h Flughöhe.
β Klappenausschlag, Index L der Landeklappen, Index Q der Querruder.
ν Flugbahnwinkel.
f Bodenfreiheit der Luftschraube.
$\varphi = \frac{F_s}{F}$ Kreisflächenverhältnis.
F_w Querschnittsfläche der im Schraubenstrahl liegenden Flugzeugteile.

c) Luftschraube.

Allgemeine Indizes:

i in Nabennähe.
a an Flügelspitze.
$\sim$ bezogen auf gleichwertige Elementarschraube.
$-$ für Mittelwerte.
$'$ für örtliche Werte.

$R = r_a$ Schraubenhalbmesser.
$D = 2R$ Schraubendurchmesser.
$F_s = \frac{\pi}{4} D^2$ Schraubenkreisfläche.
$\mathfrak{z}$ Flügelzahl.
β Steigungswinkel,
$H = 2\pi r \operatorname{tg} \beta$ Steigung,
H/D Steigungsverhältnis,
$\lambda = \frac{H}{\pi D}$ Steigungsgrad,

Index s bezogen auf Profilsehne,
d bezogen auf Profildruckseite,
0 bezogen auf Konstruktionszustand.
$*$ bezogen auf auftriebsfreie Anströmrichtung.

β^* aerodynamischer Steigungswinkel.
H^* aerodynamische Steigung.
H^*/D aerodynamisches Steigungsverhältnis.
λ^* aerodynamischer Steigungsgrad.
t/D Blattbreitenverhältnis.
r beliebiger Halbmesser.
δ Schränkung, Verstellwinkel.
x_0 Vorneigung der Flügelmittellinie gegen Flügelachse in Richtung der Schraubenachse.
z_0 Vorneigung der Flügelmittellinie gegen Flügelachse in Richtung des Umfangs.
$a = \frac{2\pi r}{\mathfrak{z}}$ Teilung des Profilgitters.
$\mathfrak{T} = \frac{a}{t}$ Teilungsverhältnis des Profilgitters.
$\chi = \frac{\mathfrak{z} t}{2\pi r} = \frac{t}{a}$ Blattvölligkeitsverhältnis.
$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta^*$ Staffelung des Profilgitters.

d) Flügelprofile.

t Profiltiefe { Index s gemessen durch Sehnenlänge, Index d gemessen durch Druckseitenprojektion.

h Profilhöhe, Profildicke.

$\frac{h}{t}$ Dickenverhältnis.

$F_p = \psi_1 t h$ Profilquerschnittsfläche.

ψ Völligkeitsgrad des Profilquerschnitts bezogen auf umbeschriebenes Rechteck,
Index 1 für Fläche $F_p = \psi_1 t h$,
Index 2 für stat. Moment bezogen auf Druckseite $M_x = \psi_2 \frac{t h^2}{2}$,
Index 3 für Trägheitsmoment bezogen auf Druckseite $J_x = \psi_3 \frac{t h^3}{3}$.

Trägheitsmoment
Index $\odot_x$ bezogen auf Parallele zur Druckseite durch den Schwerpunkt $\odot$,
Index $\odot_y$ bezogen auf Senkrechte zur Druckseite durch den Schwerpunkt $\odot$.

W Widerstandsmoment gegen Biegung { Index s für Spannungsbestimmung auf Saugseite, Index d für Spannungsbestimmung auf Druckseite.

J_d Widerstandsmoment gegen Verdrehung.

x_d Rücklage der Stelle größter Dicke gegen Profilnase.

$y_\odot$ Hochlage des Profilschwerpunktes $\odot$ gegen Druckseite.

$x_\odot$ Rücklage des Profilschwerpunktes $\odot$ gegen Profilnase.

x_m Rücklage des Profilschwerpunktes gegen Stelle größter Dicke.

2. Aerodynamische Größen.

Allgemeine Indizes:

- 0 weit vor der Schraube.
- 1 dicht vor der Schraube.
- 2 dicht hinter der Schraube.
- 3 weit hinter der Schraube.
- ∞ wirksam in der Schraube.
- i induziert.
- id in idealer Strömung.
- p bezogen auf Richtung der Luftkraft.
- u, a, m } für Komponenten in Richtung { des Umfangs, der Achse bzw. des Meridians.
- s für Schub.
- d für Drehmoment.
- l für Leistung.
- f bezogen auf gleichwertige freifliegende Luftschraube.
- f_0 bezogen auf gleichgroße freifliegende Luftschraube.

a) Luft.

p Druck.

γ Wichte.

$\varrho = \frac{\gamma}{g}$ Dichte.

$T = 273° + t$ absolute Temperatur.

R Gaskonstante.

$\varkappa$ Adiabatenexponent.
w_s Schallgeschwindigkeit.
μ absolute Zähigkeit.
$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ kinematische Zähigkeit.

b) Flugzeug.

G Flugzeuggewicht.
v_0 Fluggeschwindigkeit.
$q = \frac{\varrho}{2} v_0^2$ Flugstaudruck.
X, Y, Z Luftkräfte in x-, y-, z-Richtung (flugzeugfest).
X_a, Y_a, Z_a Luftkräfte in x_a-, y_a-, z_a-Richtung (flugbahnfest).
L, M, N Luftkraft-Momente um x-, y-, z-Achse (flugzeugfest).
L_a, M_a, N_a Luftkraft-Momente um x_a-, y_a-, z_a-Achse (flugbahnfest).
$A = -Z_a$ Auftrieb.
$W = -X_a$ Widerstand. Zu unterscheiden:
- W^+ Widerstand ohne Schraube.
- W_i innerer Widerstand infolge Schraubensog.
- ΔW Zusatzwiderstand infolge Schraubenstrahl.
- $\overline{W} = W^+ + W_i + \Delta W$ Komponente in Richtung der Schraubenachse der gesamten auf die Zelle wirkenden Luftkraft.

$Q = -Y_a$ Seitenkraft.
$c_a = \frac{A}{qF}$ Auftriebsbeiwert.
$c_w = \frac{W}{qF}$ Widerstandsbeiwert.
$c_q = \frac{Q}{qF}$ Seitenkraftbeiwert.
α Anstellwinkel. β Schiebewinkel.
$\varepsilon \approx \frac{c_w}{c_a}$ Gleitwinkel, $\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta c_w}{\Delta c_a}$ verhältige Widerstandsänderung.

c) Luftschraube.

$N = \omega M_d$ Leistung an Schraubenwelle.
M_d Drehmoment an der Schraubenwelle.
S Schraubenschub. Zu unterscheiden:
- S^+ Schub der gleichen Schraube freifliegend.
- $\overline{S} = S_a + S_i$ Schublagerkraft, Meßnabenschub.
- $S_a = S$ äußere Schraubenkraft.
- S_i Schraubensog, innere Schraubenkraft.
- $S' = \overline{S} - \overline{W}$ Schubüberschuß zum Beschleunigen und Steigen.
- $S_n = S' + W^+ = S_a - \Delta W$ Nutzschub.

n Schraubendrehzahl.
$\omega = 2\pi n$ Winkelgeschwindigkeit, Drehschnelle der Schraube.

Indizes x um Schraubenachse, y um Flugzeugquerachse, z um Flugzeughochachse.

v Absolutgeschwindigkeit,
u Umfangsgeschwindigkeit,
w Relativgeschwindigkeit.

Indizes 0 weit vor Schraube,
1 dicht vor Schraube,
2 dicht hinter Schraube,
3 weit hinter Schraube,
∞ wirksam in Schraube,
m Komponenten in Meridianrichtung,
u Komponenten in Umfangsrichtung.

$\Delta \mathfrak{v} = \Delta \mathfrak{v}_{id} + \Delta \mathfrak{v}_{zus}$ Geschwindigkeitsänderung durch die Schraube mit den Komponenten:

$v_a = v_{a_{id}} - dv_a$ Änderung der Geschwindigkeit in Achsenrichtung.
$v_u = v_{u_{id}} + dv_u$ Änderung der Geschwindigkeit in Umfangsrichtung.
Die entsprechenden Größen bei Reibungsfreiheit sind $\Delta \mathfrak{v}_{id}$, $v_{a_{id}}$, $v_{u_{id}}$.

$\frac{\Delta \mathfrak{v}_{id}}{2}$ induzierte Geschwindigkeit mit den Komponenten:

$\frac{v_a}{2}$ Axialkomponente der induzierten Geschwindigkeit.

$\frac{v_u}{2}$ Umfangskomponente der induzierten Geschwindigkeit.

$w_{m\infty} = v_{m\infty} = v_0 + \frac{v_a}{2}$ Axialkomponente der wirksamen Relativgeschwindigkeit, axiale Durchflußgeschwindigkeit durch die Schraube.

$w_{u\infty} = u - \frac{v_u}{2}$ Umfangskomponente der wirksamen Relativgeschwindigkeit.

$\lambda_0 = \frac{v_{m_0}}{w_{u_0}} = \frac{v_0}{u}$ Fortschrittsgrad, $J = \pi \lambda_0 = \frac{v_0}{nD}$ Fortschrittsmaß.

$\lambda_\infty = \frac{v_{m\infty}}{w_{u\infty}} = \frac{\Lambda}{K}$ wirksamer Fortschrittsgrad $\left(\frac{v_{m\infty}}{u} = \Lambda,\ \frac{w_{u\infty}}{u} = K\right)$.

dS Schub der Elementarschraube.
dT Umfangskraft der Elementarschraube.
$dM = r\,dT$ Drehmoment der Elementarschraube.
$dN = \omega\,dM = u\,dT$ Leistung der Elementarschraube.

Index id bei Reibungsfreiheit

$\eta_{id} = \frac{S_{id} v_0}{N_{id}} = \lambda \frac{k_{s_{id}}}{k_{d_{id}}}$ idealer Wirkungsgrad $(\eta_{id} = \eta_a \cdot \eta_d)$.

$\eta = \frac{S v_0}{N} = \lambda \frac{k_s}{k_d}$ Wirkungsgrad $(\eta = \eta_a \cdot \eta_d \cdot \eta_m \cdot \eta_u)$.

η_a Axialwirkungsgrad.
η_d Einfluß der Umfangskomponente des Schraubenstrahls auf den Wirkungsgrad.
η_m mechanischer Wirkungsgrad bei kleiner Machscher Zahl.
η_u Einfluß der Zusammendrückbarkeit der Luft auf den Wirkungsgrad.

ψ_d Einfluß der Umfangskomponente des Schraubenstrahls auf Schub bzw. Leistung bei ungeändertem Wirkungsgrad.
ψ_s Einfluß der Reibung auf Schub bzw. Leistung bei ungeändertem Wirkungsgrad und kleiner Machscher Zahl.
ψ_u Einfluß der Zusammendrückbarkeit der Luft auf Schub bzw. Leistung bei ungeändertem Wirkungsgrad.

$k_s = k_{s_{id}}(\eta = \eta_{id}) \cdot \psi_d \cdot \psi_s \cdot \psi_u$, $\quad k_d = k_{d_{id}}(\eta = \eta_{id}) \cdot \psi_d \cdot \psi_s \cdot \psi_u$.

$\eta_g = \eta \cdot \eta_e = \frac{S_n v}{N}$ Vortriebsgütegrad der Luftschraube.

$\eta_e = \eta_v \cdot \eta_s = \frac{S_n}{S}$ Einbaugütegrad der Luftschraube (auch ψ)

η_s Strahlgütegrad der Luftschraube.

$\eta_v = \frac{\eta_f}{\eta_{f_0}}$ Mitstromeinfluß auf den Einbaugütegrad.

$\left.\begin{array}{l} \psi_e = \frac{S}{S^*} \\ \psi_e' = \frac{S'}{S^*} \end{array}\right\}$ Einbauziffern.

$c_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 F_s}$ Schubbelastungsgrad.

$c_l = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} v_0^3 F_s}$ Leistungsbelastungsgrad.

$c_d = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} v_0^2 R F_s}$ Drehmomentbelastungsgrad.

$k_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} u^2 F_s}$ Schubziffer.

$k_l = k_d = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u^3 F_s} = \frac{M_d}{\frac{\varrho}{2} u^2 R F_s}$ Leistungsziffer, Drehmomentziffer.

$$\frac{k_s}{k_d} = \frac{\eta}{\lambda_0}$$

$\zeta_s = \frac{k_s}{2^{2/3} k_d^{2/3}}$ Standschubgütegrad.

$\zeta_l = \frac{k_s}{2\, k_d}$ Standleistungsgütegrad.

$\xi = \frac{S_i}{S}$ Sogziffer.

$C_S = \frac{v \varrho^{1/5}}{N^{1/5} n^{2/5}} = (8\pi)^{1/5} \frac{\lambda}{k_d^{1/5}}$ Geschwindigkeitsleistungszahl.

$C_{S_s} = \frac{v \varrho^{1/4}}{S^{1/4} n^{1/2}} = (8\pi)^{1/4} \frac{\lambda}{k_s^{1/4}}$ Geschwindigkeitsschubzahl.

$C_{S_d} = \frac{v \varrho^{1/5}}{M_d^{1/5} n^{3/5}} = (4\pi)^{2/5} \frac{\lambda}{k_d^{1/5}}$ Geschwindigkeitsdrehmomentenzahl.

Bei Schräganblasung und Flugzeugdrehung.

α Anstellwinkel der Luftschraube, β Schiebewinkel der Luftschraube } allgemeiner Anstellwinkel ν.

$k_x = \frac{X}{\frac{\varrho}{2} u^2 F_s}$ Schubziffer; $k_L = \frac{L}{\frac{\varrho}{2} u^2 R F_s}$ Rollmomentziffer.

$k_y = \frac{Y}{\frac{\varrho}{2} u^2 F_s}$ Seitenkraftziffer; $k_M = \frac{M}{\frac{\varrho}{2} u^2 R F_s}$ Längsmomentziffer.

$k_z = \frac{Z}{\frac{\varrho}{2} u^2 F_s}$ Normalkraftziffer; $k_N = \frac{N}{\frac{\varrho}{2} u^2 R F_s}$ Wendemomentziffer.

d) Flügelprofile.

$q = \frac{\varrho}{2} w_\infty^2$ Staudruck der wirksamen Anströmung.

$\mathfrak{R} = \frac{w_\infty t}{\nu}$ Reynoldssche Zahl.

$\mathfrak{M} = \frac{w_\infty}{w_s}$ Machsche Zahl.

dA Auftrieb des Flügelelements.

dW Widerstand des Flügelelements.

$c_a = \frac{dA}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 t\,dr}$ Auftriebsbeiwert, $c_a \cdot \chi = \frac{\mathfrak{z}\,dA}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 dF_s}$ Auftriebsdichte.

$c_w = \frac{dW}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 t\,dr}$ Widerstandsbeiwert, $c_w \cdot \chi = \frac{\mathfrak{z}\,dW}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 dF_s}$ Widerstandsdichte.

$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c_w}{c_a} = \frac{dW}{dA}$ Gleitverhältnis.

ε Gleitwinkel $\sim \operatorname{tg} \varepsilon$.

Γ Zirkulation um Flügelelement.

$\Gamma_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}\,\Gamma$ Zirkulation des Schraubenelements.

$k = \frac{1}{2\pi}\frac{dc_a}{d\alpha}$ Konstante, bei idealer Strömung zur Berücksichtigung von Gittereinfluß bzw. Profilform, bei wirklicher Strömung zur Berücksichtigung der Abweichungen vom idealen Auftrieb des alleinstehenden Streckenprofils.

$q = \frac{k}{\frac{2a}{\pi t}\,\frac{1}{\cos\gamma}}$ Konstante zum Vergleich zwischen Gitterströmung und Stromfadentheorie.

ϑ Kennwinkel für Blattbreiteneinfluß auf Geschwindigkeitsdiagramm.

β Fortschritts- bzw. Strömungswinkel gemessen von der Schraubenkreisebene.

α Anstellwinkel gemessen von der auftriebsfreien Anströmrichtung.

Indizes 0 weit vor Schraube,
1 dicht vor Schraube,
2 dicht hinter Schraube,
3 weit hinter Schraube,
∞ wirksam in Schraube,
id in idealer Strömung,
$*$ bei auftriebfreier Anströmung, ($\alpha^* \equiv 0$).

α_d Anstellwinkel gemessen von Druckseitentangente.

α_s Anstellwinkel gemessen von Sehnenrichtung.

$\Delta\alpha = \beta^* - \beta_d = -\alpha_d^*$ Unterschied der Druckseitenrichtung von der Nullauftriebsrichtung, Differenzwinkel.

$\alpha_i = \beta_i = \beta_\infty - \beta_0 = \alpha_0 - \alpha_\infty$ induzierter Anstellwinkel.

$\beta_\infty = \operatorname{arc\,tg} \lambda_\infty$ wirksamer Fortschrittswinkel.

$\alpha_\infty = \beta^* - \beta_\infty$ wirksamer aerodynamischer Anstellwinkel.

$\alpha_{d\infty} = \beta_d - \beta_\infty$ wirksamer Anstellwinkel bezogen auf Druckseitenrichtung.

V. Sachverzeichnis.